新编

控制系统MATLAB仿真实训

黄忠霖　编著

MATLAB







本书附赠学习课件



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

新编控制系统 MATLAB 仿 真 实 训

黄忠霖　编著



机 械 工 业 出 版 社

本书主要包括3部分内容，即控制系统MATLAB计算及仿真的解题实训、控制系统MATLAB计算及仿真的实验实训、控制系统MATLAB计算及仿真课程设计与毕业设计实训等。本书可与作者以前编写的《控制系统MATLAB计算及仿真》配合使用，因为本书第1部分实际上主要是该书的例题习题集，第2部分则是该书的上机实验操作训练，而第3部分则是对自动控制类各专业关于自动控制仿真的课程设计与毕业设计实践训练。另外，本书附录是作者开发的自编函数。

“自动控制原理”、“自动控制系统”与“控制系统MATLAB仿真”等，是高等学校电气信息类各专业的主要专业基础课与专业课，本书是学习这些课程的必备参考书，既可作为电气信息类各专业的MATLAB仿真教材，也可作为自动控制领域工程技术人员学习MATLAB的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

新编控制系统MATLAB仿真实训/黄忠霖编著. —北京：机械工业出版社，2013.6

ISBN 978-7-111-42163-4

Ⅰ.①新…　Ⅱ.①黄…　Ⅲ.①自动控制系统－系统仿真－Matlab软件　Ⅳ.①TP273

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第075591号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：张俊红　责任编辑：闾洪庆
版式设计：霍永明　责任校对：闫玥红
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2013年6月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 28.25印张 · 627千字
0001—3000册
标准书号：ISBN 978-7-111-42163-4
定价：69.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

1. 撰写本书的背景

作者撰写的《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已出版了 3 版，印刷 8 次，发行销售近 20000 册，受到同行师生与广大读者的欢迎、关心与爱护。

在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》一书中，每一类问题都只能举一例或少量例题，因自动控制仿真内容太丰富而仿真教材篇幅又不能太长，不可能介绍太多的例题与习题。这也是同行与使用《控制系统 MATLAB 计算及仿真》的读者提出的宝贵意见，他们希望多解算些例题，介绍些控制系统仿真实验、课程设计与毕业设计方面的内容。更重要的是《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中作者编写的解算例题与习题的 MATLAB 程序或函数的有效性如何？能否可靠解算其他题目呢？

为适应广大读者的要求，特别是适应电气信息类各专业教学、仿真实验、课程设计与毕业设计需要，为配合《控制系统 MATLAB 计算及仿真（第 2 版)》教材的使用，2005 年作者撰写了配套的实训教材《控制系统 MATLAB 计算及仿真实训》。

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》经历了几版完善，其内容有根本性修改，采用的 MATLAB 系统版本也发生了很大变化。这就是本书出版发行的缘由。

本书乃是《控制系统 MATLAB 计算及仿真》或更新版本仿真教材配套的习题集或实训教材，本书以 MATLAB 7. 5 版本为仿真软件。

2. 高校应用 MATLAB 于教学的新发展

1）由于 MATLAB 为自动控制技术提供了诸多工具箱，近几年国内有关自动控制领域的 MATLAB 仿真书籍如雨后春笋般出版发行，实为可喜之事。

2）多年来，国内很多本科高校已经开设了“高等数学”课程的 MATLAB 实验。2009 年教育部高教司启动了“利用信息工具技术改造课程”项目，其中“用 MATLAB 和建模实践改造工科线性代数课程”项目被列为 18 个子项目之首。这为高校“利用信息工具技术改造课程”项目开了一个好头，后续项目定会积极跟进。

3）对于学习理工科的任何课程，学生为加深理解所学理论，用手工计算做一定量的解题训练是必要的，经过一段训练后即可。传统的手工计算太慢且极易产生差错，大量复杂、繁琐的计算必须学会使用计算机工具。大科学家钱学森曾写道：“现在已经可以看到电子计算机对工程技术工作的影响。今后对一个问题求解可以全部让电子计算机去干，不需要人去一点一点算”。

4）MATLAB 应用学科门类多多：数学、电工电气、自动控制、电子信息、机械、化学化工、经济、金融、管理、图像处理、运筹学、环境科学、生物医学数据分析、选煤、选矿数据处理等不一而足。

我们热切期待着 MATLAB 更多应用的出现。

3. 本书特色

1）本书不含 MATLAB 语言基础知识部分（该部分作者已另书出版[1]），突出控制系统仿真的主要内容。

2）密切配合课程教学。本书根据电气信息类各专业主要课程“自动控制原理”或“控制工程基础”、“电力拖动控制系统”、“生产过程控制系统”、“控制系统仿真”的内容撰写而成。

3）在本书中，作者推介 69 个自编函数，作为解算例题与习题的工具，使解题更加简捷、精准与高效。

4）尽量使 MATLAB 软件的计算机操作更加人性化。本书内容确定了与 MATLAB 软件相关，必然有很多计算机操作。对于比较麻烦、繁琐、困难与易于出错的计算机操作都尽力叙述清楚、详尽、易懂，以服务读者。

5）使用高效工具 Notebook。连接 Word 与 MATLAB 系统的文字处理软件，是一个非常有效的工具。学习并掌握这个工具，能给写作与 MATLAB 有关的书籍或文章的撰写者带来极大的方便，更主要的是让学习 MATLAB 的读者提高学习效率。

4. 本书内容

本书包括 3 部分：控制系统 MATLAB 计算及仿真的解题实训、控制系统 MATLAB 计算及仿真的实验实训、控制系统 MATLAB 计算及仿真课程设计与毕业设计实训等。第 1 部分实际上是《控制系统 MATLAB 计算及仿真》的例题习题集，第 2 部分是《控制系统 MATLAB 计算及仿真》的上机实验操作训练，第 3 部分是对电气信息类各专业关于自动控制仿真的课程设计与毕业设计实践训练。

本书第 1 部分除第 2 、3 章外，每章后都配有该章习题。附录是作者为《控制系统 MATLAB 计算及仿真》与本书开发的自编函数，供读者查阅、使用。

为方便读者学习，本书配有习题参考答案、自编函数的 MTALAB 软件电子文档与仿真模型，有需要的读者可与出版社或作者联系。

5. 几点说明

1）针对控制系统 MATLAB 计算及仿真的典型命题或实际问题，在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》开发自编函数的基础上，作者又开发了新的 MATLAB 程序。需要指出，①有的程序或函数语句长、行数多；有的程序短小，但其功能不可小视，非常管用。②同一算题类型的多个示例，是为了说明自编函数功能的实用性与可靠性。③希望这些程序起到抛砖引玉的作用，有兴趣的读者还可进一步开发，对本书程序可进一步精练、优化。

需要提醒的是，作者开发的自编函数或程序是本书学习的重点。对此，建议读者注意两种学习模式；一是只要求学会用这些程序解题，不深究程序；另一种是既要解题，又要弄懂程序。这对于将其用于课程设计或毕业设计的读者是必须要求的。其实本书自编程序不深也不难，只要认真阅读《控制系统 MATLAB 计算及仿真》，必能心想事成。

2）本书介绍的仿真模型，其参数值设置经作者或是计算或是仿真模型寻优、逐步逼近而得到的，也希望起到抛砖引玉的作用，读者也可对模型进一步寻优。

对书中开发的程序或函数、创建的仿真模型，作者承诺：第一，对读者完全负责，即在相应 MATLAB 版本系统里，保证正常运行；第二，对实名制读者完全公开。

3）作者所有著作（包括本书）的撰写、编辑以及其中 MATLAB 的语句、命令与本书

的示例程序都经反复调试，既能够在 MATLAB 里运行，也能够在 Notebook 中运行（除带鼠标操作的图形函数命令或绘制多条曲线或使用人机交互指令时必须采用程序文件执行）。

4）读者在计算机上输入程序时，一定要在英语输入状态下，并特别注意标点符号。

5）书中程序流程的顺序、选择、循环三大控制语句按规范格式书写外，为精练与简洁，书中程序是连续书写的，提请读者特别关注语句间的标点符号及其作用。

6）对程序或自编函数运行结果列出了多个数据，是为了让读者全面了解程序或自编函数的功能，其中仅几个数据对解答问题是必需的，才写入正文。

7）本书的曲线或图形是纸面上印刷的黑白影像，读者若能在计算机上运行其 MATLAB 程序从而绘制出彩色的曲线或图形，那一定会更清晰、更准确，一定能够更真切地表明要说明的问题或计算的数据。

8）对不同配置的计算机、不同的 MATLAB 系统版本，MATLAB 的程序计算与模型仿真结果（包括曲线）可能出现误差，其原因复杂、多样，诸如计算机字长位数的限制、运算方法不同精度的限制、选择微分方程数值解法不当与仿真时间设置不当引起的。一般情况下误差很小，都在许可范围内。

9）符号运算与 MATLAB 函数运算是两类同等重要的计算方法。可能出现同一单位负反馈系统两种方法求出传递函数不一致，但验证单位阶跃响应曲线是一样的，说明两种方法求出的传递函数等效。

10）有时 MATLAB 程序运行后算出了结果，但出现了一些英文蓝色警示提醒。这些英文蓝色警示，大多是有关 MATLAB 系统函数参数设置范围、使用系统函数的注意事项等，只要计算出结果，读者不必特别在意。

11）习题的参考答案只给出最关键的部分。

12）书中计算的中间结果或最终结果不可能带单位。这要求读者对自动控制原理、控制系统等课程的基本概念、基本理论与基本计算方法有一定了解。

本书由黄忠霖编著，任大年、黄京、袁娅、白洛、任刚、谭邦会、刘四平、黄曦、周向明、关子诚、黄忠鑫、吴江、吴方法、刘厚福、朱贤玉、关酉佳、刘晓娟、白世雄、关顺华、彭新友、李树运、徐勤、万鹏丽、田娜、张新军、田莉莉、黄雅琼、姜雨苏、谭福新、吴涛、关艳等也参与了本书的编写。在本书编写过程中，作者参阅与借鉴了国内各种教材与文献，谨对其原作者表示由衷的诚挚谢意。

在此还要特别感谢机械工业出版社电工电子分社和本书的责任编辑，为本书的编辑工作提供了全心的帮助，并为本书早日出版竭尽了全力。

由于时间仓促，加上作者水平有限，书中难免有错误与疏漏之处，恳请读者批评指正。为方便读者，欲获取本书相关资料，实名读者可通过以下 E－mail 地址与我们联系：43737605@qq.com 或 zlhuang41@163.com

黄忠霖

2013 年夏

目　　录

前言

第1部分　控制系统 MATLAB 计算及仿真的解题实训

第1章　MATLAB 的程序设计 …… 1

1.1　有关 MATLAB 程序设计的基本概念 …… 1

1.2　MATLAB 程序设计基本规则 …… 2

1.3　有关 MATLAB 程序设计举例 …… 2

1.3.1　自然数列求和与由自然数列中每个自然数的倒数所组成的数列求和 …… 2

1.3.2　杨辉三角形或 Pascal 三角形与 Pascal 矩阵 …… 3

1.3.3　Fibonacci 数列 …… 4

1.3.4　闰年 …… 4

1.3.5　Vandermonde 矩阵 …… 5

1.3.6　编程序写出以一直角边最长为任意整数值长的勾股弦数 …… 6

1.3.7　编程再举例 …… 6

习题 …… 8

第2章　MATLAB 7.5 的仿真集成环境 Simulink 7.0 …… 9

2.1　Simulink 仿真特色与其模型窗口 …… 9

2.1.1　Simulink 仿真特色 …… 9

2.1.2　进入 MATLAB 7.5 的 Simulink 7.0 …… 10

2.1.3　Simulink 7.0 的模型窗口概述 …… 10

2.2　Simulink 7.0 的界面与组成 …… 13

2.2.1　Simulink 7.0 功能模块组的打开与关闭 …… 13

2.2.2　Simulink 7.0 功能模块的分类及其用途 …… 14

2.3　用 Simulink 建立系统仿真模型 …… 17

2.3.1　打开模型窗口的方法 …… 18

2.3.2　模块的查找与选择 …… 18

2.3.3　模块的复制、移动与删除 …… 18

2.3.4　模块的连接 …… 19

2.4　常用15个模块内部参数的设置或修改 …… 20

2.5　用 Simulink 建立系统仿真模型实例 …… 27

第3章　常用电气系统（SimPowerSystems）实体图形化仿真模型 …… 29

3.1　电气系统（SimPowerSystems）实体图形化模型库简介 …… 29

3.1.1　电源（Electrical Sources）模块组　…… 30
3.1.2　电器元件（Elements）模块组 …… 30
3.1.3　电力电子元件（Power Electronics）模块组　…… 31
3.1.4　电机（Machines）模块组 …… 32
3.1.5　电气测量仪表（Measurements）模块组 …… 32
3.2　基本电路元件的仿真模型　…… 33
3.2.1　普通电源　…… 33
3.2.2　受控电源　…… 34
3.2.3　RLC 元件　…… 35
3.3　常用电机与变压器的仿真模型　…… 37
3.3.1　电机　…… 37
3.3.2　变压器　…… 40
3.4　基本电力电子器件的仿真模型　…… 43
3.4.1　二极管（Diode）　…… 43
3.4.2　晶闸管（Thyristor）　…… 45
3.4.3　门极关断晶闸管（GTO）　…… 47
3.4.4　电力场效应晶体管（MOSFET）　…… 48
3.4.5　绝缘栅双极型晶体管（IGBT）　…… 50
3.4.6　理想开关（Ideal Switch）　…… 51
3.4.7　多功能桥式整流电路（Universal Bridge）　…… 52
3.5　电力电子变流器典型驱动装置的仿真模型 …… 53
3.5.1　同步 6 脉冲触发器（Synchronized 6 – Pulse Generator）　…… 54
3.5.2　同步 12 脉冲触发器（Synchronized 12 – Pulse Generator）…… 55
3.5.3　PWM 脉冲发生器（PWM Generator）…… 56
3.5.4　脉冲信号发生器（Pulse Generator）　…… 58
3.6　常用测量元件的仿真模型　…… 59
3.6.1　电压测量（Voltage Measurement）　…… 59
3.6.2　电流测量（Current Measurement ）　…… 59
3.6.3　三相电压电流测量（Three – Phase V – I Measurement ）　…… 60
3.6.4　选路器或选择开关（Selector）　…… 61
3.7　用“SimPowerSystems”创建系统仿真模型 …… 62

第 4 章　控制系统数学模型的 MATLAB 实现 …… 64
4.1　设置或修改 LTI 对象的属性值函数 set( )　…… 64
4.2　控制系统数学模型　…… 65
4.3　控制系统模型转换与化简　…… 69
4.4　用系统 Simulink 结构图模型化简控制系统模型 …… 71
习题 …… 73

第 5 章　连续系统时域分析的 MATLAB 实现 …… 76
5.1　Laplace 变换及反变换的 MATLAB 实现　…… 76
5.1.1　MATLAB 系统中 Laplace 变换与反变换的函数命令　…… 76
5.1.2　两个特殊函数的表示法 …… 76

5.1.3 计算函数的 Laplace 变换 …… 77
5.1.4 计算用图形表示函数的 Laplace 变换 …… 79
5.1.5 利用留数将象函数表达式展成部分分式 …… 83
5.1.6 用 Laplace 反变换求原函数 …… 84
5.1.7 Laplace 变换的卷积与卷积定理 …… 85
5.1.8 用 Laplace 变换定义传递函数 …… 86
5.1.9 用 Laplace 反变换求解微分方程 …… 88
5.2 MATLAB 函数指令方式下的时域响应仿真 …… 91
5.2.1 一阶系统时域分析的 MATLAB 实现 …… 91
5.2.2 二阶及高阶系统时域分析的 MATLAB 实现 …… 93
5.3 利用 Simulink 动态结构图的时域响应仿真 …… 99
5.3.1 解算系统闭环传递函数的两种方法 …… 99
5.3.2 利用 Simulink 动态结构图模型程序方式下的时域响应仿真 …… 99
5.3.3 在 Simulink 模型窗口里菜单方式下的时域响应仿真 …… 100
习题 …… 102

第 6 章 连续系统稳定性分析的 MATLAB 实现 …… 104
6.1 代数稳定判据的 MATLAB 实现 …… 104
6.1.1 用系统特征方程的根判定系统稳定性 …… 104
6.1.2 用 Lienard－Chipard 稳定判据判定系统稳定性 …… 105
6.2 用根轨迹法判定系统稳定性的 MATLAB 实现 …… 106
6.3 用频率法判定系统稳定性的 MATLAB 实现 …… 110
6.3.1 用 Bode 图法判断系统稳定性 …… 110
6.3.2 用 Nyquist 曲线法判断系统稳定性 …… 112
习题 …… 115

第 7 章 连续系统稳态误差计算的 MATLAB 实现 …… 117
7.1 控制系统的静态误差系数与动态误差系数 …… 117
7.2 三种典型信号给定输入作用下的稳态误差 …… 120
7.3 从输出端定义的非单位负反馈系统的误差的计算 …… 123
7.4 扰动输入作用下的稳态误差计算 …… 124
7.5 绘制误差响应曲线 …… 125
习题 …… 127

第 8 章 连续系统根轨迹分析的 MATLAB 实现 …… 130
8.1 控制系统根轨迹分析的 MATLAB 实现 …… 130
8.1.1 根轨迹分析 MATLAB 实现的函数指令格式 …… 130
8.1.2 根轨迹分析的 MATLAB 实现举例 …… 131
8.2 基于根轨迹的设计工具 …… 139
习题 …… 142

第 9 章 连续系统频域分析的 MATLAB 实现 …… 143

9.1　控制系统的频率特性 …… 143
9.2　控制系统 Bode 图及其模值裕度与相位裕度 …… 146
9.3　控制系统 Nyquist 曲线 …… 150
习题 …… 153

第 10 章　描述函数法分析非线性系统的 MATLAB 实现 …… 155
10.1　非线性系统特性简述 …… 155
10.2　非线性系统自振 …… 155
10.2.1　非线性系统的典型结构 …… 155
10.2.2　自动控制系统中典型非线性特性 …… 156
10.3　非线性系统自振分析 …… 157
10.4　描述函数法分析非线性系统自振的 MATLAB 实现 …… 158
习题 …… 173

第 11 章　离散系统分析与校正的 MATLAB 实现 …… 175
11.1　用 MATLAB 工具解算 z 变换与 z 反变换 …… 175
11.2　差分方程的 z 变换解法 …… 177
11.3　离散控制系统的脉冲传递函数 …… 178
11.4　离散系统时域分析的 MATLAB 实现 …… 182
11.4.1　离散系统时域响应的 MATLAB 实现 …… 182
11.4.2　离散系统稳定性分析的 MATLAB 实现 …… 185
11.4.3　离散系统稳态误差计算的 MATLAB 实现 …… 185
11.5　离散系统根轨迹分析的 MATLAB 实现 …… 186
11.6　离散系统动态性能分析的 MATLAB 实现再举例 …… 189
11.7　线性离散系统数字校正的 MATLAB 实现 …… 193
11.7.1　数字控制器的脉冲传递函数 …… 193
11.7.2　最少拍系统的设计 …… 193
11.7.3　离散系统数字校正的 MATLAB 实现 …… 194
习题 …… 195

第 12 章　连续线性控制系统校正设计的 MATLAB 实现 …… 197
12.1　控制系统校正设计几个问题的说明 …… 197
12.2　控制系统 Bode 图校正设计的 MATLAB 实现 …… 199
12.2.1　控制系统 Bode 图常规设计法超前校正设计的 MATLAB 实现 …… 199
12.2.2　控制系统 Bode 图常规设计法滞后校正设计的 MATLAB 实现 …… 200
12.3　控制系统根轨迹设计的 MATLAB 实现 …… 206
12.3.1　控制系统根轨迹超前校正设计的 MATLAB 实现 …… 206
12.3.2　控制系统根轨迹滞后校正设计的 MATLAB 实现 …… 208
12.4　控制系统 P、PI、PID 校正设计的 MATLAB 实现 …… 210
12.4.1　控制系统 Ziegler－Nichols 整定公式校正设计的 MATLAB 实现 …… 211
12.4.2　控制系统 Cohen－Coon 整定公式的校正设计的 MATLAB 实现 …… 211
12.4.3　控制系统最优控制（误差积分指标最优）校正设计的 MATLAB 实现 …… 212

12.4.4 控制系统稳定边界法的 P、PI、PID 校正设计的 MATLAB 实现 …… 215
习题 …… 218

第 13 章 自动控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 219
13.1 简单闭环控制的 MATLAB 计算及仿真 …… 219
13.2 多闭环控制系统 MATLAB 计算及仿真 …… 225
13.3 转速负反馈闭环直流调速系统的 SimPowerSystems 模型仿真 …… 232
13.3.1 单闭环直流脉宽 PWM－M 调速系统的 SimPowerSystems 模型仿真 …… 232
13.3.2 转速微分负反馈双环直流 V－M 调速系统的 SimPowerSystems 模型仿真 …… 235
13.4 位置随动系统的 MATLAB 仿真与稳态误差分析 …… 237
13.4.1 位置随动系统的动态校正设计 …… 237
13.4.2 位置随动系统的稳态误差分析 …… 243
13.5 过程控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 246
13.5.1 简单回路控制系统的动态校正设计 …… 246
13.5.2 前馈控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 249
13.5.3 大延迟控制系统的 MATLAB 动态校正设计 …… 252
习题 …… 256

第 14 章 线性系统状态空间分析的 MATLAB 实现 …… 259
14.1 系统状态空间描述及其状态方程求解 …… 259
14.1.1 状态空间表达式的建立 …… 259
14.1.2 求控制系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ …… 262
14.1.3 求控制系统的传递矩阵 $G(s)$ …… 264
14.1.4 求控制系统的特征方程、特征值及特征向量 …… 265
14.1.5 求控制系统的状态方程的解 …… 266
14.1.6 连续系统状态方程的离散化 …… 266
14.2 系统状态方程的线性变换 …… 267
14.2.1 控制系统的 P 变换 …… 267
14.2.2 控制系统的 P^{-1} 变换 …… 268
14.2.3 将状态方程化为对角标准型 …… 269
14.2.4 将状态方程化为约当标准型 …… 272
14.3 线性系统的可控性与可观性 …… 274
14.3.1 线性系统的可控性 …… 274
14.3.2 线性系统的可观性 …… 277
14.4 系统状态反馈与状态观测器 …… 281
14.4.1 系统的极点配置 …… 281
14.4.2 系统的状态观测器 …… 283
14.4.3 系统的状态降维观测器 …… 286
14.5 Lyapunov 系统稳定性分析的 MATLAB 实现 …… 294
14.5.1 李雅普诺夫函数与李雅普诺夫函数方程 …… 295
14.5.2 李雅普诺夫稳定性理论 …… 295
习题 …… 296

第 15 章　线性二次型最优控制的 MATLAB 实现 …… 300
15.1　连续系统线性二次型最优控制的 MATLAB 实现 …… 300
15.2　离散系统线性二次型最优控制的 MATLAB 实现 …… 303
15.3　最优观测器（Kalman 滤波）的 MATLAB 实现 …… 304
15.4　线性二次型 Gauss 最优控制器的 MATLAB 实现 …… 306
习题 …… 308

第 2 部分　控制系统 MATLAB 计算及仿真的实验实训

第 16 章　MATLAB 仿真基础实验实训 …… 309
【实验实训 16-1】MATLAB 7.5 系统的安装、启动与卸载 …… 309
【实验实训 16-2】MATLAB 7.5 系统界面、菜单认识与内容查找 …… 310
【实验实训 16-3】Simulink 7.0 系统界面与菜单认识 …… 310
【实验实训 16-4】典型模块的参数设置 …… 310
【实验实训 16-5】仿真模型图的绘制 …… 311
【实验实训 16-6】程序方式下与 Notebook 方式下运行 MATLAB 程序 …… 311

第 17 章　自动控制原理 MATLAB 实验实训 …… 312
【实验实训 17-1】控制系统数学模型的 MATLAB 实现 …… 312
【实验实训 17-2】连续系统时域分析的 MATLAB 实现 …… 312
【实验实训 17-3】控制系统稳定性分析的 MATLAB 实现 …… 313
【实验实训 17-4】控制系统稳态误差分析的 MATLAB 实现 …… 313
【实验实训 17-5】控制系统根轨迹分析的 MATLAB 实现 …… 313
【实验实训 17-6】控制系统频域分析的 MATLAB 实现 …… 314
【实验实训 17-7】描述函数分析非线性系统的 MATLAB 实现 …… 314
【实验实训 17-8】离散系统分析与校正的 MATLAB 实现 …… 314
【实验实训 17-9】线性系统状态空间分析的 MATLAB 实现 …… 315
【实验实训 17-10】线性二次型最优控制的 MATLAB 仿真 …… 315

第 18 章　连续控制系统校正设计的 MATLAB 实验实训 …… 316
【实验实训 18-1】Bode 图常规设计超前、滞后校正的 MATLAB 实现 …… 316
【实验实训 18-2】Bode 图非常规滞后、超前校正的 MATLAB 实现 …… 316
【实验实训 18-3】根轨迹解析法超前、滞后校正的 MATLAB 实现 …… 316
【实验实训 18-4】用 Ziegler-Nichols 公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现 …… 317
【实验实训 18-5】用 Cohen-Coon 公式进行 P、PI、PD、PID 校正的 MATLAB 实现 …… 317
【实验实训 18-6】用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现 …… 317
【实验实训 18-7】用稳定边界法进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现 …… 318

第 19 章　生产过程控制系统 MATLAB 仿真实验实训 …… 319
【实验实训 19-1】简单回路控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 319

【实验实训 19-2】前馈控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 319
【实验实训 19-3】大延迟控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 319
【实验实训 19-4】串级控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 320

第 3 部分　控制系统 MATLAB 计算及仿真课程设计与毕业设计实训

第 20 章　自动控制仿真课程设计与毕业设计实训 …… 322
【课程设计实训 20-1】根轨迹分析的 MATLAB 计算及仿真 …… 322
【课程设计实训 20-2】离散系统 MATLAB 计算及仿真 …… 325
【课程设计实训 20-3】过程控制系统的 MATLAB 计算及仿真 …… 331
【课程设计实训 20-4】控制系统状态空间分析的 MATLAB 设计 …… 334
【毕业设计实训 20-5】单闭环直流调速系统设计 …… 339
【毕业设计实训 20-6】双闭环直流调速系统数学模型与 SimPowerSystems 模型仿真 …… 345

附录　自编函数 …… 351

参考文献 …… 392

第 1 部分　控制系统 MATLAB 计算及仿真的解题实训

第 1 章　MATLAB 的程序设计

MATLAB 是一种高效的编程语言，它有自身程序设计的基本概念、语法规则、程序设计命令、格式、要求等，《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已经全面介绍。这里还要再强调程序设计的几个基本概念与基本规则。

在本章作者编制了 6 个函数 sunn. m、recisum. m、fibonaci. m、leapyear. m、rigtri. m、pro. m 以方便计算，有关函数存储与运行方式，请参见参考文献［1］，其源程序与用法参见附录。

1.1　有关 MATLAB 程序设计的基本概念

1. M 文件

M 文件是使用 MATLAB 语言编写的程序代码文件。之所以称为 M 文件，是因为这种文件都以“. m”作为文件的扩展名。M 文件可以分为两种类型，一种是函数文件，另一种是命令文件。

2. MATLAB 函数与函数文件

MATLAB 函数通常是指 MATLAB 系统内已设计好的完成某一种特定的运算或实现某一特定功能的一个子程序。读者也可以开发具有独特功能的函数。MATLAB 中的函数子程序即函数文件，是 M 文件最主要的形式。函数是能够接受输入参数并返回输出参数的 M 文件。在 MATLAB 中，函数名和 M 文件名必须相同。

函数 M 文件一般由五个部分组成：①函数定义行；②H1 行；③函数帮助文本；④函数体；⑤注释。

3. MATLAB 命令文件与程序

在 MATLAB 中，实现某项功能的一串 MATLAB 语句命令与函数组合成的 M 文件叫做命令文件。命令文件执行后的结果既可以显示输出，也能够使用 MATLAB 的绘图函数产生图形输出结果。另外，命令文件既可不带输入参量也可不带输出参量。

多个、多种（既有函数文件又有命令文件的组成成分）M 文件组合成为一个 MATLAB 程序，所以 MATLAB 程序也是一种类似命令文件的 M 文件。

1.2　MATLAB 程序设计基本规则

MATLAB 是一种高效的编程语言。MATLAB 语言为解释性程序设计语言，程序中的语句边解释边执行。必须认真复习程序基本组成的示意结构、表达式、表达式语句与赋值语句，还有实现各种不同运算功能的顺序、选择、循环三大基本结构控制语句，这对程序设计是至关重要的。

1. 顺序结构语句

MATLAB 程序与其他任何计算机程序一样，总体上都是从上到下执行的顺序结构。

2. 分支选择结构语句

分支选择语句有 if 条件分支语句与 switch 开关分支语句两种。必须仔细复习有关分支选择语句的格式、执行规则等。

3. 循环结构语句

MATLAB 中的循环结构语句有 for 循环语句和 while 循环语句两种，各有其不同的使用场合，前者使用在指定循环次数的情况下，后者使用在不指定循环次数的情况下。也要仔细复习有关循环语句的格式、执行规则等。

除了用分支选择结构与循环结构对 MATLAB 程序进行控制外，还有几个程序流程控制指令是经常使用的。不带输入参数的命令叫做 MATLAB 指令。对指令 break、return、pause 的功能与执行规则必须掌握，否则，设计的程序是错误的。

1.3　有关 MATLAB 程序设计举例

MATLAB 程序设计的功能各种各样，形式纷繁多姿，以下介绍仅是抛砖引玉。

1.3.1　自然数列求和与由自然数列中每个自然数的倒数所组成的数列求和

1. 自然数列求和

MATLAB 有系统函数 sum. m，是用来对指定数组或向量的元素求和的。对要求计算从 1 到 n 的自然数列的和，若使用 sum. m，必须写出1 到 n 的全部元素，十分不便。为方便计算，作者编制了求 1 到 n 的自然数列前 n 项和的函数 sunn. m。

【例 1-1】　用自编函数 sunn. m 求和 $s100=1+2+\cdots+100$ 与 $s10=1+2+\cdots+10$，并与使用系统函数 sum. m 进行比较。

解： 给出以下调用自编函数 sunn. m 的程序解算。

```
clear;s=sunn(100);s=sunn(10);
x=[1 2 3 4 6 7 8 9];s=sum(x),
```

程序运行后得到 $s100=1+2+\cdots+100=5050$、$s10=1+2+\cdots+10=55$、$s9=1+2+3+4+6+7+8+9=40$。

2. 由自然数列中每个自然数的倒数所组成的数列求和

为方便计算，作者编制了求 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$数列求和的函数 recisum. m。

【例 1-2】　求和 1）$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}$与$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}$；2）$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}$与$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$。

解：1）可以用以下调用自编函数 recisum.m 的程序解算。

```
clear;m=9;[s]=recisum(m);
m=10;[s]=recisum(m);
```

程序运行后得到 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}=2.8290$、$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}=2.9290$。

2）还可用以下调用自编函数 recisum.m 的程序解算。

```
clear;m=99;[s]=recisum(m);
m=100;[s]=recisum(m);
```

程序运行后得到 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}=5.1774$、$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}=5.1874$。

1.3.2　杨辉三角形或 Pascal 三角形与 Pascal 矩阵

杨辉三角形是 13 世纪中国宋代数学家杨辉最早发现的，故叫做杨辉三角形（或贾宪三角形或 Pascal 三角形），在基础数学研究中占有重要的地位。

杨辉三角形是两变量和的幂次方即$(a+b)^{n-1}$运算后二项展开式的二项式系数排列成的一个三角形数表（请不要在意变量 a、b 的值，只关注二项展开式的二项式系数）：

```
                  1                         n=1
               1     1                      n=2
             1    2    1                    n=3
          1    3     3    1                 n=4
       1    4     6     4    1              n=5
    1    5    10    10     5    1           n=6
  1    6   15    20    15    6    1         n=7
……………………………………………………………………
```

杨辉三角形基本性质：①每行数字左右对称，由 1 从左到右逐渐变大，然后变小回到 1；②第 n 行的数字个数为 n 个；③第 n 行数字和为 2^{n-1}；④每个数字等于上一行的左右两个数字之和。请看以下程序并运行该程序。

```
clear;syms a b;
p0=expand((a+b)^0),p1=expand((a+b)^1),
p2=expand((a+b)^2),p3=expand((a+b)^3),
p4=expand((a+b)^4),p5=expand((a+b)^5),
p6=expand((a+b)^6),p7=expand((a+b)^7),
```

程序运行后得到二项展开式的二项式系数与以上数表完全一致。

以下给出 5 阶 Pascal 矩阵。

```
clear;pascal(5),
```

语句运行后得到 5 阶 Pascal 矩阵

```
ans =
```

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	70

请读者仔细观察，Pascal 矩阵是以杨辉三角形（或 Pascal 三角形）的右腰（边）为矩阵的第一行、左腰（边）为矩阵的第一列依次排列的矩阵形式。

1.3.3 Fibonacci 数列

意大利数学家 Fibonacci（斐波那契）在 1202 年提出一个关于兔子繁殖的问题：如果一对兔子每月能生一对小兔（一雄一雌），而每对小兔在它出生后的第 2 个月末又能生一对小兔，若不发生死亡，第 50 个月后会有多少对兔子？兔子数的数列就叫做 Fibonacci 数列。数列中的每一项都叫做 Fibonacci 数。随着数列项数的增加，前一项数值与后一项数值之比越来越逼近黄金分割的数值 0.618，故 Fibonacci 数列又称黄金分割数列。

Fibonacci 数与植物之间的关系也十分有趣。几乎所有花朵的花瓣数（典型的有向日葵花瓣）都是 Fibonacci 数；菠萝表皮方形鳞苞形成两组旋向相反的螺线，它们的条数是相邻的两个 Fibonacci 数，如左旋 8 行、右旋 13 行。

在现代物理、准晶体结构、化学等领域，Fibonacci 数列都有直接的应用。

为方便计算，作者编制了计算并列写 Fibonacci 级数的函数 fibonaci. m。

【例 1-3】 Fibonacci 级数是这样的一个级数：它的前两个元素为 1 与 1，第三个元素是前两个元素和，以后每个元素都是前两个元素和。1）试计算并列写小于 100 的所有 Fibonacci 数；2）计算 60 个所有 Fibonacci 数，只列写出第 51 个 Fibonacci 数。

解：1）给出调用自编函数 fibonaci. m 的程序计算并列写小于 100 的 Fibonacci 数。

```
clear;c = 100;n = 0;m = 0;key = 1;
f = fibonaci(key,c,n,m);
```

程序运行后得到小于 100 的 Fibonacci 数依次是

```
f = 1    1    2    3    5    8    13    21    34    55    89
```

2）给出调用自编函数 fibonaci. m 的程序计算 60 个 Fibonacci 数，只写第 51 个数。

```
clear;c = 0;n = 60;m = 51;key = 2;
f = fibonaci(key,c,n,m);
```

程序运算结果

```
ans = 2.036501107400000e + 010
```

即是数学家 Fibonacci 计算的第 50 个月后兔子的数量为 200 多亿对。

1.3.4 闰年

1. 闰年（Leap Year）的概念

闰年是为了弥补因人为历法规定造成的年度天数与地球实际公转周期的时间差而设立的。补上时间差的年份为闰年。闰年共有 366 天（1～12 月分别为 31 天，29 天，31 天，30 天，31 天，30 天，31 天，31 天，30 天，31 天，30 天，31 天），其主要特征就是闰年的二月为 29 天。

为什么会如此呢？是因为地球绕太阳运行周期为 365 天 5 小时 48 分 46 秒（合 365.24219 天）即一回归年（tropical year）。公历的平年只有 365 日，比回归年短约 0.2422 日，所余下的时间约为四年累计一天，故四年于二月加 1 天，使当年的历年长度为 366 日，这一年就为闰年。现行公历中每 400 年有 97 个闰年。按照每四年一个闰年计算，平均每年就要多算出 0.0078 天，这样经过四百年就会多算出大约 3 天来，因此，每四百年中要减少三个闰年。所以规定，公历年份是整百数的，必须是 400 的倍数的才是闰年，不是 400 的倍数的，虽然是 100 的倍数，也是平年，这就是通常所说的：四年一闰，百年不闰，四百年再闰。例如，2000 年是闰年，1900 年则是平年。特例：3200 虽然能被 400 整除但 3200 年不是闰年。

2. 确定闰年的 MATLAB 程序

为了确定某段年度区间内哪些年为闰年，作者编制了函数即程序 leapyear.m 来进行计算与确定。程序计算结果可按闰年的二月为 29 天的原理，在互联网上查对各种万年历。

【例 1-4】 试确定公元 1900～2030 年间是闰年的年份。

解：给出以下调用自编函数 leapyear.m 的程序解算。

```
clear; m=1900;n=2030; leapyear(m,n);
```

程序运行后得到是闰年的年份有

1904,1908,1912,1916,1920,1924,1928,1932,1936,1940,1944,1948,1952,1956,1960,1964
1968,1972,1976,1980,1984,1988,1992,1996,2000,2004,2008,2012,2016,2020,2024,2028

1.3.5　Vandermonde 矩阵

Vandermonde（范德蒙德）矩阵是矩阵理论中一个重要的矩阵类型，它的许多广义形式在处理矩阵问题时能起到关键作用。在自动控制理论的状态空间分析中，利用范德蒙德矩阵可将某些状态方程化为对角线标准型，这些标准型能把系统的某些特性描述得清晰、准确，且具有很简洁的形式，这会给系统分析与设计带来很多方便。

【例 1-5】 用 MATLAB 程序生成 5 阶 Vandermonde 矩阵，并计算其行列式的值。

解：给出以下程序生成 5 阶 Vandermonde 矩阵并计算其行列式的值。

```
clear;syms x1 x2 x3 x4 x5;
c=[x1 x2 x3 x4 x5];
n=max(size(c));
for j=1:n
    for i=1:n
        V(i,j)=c(j)^(i-1);
    end
end
detV=factor(det(V)),
```

程序运行后得到

detV=(-x5+x4)*(x3-x5)*(x3-x4)*(-x5+x2)*(x2-x4)*(x2-x3)*
(-x5+x1)*(x1-x4)*(x1-x3)*(x1-x2)

即有 $\det\boldsymbol{V}=\det\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2&x_5^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3&x_5^3\\x_1^4&x_2^4&x_3^4&x_4^4&x_5^4\end{bmatrix}=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)$

$(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)$

本题计算结果是 Vandermonde 矩阵的一个重要性质：Vandermonde 矩阵行列式其值为 (x_i-x_j) 全体同类因子的乘积：

$$\det\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{n-1}^2&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_{n-1}^{n-1}&x_n^{n-1}\end{bmatrix}=\prod_{n\geqslant j>i\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

1.3.6 编程序写出以一直角边最长为任意整数值长的勾股弦数

为方便计算，作者编制了函数 rigtri. m 来计算一直角边最长为 e 构成直角三角形的勾、股、弦的长度。

【例 1-6】 写出以一直角边最长为 10 的构成直角三角形的所有勾、股、弦的长度。

解：给出以下调用自编函数 rigtri. m 的程序来解算。

```
clear;e=10; [a,b,c]=rigtri(e);
```

程序运行后得到直角三角形的勾、股、弦的长度为

(3 4 5)、(5 12 13)、(6 8 10)、(7 24 25)、(8 15 17)、(9 12 15)、(9 40 41)、(10 24 26)

1.3.7 编程再举例

【例 1-7】 编程序计算积 $p=1\times2\times3\times\cdots\times10$ 即计算 10!。

解：MATLAB 有系统函数 prod. m 是计算一个向量或数组的所有元素的乘积，这些元素可以不连续，但程序中必须写出全部所有元素。

为方便计算，作者编制了函数 pro. m 来计算 $p=1\times2\times3\times\cdots\times i\times\cdots\times n$ 即 $n!$。

```
clear;A1=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];p1=prod(A1),
p10=pro(10),A2=[1 2 3 4 5 8];p2=prod(A2),
```

程序运行后得到 $p=1\times2\times3\times\cdots\times10=10!=3628800$、$1\times2\times3\times4\times5\times8=960$。

【例 1-8】 编程序列写出从数 1 到 50 能被 3 整除的奇数。

解：

```
clear;x=1;s=50;
while x<=s
    if mod(x,3)==0
        if mod(x,2)~=0
```

```
            c = x,
        end
    end
    x = x + 1

end
```

程序运行后得到能被 3 整除的奇数有 3、9、15、21、27、33、39、45。

【例 1-9】 有一个两位数，用 2 除余 1，用 3 除余 2，用 4 除余 3，用 5 除余 4，用 6 除余 5，试编程序求此数。

解：

```
clear;xx = 10;
while  xx < = 99
     if  mod(xx,2) = = 1
        if  mod(xx,3) = = 2
            if  mod(xx,4) = = 3
                if  mod(xx,5) = = 4
                     if  mod(xx,6) = = 5
                        xx
                     end
                end
            end
        end
     end
   xx = xx + 1;
end
```

程序运行后求得该数为 59。

【例 1-10】 编程序计算所有五位水仙花数（即五位自幂数又叫五角星数）：五位正整数 $x = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$ 且 $x = abcde$，即 a、b、c、d、e 分别是 x 的万位、千位、百位、十位、个位上的数字。

解：

```
clear;
for  x = 10000:99999
    a = fix(x/10000);
    b = fix((x - 10000 * a)/1000);
    c = fix((x - a * 10000 - b * 1000)/100);
    d = fix((x - a * 10000 - b * 1000 - c * 100)/10);
    e = (x - a * 10000 - b * 1000 - c * 100 - d * 10);
    if  x = = (a * a * a * a * a + b * b * b * b * b + c * c * c * c * c + d * d * d * d * d + e * e * e * e * e)
      x
    end
end
```

程序运行后得到五角星数是 54748、92727、3084。请读者自行验证。

习　题

【1-1】 试对求和式 $s=1+2+3+\cdots+i$ 设计程序，算出累加值小于 1000 的最大数是多少。

【1-2】 试列写出从数 100 到 120 不能被 3 整除同时也不能被 7 整除的数。

【1-3】 试列写出从数 1 到 40 能被 3 整除的偶数。

【1-4】 编程序计算所有 4 位水仙花数（即四位自幂数又叫四叶玫瑰数）：四位正整数 $x=a^4+b^4+c^4+d^4$ 且 $x=abcd$，即 a、b、c、d 分别是 x 的千位、百位、十位、个位的数字。

【1-5】 有一数列：$1^1+1^2+1^3+\cdots+1^8+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^8+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^8+4^1+4^2+4^3+\cdots+4^8+5^1+5^2+5^3+\cdots+5^8$，求此数列所有项的和。

【1-6】 当 $k=0$，1，2，…时，由式 2^k 和 3^k 乃至 c^k 的元素构成的幂级数，在科学研究与工程技术里经常使用。编一程序输出以任意整数 c 为底的前 k 位数。

第 2 章　MATLAB 7.5 的仿真集成环境 Simulink 7.0

Simulink 7.0 里有两个重要的模型库 Simulink 与 SimPowerSystems。前者是 MATLAB 里的一个实现控制系统动态数学模型建模、仿真与分析的集成环境软件工具包（Dynamic System Simulation），是控制系统计算与仿真普遍应用的最先进与特好的高效工具。后者则是电气系统仿真模型的集成环境软件，将在第 3 章介绍。

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》里已经详细介绍过 MATLAB 7.1 及其集成环境 Simulink 6.3。本书的仿真软件是 MATLAB 7.5 及其集成环境 Simulink 7.0，两者大同小异。

通过本章的介绍，使读者熟悉并掌握在 Simulink 环境下，用 Simulink 建立控制系统仿真模型，从而为对自动控制原理、自动控制系统等课程进行 MATLAB 计算及仿真奠定基础。

2.1　Simulink 仿真特色与其模型窗口

MathWorks 开发的 Simulink 是 MATLAB 里重要软件工具之一，其主要的功能是实现动态系统建模、仿真与分析，从而在实际系统制作出来之前，可以预先对系统进行仿真与分析，并可以对系统做适当的实时修正或者按照仿真最佳效果来调试及整定控制系统参数，以提高系统性能，减少系统设计过程中反复修改的时间，实现高效率地开发系统的目标。

Simulink 支持连续与离散系统以及连续离散混合系统，也支持线性与非线性系统，还支持具有多种采样频率（Multirate）的系统。虽然如此，对绘制电路仿真模型也是必需的知识。

2.1.1　Simulink 仿真特色

1）传统系统微分方程或差分方程等数学模型，非常抽象而且不易理解。Simulink 建模直接绘制控制系统的动态模型结构图，就像用笔与纸来画图一样容易，且更简单、准确而快捷。这种直觉的图形化形式，非常直观，容易理解；不仅大大简化设计流程、减轻设计负担、降低设计成本、提高工作效率，而且使抽象深奥的数学模型变成工程技术语言——控制系统框图，好看好懂，又好用。

2）实际的鼠标操作是用其点击与拖拽功能。根据实际工程中控制系统的具体构成，将上述模块库中提供的各种标准模块复制到 Simulink 的模型窗口“untitled”中，再用 Simulink 的连线方法连接成一个完整的 Simulink 动态结构图。各个环节可按 Simulink 特定的方法设定或改变其参数，以与实际控制系统相对应。必须再次强调，Simulink 的模型窗口“untitled”里建立的是系统动态结构图，保存后的文件其扩展名为“.mdl”，而 MATLAB 的 M 文件编辑/调试器即“Untitled”窗口（见图 2-2）里建立的是 M 文件，文件扩展名为“.m”即 MATLAB 程序，两者不要混为一谈。为了管理与使用程序的方便，这两种文件最好都存放在 MATLAB 7.5\work 子目录里。

3）在构建完一个模型以后，可以通过 Simulink 的菜单或者在 MATLAB 命令窗口输入命

令来对系统进行仿真以及分析其动态特性。对于使用者而言，菜单方式交互性强，非常方便；而命令方式对于运行某些方面的仿真程序是非常有用的；Simulink 内置有各种分析工具，如多种仿真算法、系统线性化等，都是非常先进而实用的。另外，采用 Scop 示波器模块与其他的画图模块，可以在仿真进行的同时，就观看到仿真结果。

2.1.2 进入 MATLAB 7.5 的 Simulink 7.0

有多种操作方法进入 MATLAB 7.5 的 Simulink 7.0：

1）在 MATLAB 系统的命令窗口里输入“simulink”指令然后按 Enter 键。

2）在 MATLAB 系统的命令窗口里选择工具栏选项按钮“”并双击它。

3）在已启动 MATLAB 的 Word 文档里输入两条指令“cd matlab7.5 \ toolbox \ simulink”与“simulink”然后按 Enter 键。

4）选中系统界面左下角的【Start】里【Simulink】下的【Library Browser】的菜单项命令并执行它均可进入 Simulink 浏览器即模块库，如图 2-1 所示。

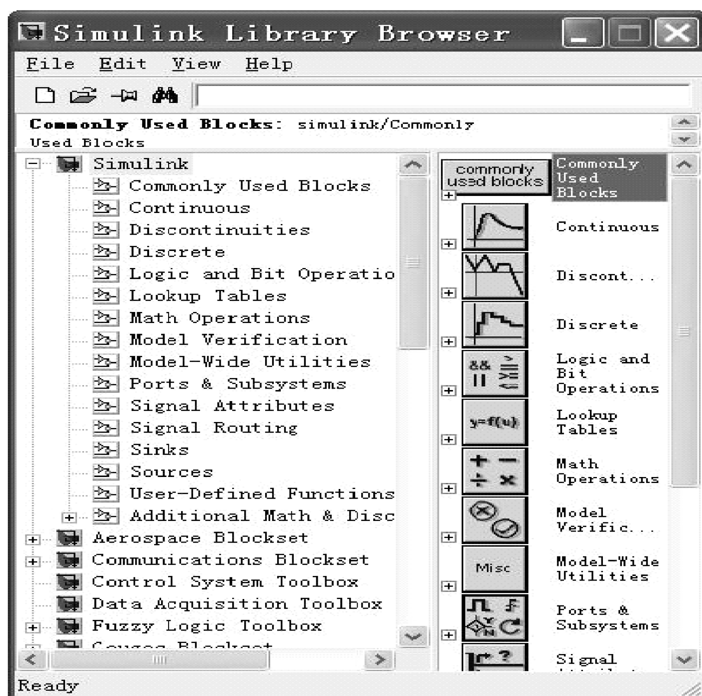


图 2-1 Simulink 7.0 模块库浏览器 17 类基本模块库

在图 2-1 中可看到左侧的两层目录结构，以及右侧相对应的模块组图标。

2.1.3 Simulink 7.0 的模型窗口概述

在图 2-1 所示的 Simulink 系统中，当单击新建模型文件按钮“”时或在图 2-1 中执行【File】下【New】下的【Model】命令，就会弹出无标题名称的“untitled”空白设计区桌面，即新建模型窗口，如图 2-2 所示。

当建立的模型文件命名后，标题“untitled”就改变为文件的名称，这个窗口即为模型窗口。MATLAB 规定模型文件即动态结构图模型的文件扩展名（或称后缀）为“.mdl”。文件命名时不需要写入扩展名，MATLAB 会自动添加上去。

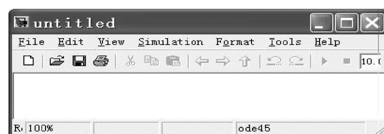


图 2-2　模型窗口“untitled”

模型窗口第二行是模型窗口的主菜单，第三行是模型窗口的工具栏，最下方是状态栏。在工具栏与状态栏之间的大窗口是建立模型即画图、修改动态结构图、仿真的操作平台，这是一个非常重要的地方。Simulink 模型窗口主菜单与工具栏是 Simulink 仿真操作的重要技术内容。

1. 模型窗口的菜单

Simulink7.0 模型窗口“untitled”的条形主菜单有【File】（文件）、【Edit】（编辑）、【View】（查看）、【Simulation】（仿真）、【Format】（格式设定）、【Tools】（工具）与【Help】（帮助）等 7 项菜单选项。条形主菜单还可根据 Simulink 窗口的宽或窄自动排列成一行或两行。

【File】的下拉菜单界面如图 2-3 所示。7 项主菜单项都有其下拉菜单，其界面类似图 2-3。每一个菜单项都是一个命令，只要用鼠标选中并单击，即可执行菜单项命令规定的操作。以下是各个菜单项（部分）命令的等效快捷键（如果有的话）及其命令功能。

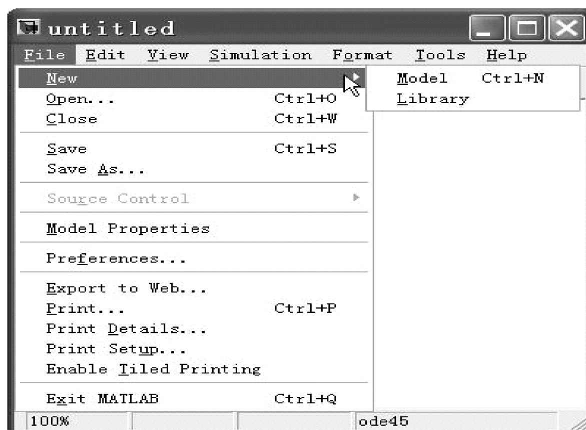


图 2-3　模型窗口的【File】下拉菜单

1）【File】文件菜单。其常用菜单项有

New	Ctrl + N	创建新的 Simulink 窗口
Open	Ctrl + O	打开已经存在的 Simulink 窗口
Close	Ctrl + W	关闭当前的 Simulink 窗口
Save	Ctrl + S	保存当前的模型文件（路径、子目录、文件名都不变）
Save As		将模型文件另外保存（改变路径或子目录或文件名）
Print	Ctrl + P	打印模型文件
Exit MATLAB	Ctrl + Q	退出 MATLAB

2）【Edit】编辑菜单。其常用菜单项有

Cut	Ctrl + X	剪切当前选定的内容并放在粘贴板上
Copy	Ctrl + C	将当前选定的内容复制到粘贴板上
Paste	Ctrl + V	将粘贴板上的内容粘贴到当前光标所在位置
Delete	Delete	删除选定的内容

3）【View】查看菜单。其常用菜单项有

Back	退回
Forward	向前
Toolbar	显示或隐藏工具栏
Status Bar	显示或隐藏状态栏
Model Explorer	模型浏览器
Zoom in	放大模型显示比例
Zoom out	缩小模型显示比例
Normal	以正常比例（100%）显示模型

4）【Simulation】仿真菜单。其常用菜单项有

Start（Pause）	Ctrl + T	启动或暂停仿真
Stop		停止仿真
Configuration parameters	Ctrl + E	设置仿真模型图参数

5）【Format】仿真格式设定。其常用菜单项有

Font		设置字体
Flip Name		模块标题名称上下换位
Flip Block	Ctrl + I	将功能模块图逆时针旋转 180°
Rotate Block	Ctrl + R	将功能模块图顺时针旋转 90°

6）【Tools】工具菜单。其常用菜单项有

Simulink Debugger	仿真调试器
Bus Editor	公用类型编辑器
Signal & Scope Manager	信号与示波器管理器
Real – TimeWorkshop	实时工作空间
Parameter Estimation	参数测定
Report Gelerator	模型文件的设置文件清单

7）【Help】帮助菜单。其常用菜单项有

Using Simulink	Simulink 的使用帮助
Blocks	Simulink 模块帮助
Blocksets	模块设置帮助
Block Support Table	模块支撑帮助
Shotcuts	Simulink 的细目帮助
S – Fuctions	S 函数的使用帮助
Demos	Simulink 的演示系统
About Simulink	Simulink 7.0 的标志界面

2. 模型窗口的工具栏

模型窗口中主菜单下面是图 2-4 所示的工具栏，工具栏有多个按钮及一个列表框，在图中，对各个按钮的功能作了简要说明，而下拉式列表框用来选择仿真形式。与 MATLAB 命令窗口的工具栏相类似，模型窗口工具栏也是 Simulink 提供的模型窗口部分常用菜单项命令的快捷按钮。熟练使用工具按钮能使操作更方便、更快捷高效。

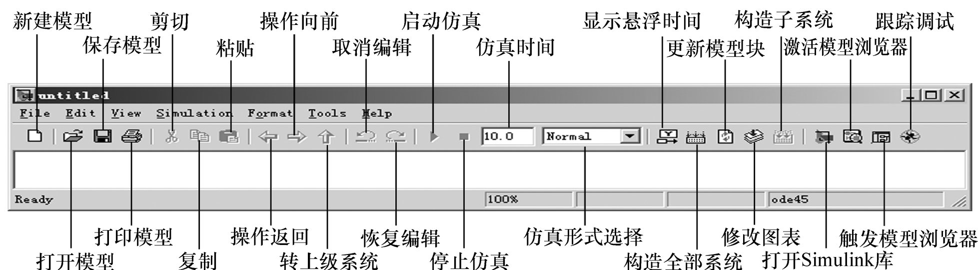


图 2-4　Simulink 模型窗口的工具栏

2.2　Simulink 7.0 的界面与组成

图 2-1 就是 Simulink 7.0 的界面，实际上是 Simulink 7.0 模块库浏览器。在界面最上方有标题栏“Simulink Library Browser”，第二行是主菜单栏【File】（文件）、【Edit】（编辑）、【View】（查看）、【Help】（帮助）等 4 项菜单选项。请注意，Simulink 7.0 界面的主菜单与上节介绍的模型窗口“untitled”的主菜单是两回事。

第三行是工具栏，工具栏里有 4 个按钮：“ ”、“ ”是新建与打开模型文件按钮，与 Windows 系统的工具相同；“ ”是将模块库浏览器放在桌面最上层的按钮；“ ”是查找模块库中的模块按钮。

下部左侧主窗口是模块库的 Simulink 及其以下两层目录的树状结构表，下部右侧主窗口是与之对应的模块库多个模块组的图标，两个窗口都有垂直与水平滚动条，以便观察到最需要的部分。

而 Simulink 模型窗“untitled”是 MATLAB 窗口系列中的一种特殊类型，在“untitled”模型窗口里有【File】（文件）、【Edit】（编辑）、【View】（查看）、【Simulation】（仿真）、【Format】（格式设定）、【Tools】（仿真工具）与【Help】（帮助）等 7 项菜单选项，与浏览器主菜单不是一回事。

2.2.1　Simulink 7.0 功能模块组的打开与关闭

在图 2-1 中，对其下部左侧主窗口的 Simulink 及其以下两层目录的树状结构表的任何部位，或对下部右侧主窗口模块组图标的任何部位，用鼠标左键双击之，即可打开相应的模块组。这时打开模块组的基本模块就在右侧主窗口里。例如，欲打开 Continuous 模块组时的情况如图 2-5 所示。

对图 2-1 下部左侧主窗口的 Simulink 及其以下两层目录的树状结构表的任何部位，或对下部右侧主窗口 17 个模块组图标的任何部位，用鼠标右键单击之（如对 Continuous 模块组），即给出打开该模块组的提示框“Open the Continuous library”（见图 2-6），然后用鼠

标左键单击这个提示框时，即另行弹出该模块组框。



图 2-5　鼠标左键打开 Continuous 模块组

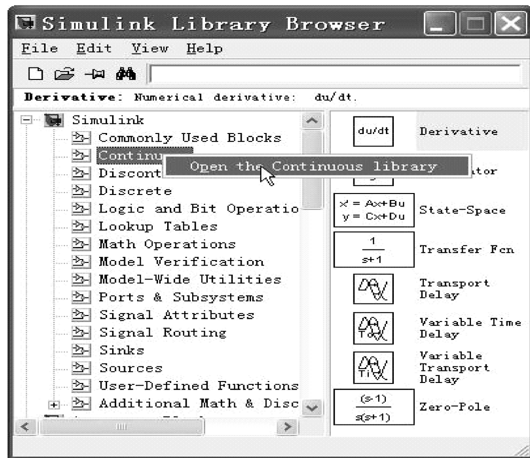


图 2-6　鼠标右键打开 Continuous 模块组

当打开模块组基本模块中间部分的右侧时（即原模块组图标处），将鼠标指向该区域的任何部位，用右键单击后，即弹出如图 2-7 所示的对话框。若执行该框中的【Go up a level】命令，则打开模块组的模块图标即刻消失并恢复到图 2-1 所示的界面。

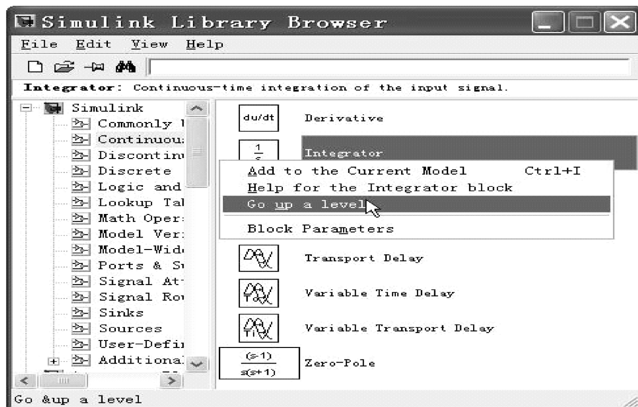


图 2-7　单击鼠标右键弹出对话框

2.2.2　Simulink 7.0 功能模块的分类及其用途

Simulink7.0 有多类基本模块库：①通用模块组（Commonly Used Blocks）；②连续系统模块组（Continuous）；③断续模块组（Discontinuities）；④离散模块组（Discrete）；⑤逻辑与位操作模块组（Logic and Bit Operations）；⑥表格查询模块组（Lookup Tables）；⑦数学运算模块组（Math Operations）；⑧模型检测模块组（Model Verification）；⑨模型的充分使用模块组（Model – Wide Utilities）；⑩端口与子系统模块组（Ports & Subsystems）；⑪信号属性模块组（Signal Attributes）；⑫信号传输选择模块组（Signal Routing）；⑬输出模块组（Sinks）；⑭信号源模块组（Sources）；⑮用户自定义函数模块组（User – Defined Functions）；⑯附加离散模块组（Additional Discrete）；⑰附加增减运算模块组（Additional Math：

Increment/Decrement)。

现在来介绍通用模块组、连续系统模块组、数学运算模块组、输出模块组 4 类基本模块库中的模块及其用途。

1. 通用模块组（Commonly Used Blocks）**及其用途**

通用模块组如图 2-8 所示。图中显示有工具栏与状态栏，在介绍其他模块组及其图标的图中将隐藏工具栏与状态栏。Simulink 7.0 的通用模块组共有 22 个基本模块。表 2-1 列出了这个子模块组中所有标准基本模块的名称与用途。

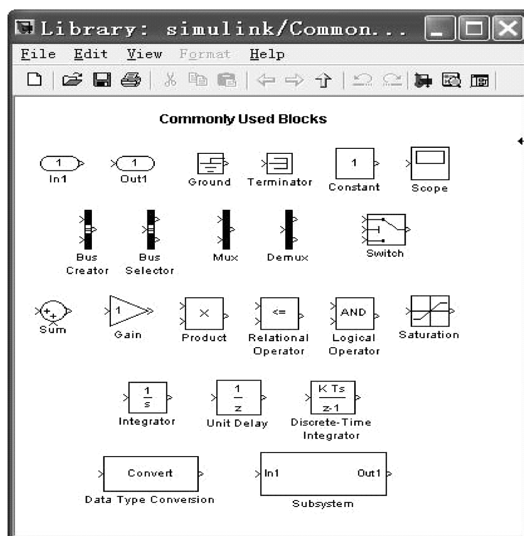


图 2-8　通用模块组（Commonly Used Blocks）

表 2-1　通用模块组的名称与用途

模块名称	模 块 用 途	模块名称	模 块 用 途
Bus Creator	信号总线生成器	Data Type Conversion	数据类型转换模块
Bus Selector	信号总线选择器	Product	乘积运算模块
Demux	分路器（一路信号分解成多路信号）	Relational Operator	比较运算模块
Discrete－Time Integrator	离散时间积分模块	Saturation	限幅的饱和特性模块
		Scope	示波器模块
Gain	增益模块	Subsystem	子系统模块
Ground	接地模块	Sum	计算代数和模块
In1	输入端口模块	Switch	多路开关（当第二个输入端信号大于临界值时，输出第一个输入端的信号，否则输出第三个输入端的信号）
Integrator	积分模块		
Logical Operator	逻辑运算模块		
Mux	混路器（将多路信号混合成一路信号）	Terminator	信号终结模块
Out1	输出端口模块	Unit Delay	单位延迟（对采样信号保持，延迟一个采样周期）器
Constant	常量输入模块		

2. 连续系统模块组（Continuous）**及其用途**

连续系统模块组如图 2-9 所示。Simulink 7.0 的连续系统模块组包括连续时间线性系统

与连续时间延迟两种，共有 8 个基本模块。表 2-2 列出了这个子模块组中所有标准基本模块的名称与用途。

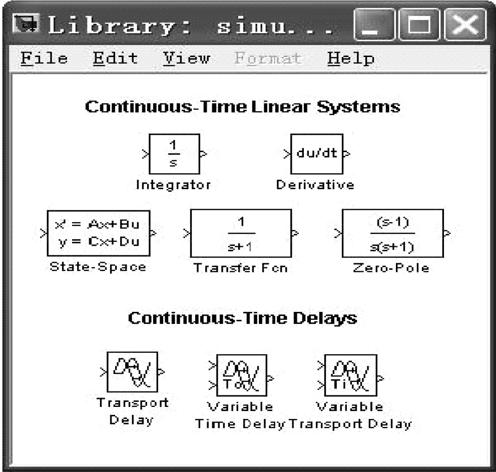


图 2-9 连续系统模块组（Continuous）

表 2-2 连续系统模块组的名称与用途

模块名称	模块用途
Derivative	微分模块
Integrator	积分模块
State – Space	线性状态空间模型模块
Transfer Fcn	线性传递函数模型模块
Transport Delay	时间延迟（在模块内部参数中设置）模块
Variable Time Delay	可变时间延迟模块
Variable Transport Delay	可变时间延迟（用输入信号来定义）模块
Zero – Pole	零极点形式模型模块

3. 数学运算模块组（Math Operations）及其用途

数学运算模块组如图 2-10 所示。Simulink 7.0 的数学运算模块组有 30 个基本模块。表 2-3 列出了数学运算模块组中所有基本模块的名称与用途。

表 2-3 数学运算模块组的名称与用途

模块名称	模块用途	模块名称	模块用途
Abs	绝对值或求模（对复数）模块	Polynomial	多项式运算模块
Add	信号求和模块	Product	乘积运算模块
Algebraic Constraint	代数约束（计算输入信号为零时的状态值）模块	Product of Elements	多元求积模块
Assignment	分配器	Real – Imag to Complex	由实部与虚部计算复数模块
Bias	偏压模块	Reshape	矩阵的重新定维模块
Complex to Magnitude – Angle	计算复数幅值与相角模块	Rounding Function	取整模块
Complex to Real – Imag	计算复数实部与虚部模块	Sign	符号函数模块
Divide	乘除器	Sine WaveFunction	正弦波模块
Dot Product	计算点积（内积）模块	Slider Gain	可变增益模块
Gain	增益模块	Subtract	信号求差模块
Magnitude – Angle to Complex	由幅值与相角计算复数模块	Sum	计算代数和模块
Math Function	数学运算函数模块	Sum of Elements	多元求和模块
Matrix Concatenate	矩阵级联模块	Trigonometric Function	计算三角函数模块
MinMax	计算极大值与极小值模块	Unary Minus	单元减法模块
MinMax Running Resettable	可调极大值与极小值模块	Weighted Sample Time Math	加权数学采样时间封装模块

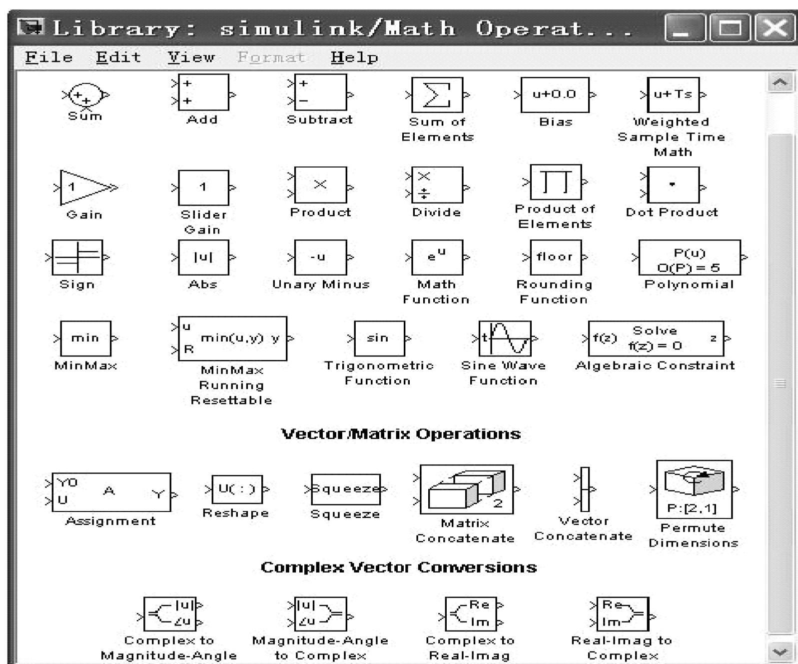


图 2-10　数学运算模块组（Math Operations）

4. 输出模块组（Sinks）及其用途

输出模块组如图 2-11 所示。Simulink 7.0 的输出模块组有 9 个基本模块。表 2-4 列出了输出模块组中所有基本模块的名称与用途。

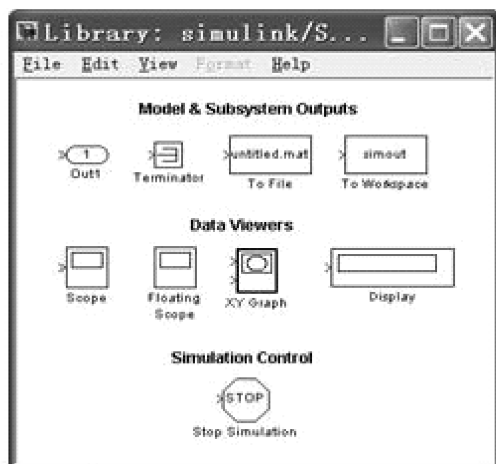


图 2-11　输出模块组（Sinks）

表 2-4　输出模块组的名称与用途

模块名称	模块用途
Floating Scope	浮动示波器模块
Display	实时数字显示模块
Out1	输出端口模块（在端口与子系统模块组已介绍）
Scope	示波器模块
Stop Simulation	仿真终止模块
Terminator	信号终结模块
To File	写文件模块
To Workspace	写入工作空间模块
XY Graph	X－Y 示波器模块

2.3　用 Simulink 建立系统仿真模型

Simulink 完全采用复制标准模块框图的方法来构造动态系统的仿真模型。模型的创建过

程就是从 Simulink 模块库（包括 Simulink 与 SimPowerSystems）中选择所需要的基本功能模块，不断复制到模型窗口“untitled”里，再用 Simulink 的特殊连线方法把多个基本模块连接成描述或代表电路实际结构的仿真模型的过程。

2.3.1　打开模型窗口的方法

“untitled”窗口即无标题的空白窗口（见图 2-2），是用来绘制仿真模型的空白设计区，对电路创建的仿真模型就是在这个空白区里完成的。所以“untitled”也叫做“模型窗口”。建立 Simulink 模型就是在模型窗口里建立一个扩展名为“. mdl”的文件。

打开“untitled”模型窗口有多种方法，现选择两种予以介绍。

（1）从 MATLAB 命令窗口中选取【File】中【New】子菜单的【Model】命令，MATLAB 会打开一个新的“untitled”模型窗口。

（2）如果框图模型已经存在，那么在 MATLAB 命令窗下直接输入模型文件名字（可不带扩展名，但不能有同名的 . m 文件名），便会直接打开该模型框图的模型窗口（但不是名为“untitled”的而是输入模型文件名的模型窗口）。用户可以对它直接进行编辑、修改和仿真。

2.3.2　模块的查找与选择

模块的查找必须首先进入 Simulink 模块库浏览器（见图 2-1）。进入的方法，参见打开“untitled”模型窗口的方式。对上节介绍的 Simulink 四类模块库的组成及其中模块的名称、所属模块组类别、图标与功能应有大致了解与熟悉，以便能及时找到所需要的。关于 SimPowerSystems 参见第 3 章。以下就 Simulink 模块库建立系统仿真模型，对 SimPowerSystems 模块库同样适用。

2.3.3　模块的复制、移动与删除

1. 模块选定（选中）

模块选中是删除、剪切、复制等许多操作的“前导性”操作。用鼠标左键单击待选模块，模块 4 个角处出现小黑块，表示已经选中。如果在选中的模块上再次单击左键，其 4 个角处出现的小黑块消失，表示选中被取消。

2. 模块的复制

模块的复制包括：①从模块库中将模块复制到模型窗口“untitled”里；②在“untitled”窗口里将模块再次复制。

从模块库中复制的操作是：将模块组窗口与模型窗口同时置于荧光屏上。在模块组中将鼠标箭头尖指向待选模块，并单击左键，待选模块 4 个角处出现小黑块，表示已经选中，按住鼠标左键不放将其拖拽到“untitled”窗口里，松开鼠标左键，在“untitled”窗口里就有一个待选模块的模块图标，即复制已完成。

在“untitled”模型窗口里复制模块的方法特别简单：用鼠标指向待复制模块对象，按住鼠标右键不放，将鼠标拖拽到目的地，放开鼠标右键，即可复制一个功能模块。

3. 模块的移动

将光标置于待移动模块图标上，然后按住鼠标左键不放，将模块图标拖拽到目的地，放

开鼠标左键，模块移动完成。注意，模块移动时它与其他模块的连线也随之移动。

4. 模块的删除与粘贴

对选中模块的删除和粘贴操作：按【Delete】键，把选定模块删除；选择【Edit】中的【Cut】命令后，将模块移到 Windows 粘贴板上，再用【Paste】命令粘贴。

5. 改变模块对象的大小

用鼠标选择对象模块图标，再将鼠标移到模块对象四周的控制小块处，鼠标指针将会变成“ ”、“ ”、“ ”或“ ”形状，此时按住鼠标左键不放，拖拽鼠标，待对象图标大小符合要求时即放开鼠标左键，这样就可改变模块对象图标的大小。

6. 改变模块对象的方向

在绘制电路模型即连接模块时，要特别注意模块的输入、输出口与各模块间的信号流向。在 Simulink 中，输入端口位于模块左侧，用来接收信号；输出端口位于模块右侧，用来发送（出）信号。但绘制模型时可能有相反的要求，可按以下操作来实现：用鼠标选中模块，利用“untitled”的主菜单项【Format】，选择【Flip Block】或者直接按【Ctrl + F】键，即可将模块旋转 180 °；选择【Rotate Block】命令，或者直接按【Ctrl + R】键，即可将模块顺时针旋转 90 °。

2.3.4　模块的连接

将构成一个电路的所有模块复制到“untitled”窗口里，在没有用信号线将其连接之前，并不描述一个电路，即不是任何电路模型。必须用信号线将模块图标连成能够描述一电路的所谓电路仿真模型。

1. 信号线的使用

信号线有连接功能模块的作用。按住鼠标的左键，单击模块的输入或输出端口，看到光标变为十字形以后，拖拽十字图形符号到另外一个模块的端口，鼠标指针将变为双十字形状，然后放开左键，于是一根线便将两模块连接起来，连线的箭头表示信号的流向。

2. 信号线折弯

对选中的信号线，按住【Shift】键，再用鼠标左键在要折弯的地方单击一下，或者将鼠标指到线段端头的小黑块上，直到箭头指针变为“ ”，表示折弯点，按住鼠标左键，拖拽线段，即可将线段以转直角的方式折弯。

3. 信号线分支

对选中的信号线，将鼠标指到要引出分支的信号线段上，按住鼠标右键拖拽鼠标，即可拉出分支线段。如果按住鼠标右键，拖拽鼠标还可以拉出非直角线段。

4. 信号线的平行移动

将鼠标指到要平行移动的信号线上，按住鼠标左键不放，鼠标指针变为十字箭头形状，水平或垂直方向拖拽鼠标移到目的位置，放开鼠标左键，移动即完成。

5. 信号线与模块分离

将鼠标指针放在想要分离的模块上，按住【Shift】键不放，再用鼠标把模块拖拽到别处，即可把模块与连接线分离。

6. 信号线的删除

对选中的信号线的删除操作非常简单，按【Delete】键，即可把选中的信号线删除。

2.4　常用 15 个模块内部参数的设置或修改

模块的主要属性是指模块的内部参数设置。将待设置或修改参数的模块拖拽到“untitled”模型窗口里，然后双击其模块的图标，便打开模块内部参数设置对话框，通过设置或修改对话框中的数据便可。将系统仿真经常使用的 15 个功能模块（见图 2-12）从 Simulink 模块库中复制出来存放在常用模块 cymk. mdl 里。

要提请读者注意，这里只重点介绍参数设置对话框中主选项卡（即“Main”）的参数设置内容，其他选项卡中参数，均采用系统默认值，即卡中空白框里字符与数字一般不动。

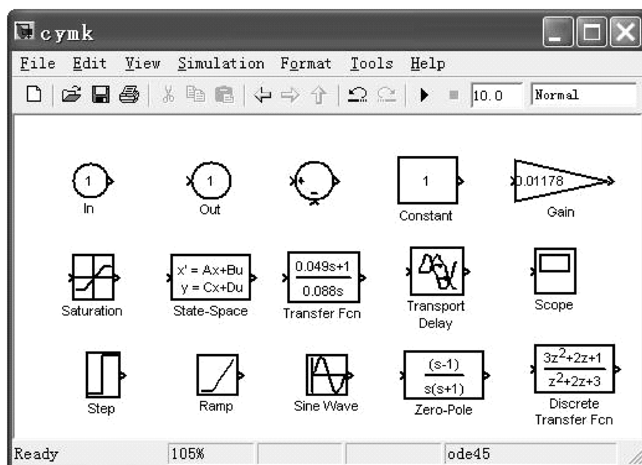


图 2-12　控制系统仿真常用的 15 个模块

1. 输入端口模块 In

在模型中，选中模块 In，双击鼠标左键，便打开 In 参数设置对话框（见图 2-13）。“Main”选项卡中有项目“Port number:”（端口序号）与其下面的文本框里的数字“1”，这表示输入端口模块 In 图标圆框里的顺序数字为“1”（模块的默认设置），将文本框里的数字设置或修改为“2”，图标圆框里的顺序数字也改为“2”。

另外，“Main”选项卡中的项目“Icon display”（插图显示）与其右面列表框里有“Port number”、“Signal name”与“Port number and signal name”三项。当选择“Port number”时，输入端口模块 In 图标下有字符串“In”（模块默认设置），当选择另两项时，图标下没有字符串“In”。

参数设置对话框下部有 4 个（有的只有前 3 个）按钮：【OK】、【Cancel】、【Help】、【Apply】，单击时，分别表示确认、退出、帮助、完成参数设定。参数设置完后，必须单击【Apply】或【OK】按钮以示完成设定或确认。以下均同此。

2. 输出端口模块 Out

在模型中，选中输出端口模块 Out，双击鼠标左键，便打开模块 Out 的参数设置对话框（见图 2-14），“Main”选项卡设置与输入端口模块 In 完全相同。

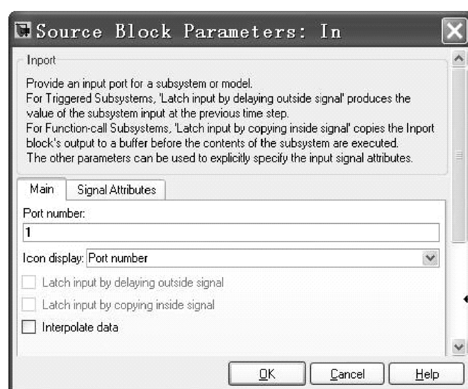


图 2-13　输入端口 In 参数设置对话框

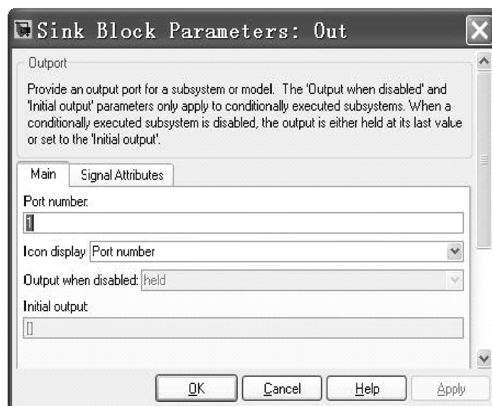


图 2-14　输出端口 Out 参数设置对话框

“Main” 选项卡中项目 “Port number:” (端口序号) 与其下面的文本框里的数字 “1”，这表示输出端口模块 Out1 图标圆框里顺序数字为 “1” (模块默认设置)，将文本框里的数字设置或修改为 “2”，图标圆框里的顺序数字也改为 “2”。

另外，“Main” 选项卡中有项目 “Icon display” 与其右面列表框里 “Port number”、“Signal name” 与 “Port number and signal name” 三项。当选择 “Port number” 时，输出端口模块 Out 图标下有字符串 “Out” (模块默认设置)，当选择另外两项时，图标下没有字符串 “Out”。

3. 计算代数和模块 Sum

打开模块 Sum 的参数设置对话框 (见图 2-15)。“Main” 选项卡中项目 “Icon shape:” 与其右面列表框里的 “round” 或 “rectangular”，表示信号求和模块 Sum 是圆形的或方形的。

另外，“Main” 选项卡中项目 “List of signs:” (信号极性列表) 与其下面文本框里的字符 “| + -”，表示信号求和还是求差，其正负号可根据控制系统实际情况而修改。信号极性列表还可以设置成对多个信号求其代数和。

“Main” 选项卡中还有一项 “Sample time”，则采用系统的默认值。

4. 常量输入模块 Constant

打开模块 Constant 的参数设置对话框 (见图 2-16)。“Main” 选项卡中的项目 “Constant value:” (输入常量值) 与其下面文本框里的数字 “1”，即表示要输入的常量值 “1”，也可用鼠标将数字选中进行修改。

“Main” 选项卡中的其他项目均采用系统的默认值，即选项卡中空白框里的字符与数字、已经勾选或没有勾选的项目一般不动。

5. 增益模块 Gain

打开模块 Gain 的参数设置对话框 (见图 2-17)。“Main” 选项卡中的项目 “Gain:” (增益) 与其下面文本框里的数字 “0.01178”，即表示要设定的增益值，同样可用鼠标将数字选中进行修改。

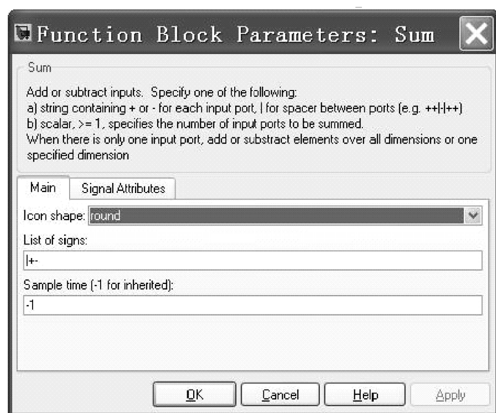


图 2-15　信号求和模块 Sum

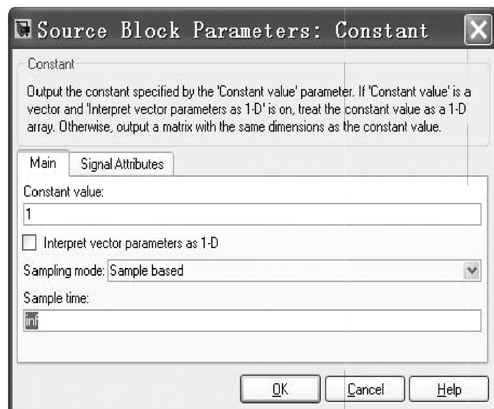


图 2-16　常量输入模块 Constant

“Main”选项卡中的其他项目均采用系统的默认值，即选项卡中空白框里的字符与数字、已经勾选或没有勾选的项目一般不动。

6. 限幅的饱和特性模块 Saturation

打开模块 Saturation 的参数设置对话框（见图 2-18）。“Main”选项卡中的项目“Upper limit:”（上限）与其下面文本框里的数字“0.5”，即表示设定的限幅饱和特性的上限值，选项卡中的项目“Lower limit:”（下限）与其下面文本框里的数字“－0.5”，即表示设定的限幅饱和特性的下限值，当然均可用鼠标将数字选中进行修改。

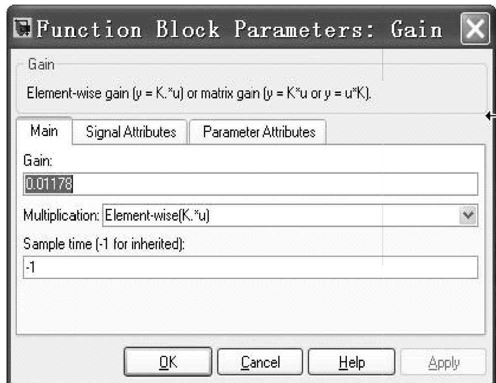


图 2-17　增益模块 Gain

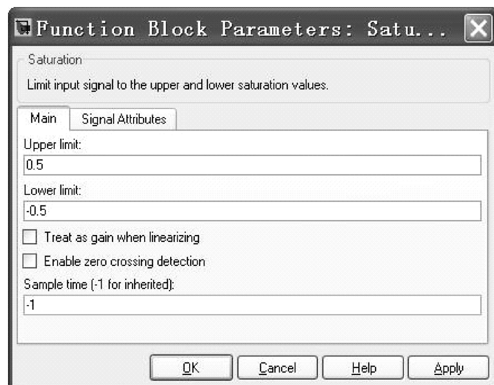


图 2-18　限幅的饱和特性模块 Saturation

“Main”选项卡中的其他项目均采用系统的默认值，即选项卡中空白框里的字符与数字、已经勾选或没有勾选的项目一般不动。

7. 线性状态空间模型模块 State－Space

打开模块 State－Space 参数设置对话框（见图 2-19）。项目“State Space”（状态空间）下有状态空间模型表达式 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$。在项目“Parameters”（参数）中，分别输入参数 A、B、C、D 的值，其他项目采用系统的默认值。

8. 线性传递函数模型模块 Transfer Fcn

线性控制系统传递函数 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{b_1 s^m+b_2 s^{m-1}+\cdots+b_{m+1}}{a_1 s^n+a_2 s^{n-1}+\cdots+a_{n+1}}=\dfrac{\boldsymbol{num}(s)}{\boldsymbol{den}(s)}$，用分子、分母多项式系数构成两个向量 $\boldsymbol{num}=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m]$ 与 $\boldsymbol{den}=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$ 表示系统。

打开模块 Transfer Fcn 参数设置对话框（见图 2-20）。在项目“Parameters”（参数）下，在“Numerator coefficient:”（分子系数）下的文本框里输入或修改向量 $\boldsymbol{num}=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m]$，在“Denominator coefficient:”（分母系数）下的文本框里输入或修改向量 $\boldsymbol{den}=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$，其他项目采用系统的默认值。

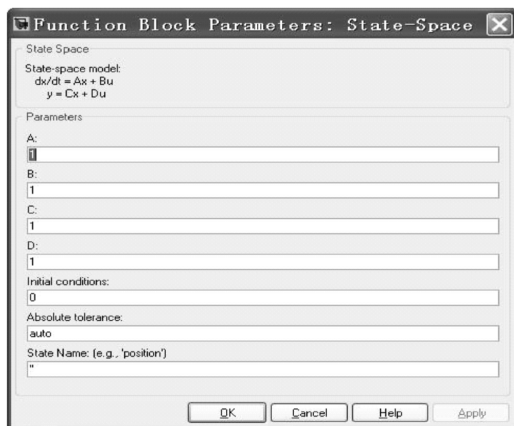


图 2-19　线性状态空间模型模块 State－Space

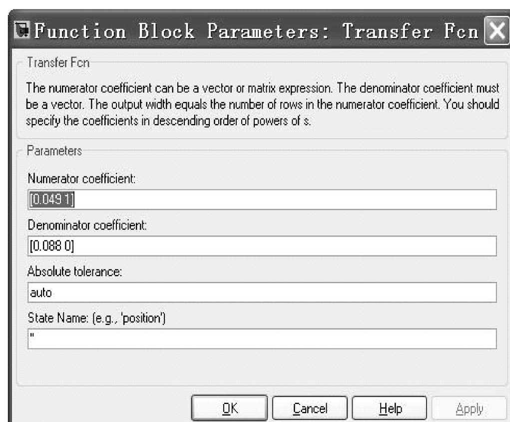


图 2-20　线性传递函数模型模块 Transfer Fcn

9. 指定时间延迟（在模块内部参数中设置）模块 Transport Delay

打开模块 Transport Delay 参数设置对话框（见图 2-21）。在项目“Parameters”（参数）下，仅需在“Time delay”文本框里输入或修改延迟时间的数值即可，其他项目均采用系统的默认值。

10. 示波器模块 Scope

打开示波器 Scope 模块窗口及其工具栏（见图 2-22）。其中，一般的工具栏按钮操作见名知意，唯有示波器的参数设置按钮操作是我们所关注的。

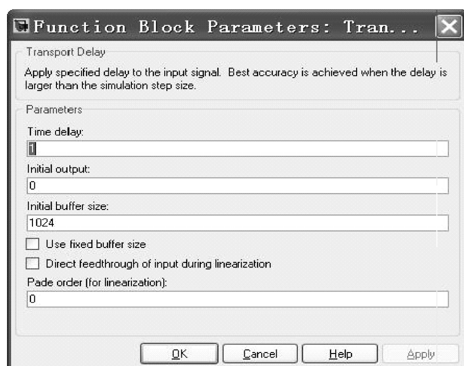


图 2-21　时间延迟模块 Transport Delay

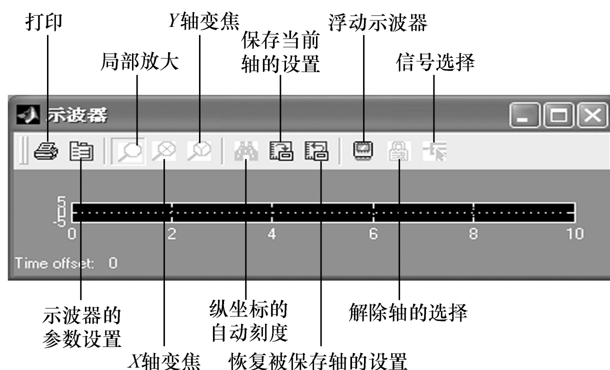


图 2-22　示波器 Scope 窗口及其工具栏

示波器参数设置对话框（见图 2-23）中有两个选项卡，图 2-23a 为选项卡“General”（一般参数设置），图 2-23b 为选项卡“Data history”（数据存储参数设置）。

图 2-23a 中的参数设置主要是针对示波器窗口的坐标系与曲线显示方面的。“Axes”栏下的“Number of axes”为示波器窗口内的坐标系个数，默认设置为 1；当设置为 2 时，相应模型结构图中示波器图标的输入端就变为两个输入端口。“Time range”栏为信号显示从 0 开始的时间区间，默认设置为 10，若设置为 n，则信号显示的时间区间为 $[0, n]$；“Tick labels”列表框中有三个选项：“all”为坐标系标注标志“Time offset 0”，“none”为坐标系不标注标志“Time offset 0”，“bottom axis only”为坐标系底部标注标志“Time offset 0”，实际上与“all”选项相同。“floating scope”复选框被勾选时，则示波器为游离状态，模型结构图中示波器图标的输入端与系统模型的连线会断开。



图 2-23　示波器参数设置对话框

“Sampling”列表框中有两个选项：其一，“Decimation”设置数据的显示频度，1 为默认设置，表示每点都显示；设置为 n 时（在列表框右侧的文本框内输入），则为隔（$n-1$）点显示一次；其二，“Sample time”设置显示点的采样时间间隔，默认设置为 0，意为显示连续信号；设置为 -1 时表示显示方式由输入信号决定。

图 2-23b 的参数设置，主要是针对示波器的数据存储与传送方面的。“Limit data points to last”栏设置缓冲区存储数据的长度，默认设置为 5000。若输入的数据过多，则会自动清除原有的数据。“Save data to workspace”栏用来把示波器缓冲区存储的数据送到 MATLAB 工作空间，默认设置为不被勾选，意为不送数据到 MATLAB 工作空间。“Variable name”是存储数据的变量名，可以设置，也可以用默认设置名“ScopeData”。“Format”为三种保存数据的格式选择：Structure with time（带时间的构架）、Structure（构架）、Array（数组）。

还可对示波器显示的曲线添加汉字标题，其操作是：将鼠标指向示波器曲线区，单击其右键，选中并单击弹出框的【Axes properties】命令，在又一弹出框的“Title（'% < Signal Label >' replaced by signal name）：”下的空白框内添加曲线的汉字名称，单击【OK】按钮即可。

11. 阶跃信号输入模块 Step

打开阶跃信号输入模块 Step 的参数设置对话框（见图 2-24）。对话框中参数设置有 4 个：“Step time”为阶跃信号产生的时间；“Initial value”为阶跃信号初始值；“Final value”

为阶跃信号终了值；“Sample time”为采样时间。可以填入数据如图 2-24 所示，再单击【OK】按钮，即完成参数的设定。

12. 斜坡信号输入模块 Ramp

打开斜坡信号 Ramp 的参数设置对话框（见图 2-25）。对话框中参数有 3 个：“Slope”为斜坡信号斜率；“Start time”为斜坡信号开始作用的时间；“Initial output”为斜坡信号初始输出值。可以填入数据如图 2-25 所示，再单击【OK】按钮，即完成参数的设定。关于斜坡信号斜率“Slope”，举一例说明其含义。例如一电机拖动系统，从电机空载加载到额定负载（$I_d=55A$），即从“Start time”的“0”秒到满载时的“0.55”秒，对应着斜坡信号的上升斜率为 55/0.55 即 100。

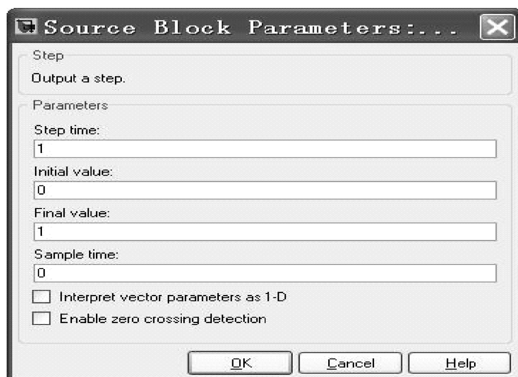


图 2-24　阶跃信号输入模块 Step

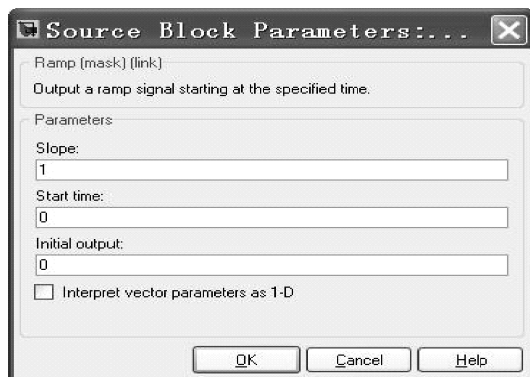


图 2-25　斜坡信号输入模块 Ramp

13. 正弦波信号输入模块 Sine Wave

打开正弦波信号 Sine Wave 的参数设置对话框（见图 2-26）。

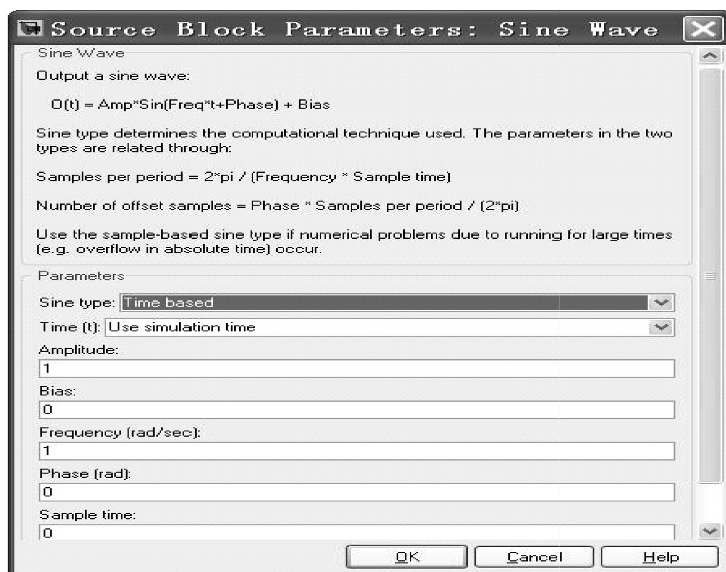


图 2-26　正弦波信号输入模块 Sine Wave

在正弦类型（Sine type）列表框中有时间的（Time based）与采样的（Sample based）两种可选，在时间（Time）列表框中有用于仿真时间的（Use simulation time）与用于外部信号的（Use external signal）两种可选。对话框中参数有 5 个："Amplitude" 为正弦波信号的振幅；"Bias" 为正弦波信号的偏移；"Frequency" 为正弦波信号的角频率（rad/s）；"Phase" 为正弦波信号的初相角；"Sample time" 为正弦波信号的采样时间。可以填入数据如图 2-26 所示，再单击【OK】按钮，即完成参数的设定。

14. 零极点形式模型模块 Zero Pole

连续系统传递函数表达式可用系统增益、系统零点与极点来表示，这叫做系统零极点增益模型，即有

$$G(s) = k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

式中，k 为系统增益；z_1、z_2、…、z_m 为系统零点；p_1、p_2、…、p_n 为系统极点。

离散系统传递函数也可用系统增益、系统零点与极点来表示。

打开零极点形式模型模块 Zero Pole 的参数设置对话框（见图 2-27）。对话框中参数："Zeros" 为模型的零点值；"Poles" 为模型的极点值；"Gain" 为模型的增益值。可以填入数据如图 2-27 所示，再单击【OK】按钮，即完成参数的设定。

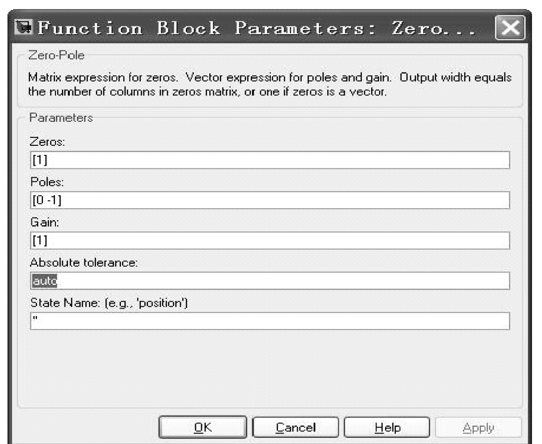


图 2-27 零极点形式模型模块 Zero Pole

15. 离散传递函数模型模块 Discrete Transfer Fcn

与线性连续控制系统传递函数 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$ 相类似，线性定常离散系统（脉冲）传递函数定义为系统输出采样信号的 z 变换 $C(z)$ 与输入采样信号的 z 变换 $R(z)$ 之比，记作

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_1z^m + b_2z^{m-1} + \cdots + b_{m+1}}{a_1z^n + a_2z^{n-1} + \cdots + a_{n+1}} = \frac{\boldsymbol{num}(z)}{\boldsymbol{den}(z)}$$

即可用分子、分母关于 z 的多项式系数构成的两个向量 $\boldsymbol{num}=[b_1, b_2, \cdots, b_m]$ 与 $\boldsymbol{den}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 来表示系统。

打开离散传递函数模型模块 Discrete Transfer Fcn 的参数设置对话框（见图 2-28）。对

话框中参数有 3 个："Numerator coefficient" 为模型的分子关于 z 的多项式系数；"Denominator coefficient" 为模型的分母关于 z 的多项式系数；"Sample time" 为模型的采样时间。可以填入数据如图 2-28 所示，再单击【OK】按钮，即完成参数的设定。

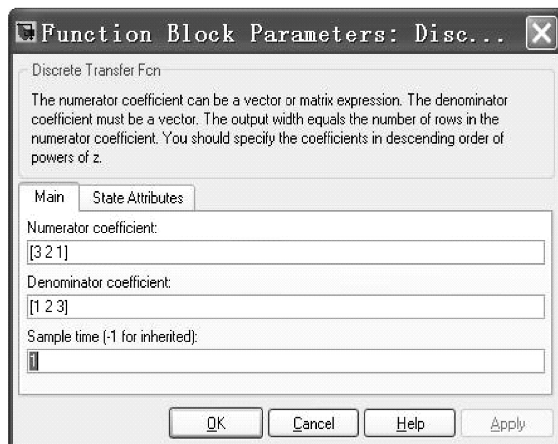


图 2-28　离散传递函数模型模块 Discrete Transfer Fcn

2.5　用 Simulink 建立系统仿真模型实例

在学习并熟悉了 Simulink 7.0 功能模块组内容、提取路径、模块的各种操作与其参数设置后就可以创建控制系统的仿真模型。现在举两例创建模型作为学习本章小结。

【例 2-1】 以阶跃信号模块作输入、以示波器模块作输出，创建单闭环调速系统模型。

解： 创建单闭环调速系统模型 sx2L0201.mdl，如图 2-29 所示。细节请参见【例 13-1】。

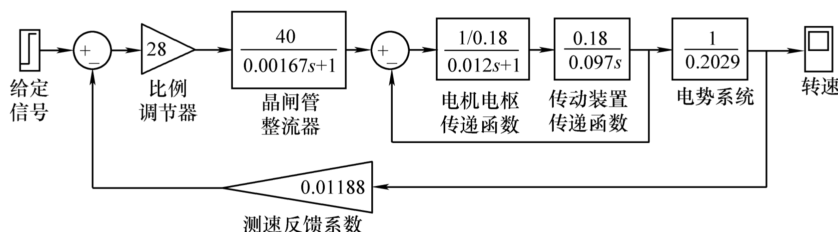


图 2-29　K_p = 28 时单闭环调速系统模型 sx2L0201.mdl

【例 2-2】 以阶跃信号模块作输入、以示波器模块作输出，创建双闭环调速系统模型。

解： 创建双闭环调速系统模型 sx2L0202.mdl，如图 2-30 所示。细节请参见【例 13-2】。

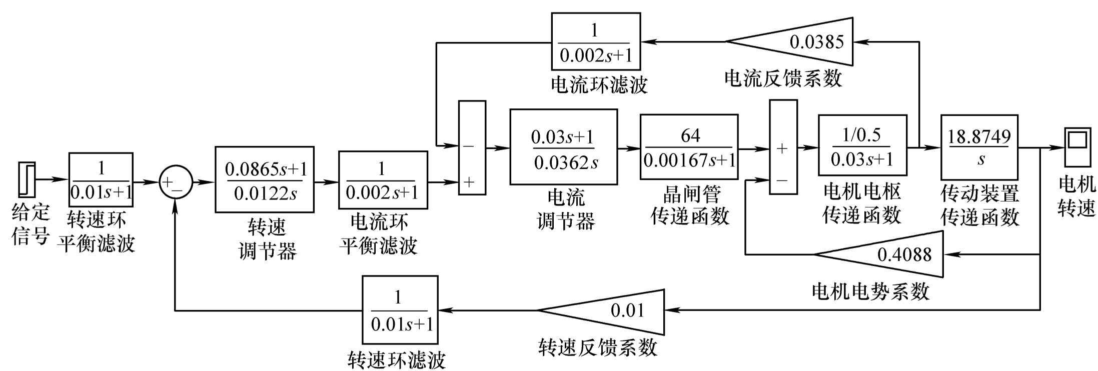


图 2-30　双闭环调速系统模型 sx2L0202. mdl

第 3 章　常用电气系统（SimPowerSystems）实体图形化仿真模型

在 Simulink 7.0 里，还有一个电气系统“SimPowerSystems”即实（际物）体图形化仿真模型库与数学模型库相对应。SimPowerSystems 是实际工程里物理实体的图形符号模型，例如，代表电阻、电容、电源、电机、触发器与晶闸管整流装置、电压表、电流表等实物的特有图形符号，将这些图形符号连接就能成为一个电路、一个装置或一个系统。它不是真实物体的物理模型，而是实际物体的图形化模型，且具有实际物体的特质属性与特征，还可以与数学模型模块混合创建 .mdl 模型。这种实体图形化模型的仿真（有文献称为按系统原理图进行的仿真）更具有实用价值与低成本。

本来“SimPowerSystems”已在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中作了介绍，但要指出，多年来国内各种文献都将 SimPowerSystems 译成电力系统模型，这给很多人以误导。笔者认为：①这有与强电领域的电力系统相混淆之弊；②就“SimPowerSystems”里的内容而言，强电领域里电力系统部分各种仿真模型仅仅只占很小的比例，大部分仿真模型对应着国内通常说的电气工程系统的各种装置，故译成电气系统模型。为学习“SimPowerSystems”适用范围的强大功能，还要就本书示例模型所使用的模块及其相关内容稍后仔细展开予以介绍。

3.1　电气系统（SimPowerSystems）实体图形化模型库简介

进入 Simulink Library Browser 浏览器后，移动图中左侧两层目录结构树右侧的滑动游标向下，即可看到电气系统（SimPowerSystems）在其中（见图 3-1），右击将其打开就可看到 Library：powerlib 实体图形化模型库的 7 个模块组与其图形用户界面（见图 3-2）。MATLAB 7.5 里的实体图形化仿真模型 SimPowerSystems 升级为 4.5 版。本节仅接触并认识 5 个常用模块组的图标及其名称，以建立初步印象。

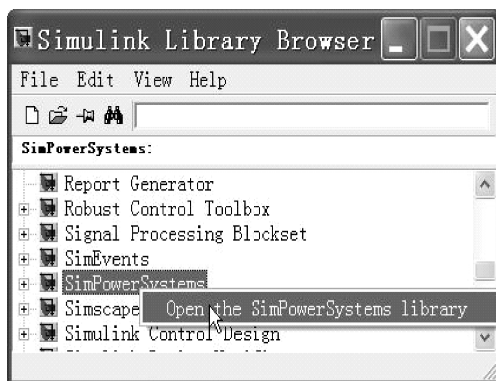


图 3-1　电气系统（SimPowerSystems）

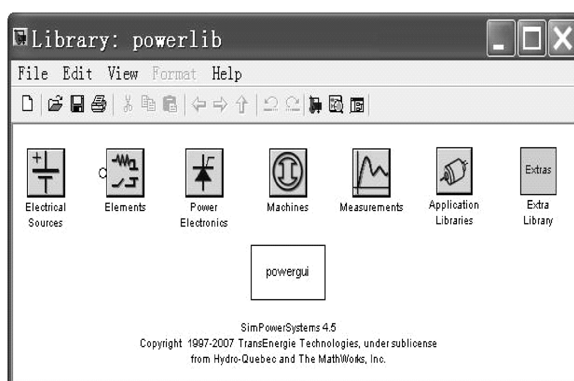


图 3-2　SimPowerSystems 的 7 个模块组

3.1.1　电源（Electrical Sources）模块组

双击图 3-2 中的 Electrical Sources 图标即可打开该模块组，如图 3-3 所示。几个常用模块的名称与用途列于表 3-1。

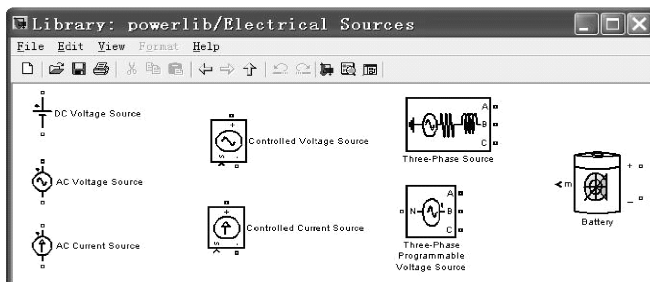


图 3-3　电源（Electrical Sources）模块组

表 3-1　电源（Electrical Sources）模块组的模块名称与用途

模 块 名 称	模 块 用 途
DC Voltage Source	直流电压源
AC Voltage Source	交流电压源
AC Current Source	交流电流源
Controlled Voltage Source	受控电压源
Controlled Current Source	受控电流源
Three – Phase Source	三相电源

3.1.2　电器元件（Elements）模块组

双击图 3-2 中的 Elements 图标即可打开该模块组，如图 3-4 所示。该模块组包括 Elements（电路元件）、Lines（传输线）、Circuit Breakers（电路断路器）、Transformers（变压器）等 4 个二级组的 30 多个模块。几个常用模块名称与用途列于表 3-2。

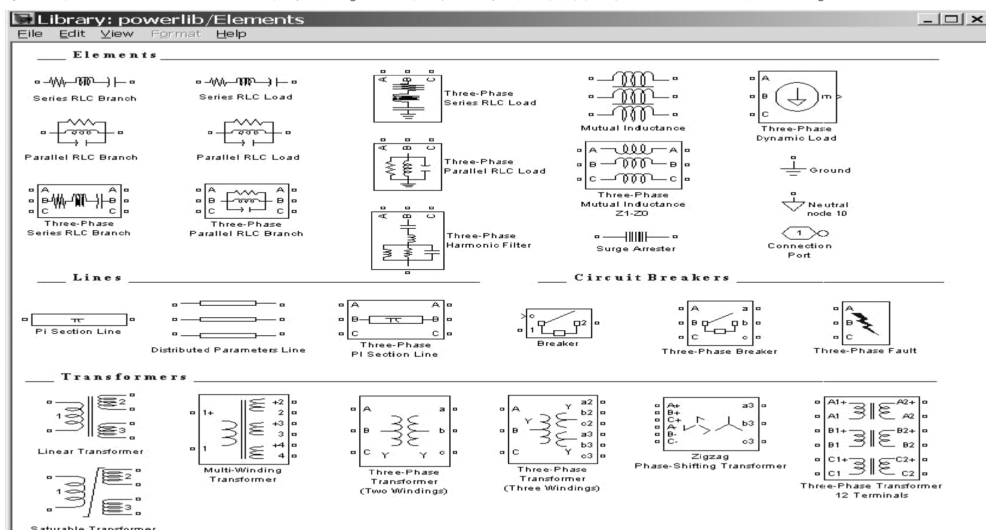


图 3-4　电器元件（Elements）模块组

表 3-2　电器元件（Elements）模块组的模块名称与用途

模 块 名 称	模 块 用 途
12 Terminals Three – Phase Transformer	12 端子三相变压器
Breaker	断路器
Connection Port	连接端口
Ground	接地端
Linear Transformer	线性变压器
Multi – Winding Transformer	多绕组变压器
Mutual Inductance	互感线圈（耦合电感）
Neutral	等电位接点
Parallel RLC Branch	RLC 并联电路
Parallel RLC Load	RLC 并联负载
Pi Section Line	π 形参数传输线
Saturable Transformer	饱和变压器
Series RLC Branch	RLC 串联电路
Series RLC Load	RLC 串联负载
Three – Phase Breaker	三相断路器
Three – Phase Fault	三相故障断路器
Three – Phase Mutual Inductance	三相互感线圈
Three – Phase Parallel RLC Branch	三相 RLC 并联电路
Three – Phase Parallel RLC Load	三相 RLC 并联负载
Three – Phase Section Line	三相分布参数传输线
Three – Phase Series RLC Branch	三相 RLC 串联电路
Three – Phase Series RLC Load	三相 RLC 串联负载
Three – Phase Transformer（Three Windings）	三绕组三相变压器
Three – Phase Transformer（Two Windings）	二绕组三相变压器
Three – Phase Transformer Inductance Matrix Type（Three Windings）	三相（3 芯柱或 5 芯柱）三绕组电压互感器
Three – Phase Transformer Inductance Matrix Type（Two Windings）	三相（3 芯柱或 5 芯柱）二绕组电压互感器

3.1.3　电力电子元件（Power Electronics）模块组

Power Electronics 模块组在电力拖动控制系统仿真中用到。双击图 3-2 中的 Power Electronics 图标即可打开该模块组。几个常用模块的名称与用途列于表 3-3。

表 3-3　电力电子元件（Power Electronics）模块组的名称与用途

模 块 名 称	模 块 用 途
Diode	二极管
Thyristor	晶闸管简化模型
Detailed Thyristor	晶闸管精细模型

（续）

模块名称	模块用途
Gto	门极关断晶闸管
IGBT	反并联 RC 缓冲电路的绝缘栅双极型晶体管
Mosfet	电力场效应晶体管
Ideal Switch	理想开关
IGBT/Diode	反并联二极管的绝缘栅双极型晶体管
Universal Bridge	通用整流桥
Three - Level Bridge	三电平整流桥

3.1.4 电机（Machines）模块组

Machines 模块组在电机拖动与控制系统仿真中用到。双击图 3-2 中的 Machines 图标即可打开该模块组。该模块组包括 Synchronous Machine（同步电机）、DC Machine（直流电机）、Asynchronous Machine（异步电机）等。几个常用模块的名称与用途列于表 3-4。

表 3-4 电机（Machines）模块组的模块名称与用途

模块名称	模块用途
Simplified Synchronous Machine pu Units	简化同步电机（标幺值单位）
Simplified Synchronous Machine SI Units	简化同步电机（标准单位）
Permanent Magnet Synchronous Machine	永磁式同步电机
DC Machine	直流电机
Synchronous Machine pu Fundamental	同步电机基本模型（标幺值单位）
Synchronous Machine pu Standard	同步电机标准模型（标幺值单位）
Synchronous Machine SI Fundamental	同步电机基本模型（标准单位）
Asynchronous Machine pu Units	异步电机（标幺值单位）
Asynchronous Machine SI Units	异步电机（标准单位）
Single Phase Asynchronous Machine	单相异步电机

3.1.5 电气测量仪表（Measurements）模块组

双击图 3-2 中的 Measurements 图标即可打开该模块组。几个常用模块的名称与用途列于表 3-5。

表 3-5 电气测量仪表（Measurements）模块组的模块名称与用途

模块名称	模块用途
Current Measurement	电流测量
Voltage Measurement	电压测量
Impedance Measurement	阻抗测量
Multimeter	万用表
Three - Phase V - I Measurement	三相电压—电流测量仪

在 Measurements 模块组里还有三个二级子模块组，即 Continuous Measurements、Discrete Measurements 与 Phasor Measurements。其中连续系统测量（Continuous Measurements）子模块组的几个常用模块名称与用途列于表 3-6。

表 3-6　连续系统测量（Continuous Measurements）子模块组的模块名称与用途

模 块 名 称	模 块 用 途
Total Harmonic Distortion	总谐波畸变率
RMS	有效值测量
Mean Value	平均值测量
Mean Value（linear）	线性平均值测量
Fourier	傅里叶分析
3 – Phase Sequence Analyzer	三相相序分析
Active & Reactive Power	有功与无功功率测量
3 – Phase Instantaneous Active & Reactive Power	三相瞬时功率因数检测

3.2　基本电路元件的仿真模型

这里的基本电路元件是指电源与 RLC 元件。

3.2.1　普通电源

在此介绍三个常用的直流电压源（DC Voltage Source）、交流电压源（AC Voltage Source）、三相电源（Three – Phase Source）（见图 3-5）的属性参数设置，这是模块使用的基本操作技术。这三个模块元件提取的路径都是 Simulink \ SimPoweSystem \ Electrical Sources。

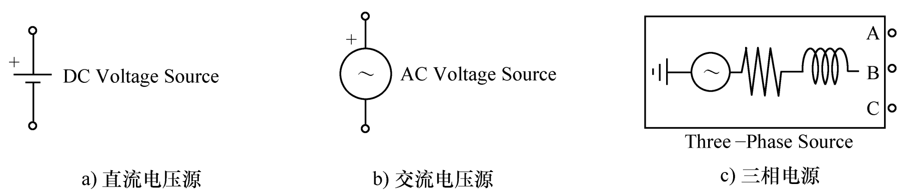


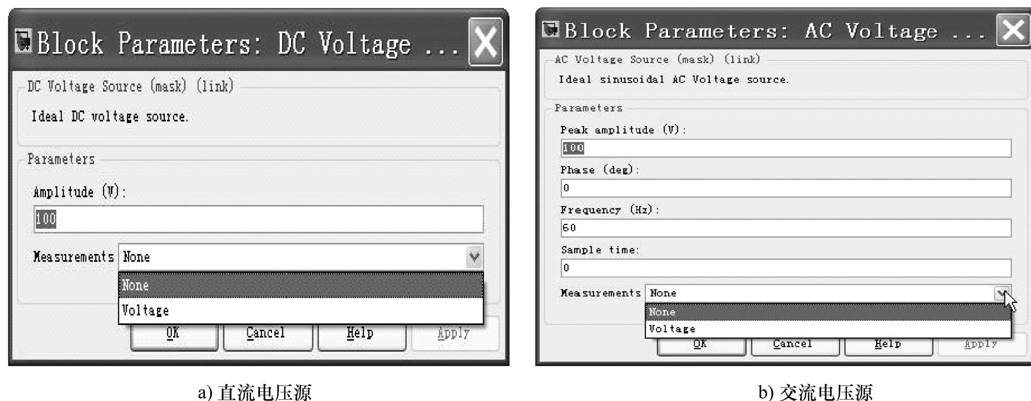
图 3-5　电源（Electrical Sources）模块组部分模块图标

1. 直流电压源（DC Voltage Source）

在仿真模型中双击该模块，便弹出其属性参数设置对话框，如图 3-6a 所示。有两项设置，在“Amplitude”栏下输入其直流电压幅值，单位为 V，在测量“Measurements”列表框里选择测量电压还是不测量电压。

2. 交流电压源（AC Voltage Source）

正弦交流电压的表达式为 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$。模块的参数设置对话框如图 3-6b 所示。参数“Peak amplitude”是正弦电压峰值 U_m，单位为 V；参数“Phase”是初相角 φ，单位



a) 直流电压源　　b) 交流电压源

图 3-6　直、交流电压源属性参数设置对话框

为度（°）；参数“Frequency”是角频率 ω 对应的频率 f（$\omega=2\pi f$），单位为 Hz；参数“Sample time”是采样时间，单位为 s，默认值 0 表示该电源为连续源；在测量“Measurements”列表框里选测量电压还是不测量电压。

3. 三相电源（Three－Phase Source）

三相对称正弦电压表达式为 $u_A=U_m\sin(\omega t+\varphi)$、$u_B=U_m\sin(\omega t+\varphi-120°)$、$u_C=U_m\sin(\omega t+\varphi-240°)$。

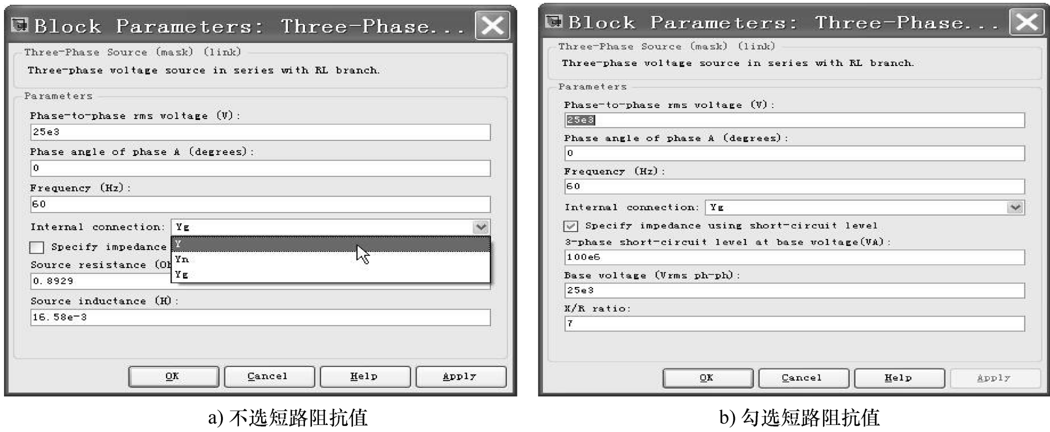
在仿真模型中双击图 3-5c 图标，便弹出其参数设置对话框，如图 3-7 所示。参数“Phase－to－phase rms voltage”是相电压（A 相、B 相、C 相）有效值，单位为 V；“Phase angle of phase A ”是 A 相的相角，单位为（°）；“Frequency”是频率 f（$\omega=2\pi f$），单位为 Hz；在“Internal connection”（连接方式）列表框里选 Y、Yn 或 Yg 型，Y 型为中性点不接地，Yn 型为中性点经接地电阻或消弧线圈接地，Yg 型为中性点直接接地。“Specify impedance using short－circuit level”是短路阻抗值，为可勾选参数，若不选，如图 3-7a 所示。“Source resistance”是三相电源电阻，单位为 Ω；“Source inductance”是三相电源电感，单位为 H。若勾选，如图 3-7b 所示。“3－phase short－circuit level at base voltage”是基本电压下的三相短路容量，单位为 VA；“Base voltage”是相电压有效值，单位为 V；“X/R ratio”是电抗/电阻比，即 $\tan\varphi=X/R$。

参数设置对话框下部有四个按钮：【OK】、【Cancel】、【Help】、【Apply】，单击时，分别表示确认、退出、帮助、完成参数设定。参数设置完后，必须单击【Apply】或【OK】按钮以示完成设定或确认。以下均同此。

3.2.2　受控电源

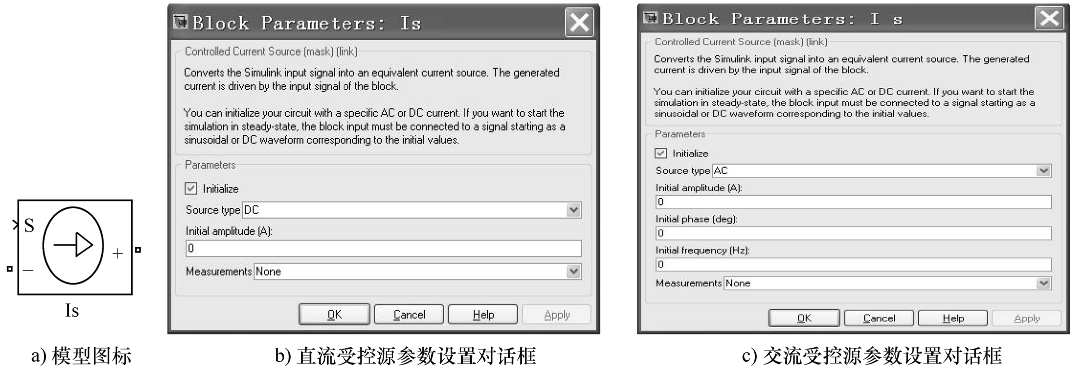
1. 受控电流源（Controlled Current Source）

模块图标如图 3-8a 所示，其直流与交流参数设置对话框分别如图 3-8b、c 所示。首先必须勾选“Initialize”（初始化），在“Source type”（电源类别）里选 DC（直流）时，只需设置“Initial amplitude”（初始直流值）；在如图 3-8c 所示的“Source type”（电源类别）里选 AC（交流）时，要设置“Initial amplitude（A）”（初始电流值）、“Initial phase（deg）”（初始相位值）、“Initial frequency（Hz）”（初始频率值）等三个数值。



a) 不选短路阻抗值　　b) 勾选短路阻抗值

图 3-7　三相电源属性参数设置对话框



a) 模型图标　　b) 直流受控源参数设置对话框　　c) 交流受控源参数设置对话框

图 3-8　受控电流源（Controlled Current Source）模块

2. 受控电压源（Controlled Voltage Source）

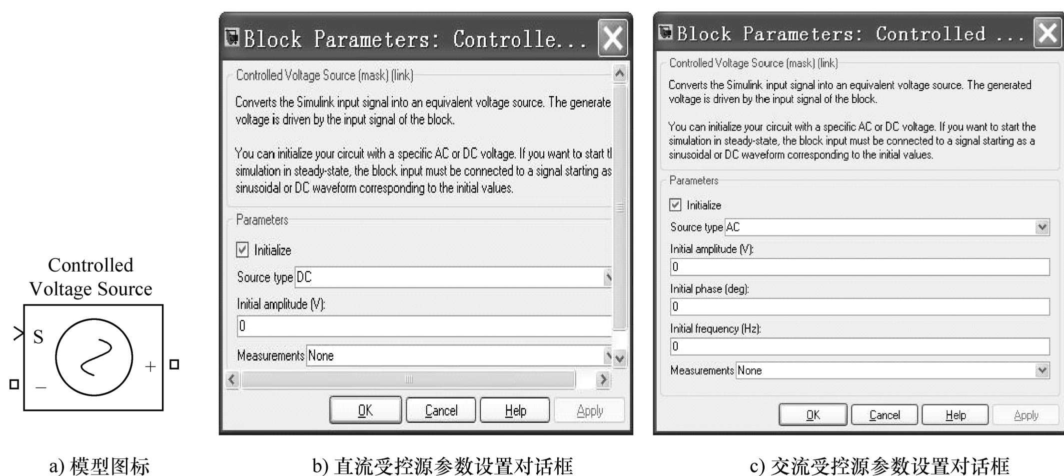
在直流或交流的受控源电路中还要用到受控电压源（Controlled Voltage Source）模块。模块图标如图 3-9a 所示，其直流与交流参数设置对话框分别如图 3-9b、c 所示。参数设置与受控电流源（Controlled Current Source）模块相同。

3.2.3　RLC 元件

电阻、电感、电容是电路的三个基本元件。

1. RLC 元件图标

RLC 元件图标如图 3-10 所示，有串联（Series）与并联（Parallel）两种电路形式，又有支路（Branch）与负载（Load）两类之分。需要特别指出，当选择不同时，即电阻、电感、电容、电阻电感、电阻电容、电感电容，可在图 3-11 中只设置一个、两个或三个元件，设置后图标也会跟随变化。这些模块提取的路径是 Simulink \ SimPoweSystem \ Elements。



a) 模型图标　　b) 直流受控源参数设置对话框　　c) 交流受控源参数设置对话框

图 3-9　受控电压源（Controlled Voltage Source）模块

2. RLC 元件参数设置

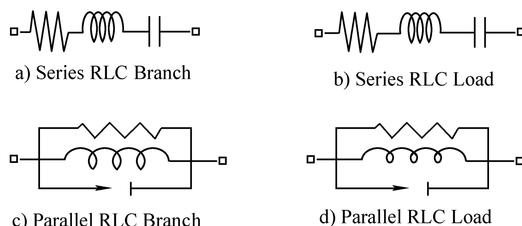
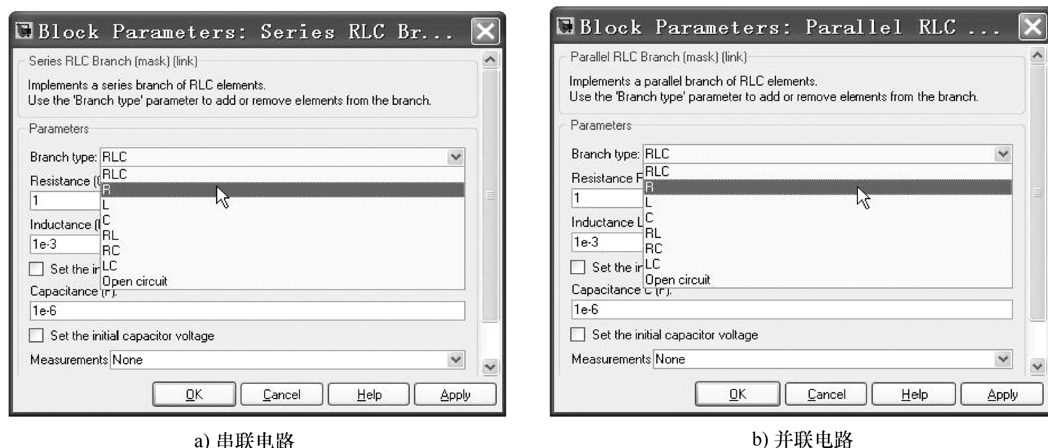


图 3-10　RLC 元件图标

在模型窗口里，对 RLC 元件图标用鼠标左键双击就会弹出 RLC 元件参数设置对话框，如图 3-11 所示。在图中的“Branch type”列表框中可选择 RLC 元件的各种组合；在参数“Resistance（Ohms）”文本框中输入电阻的欧姆数；在“Inductance（H）”文本框中输入电感的亨利数；在“Capacitance（F）”文本框中输入电容的法拉数。还可在“Set the initial inductor current”前的空白窗里勾选即设置电感的初始电流，在“Set the in-



a) 串联电路　　b) 并联电路

图 3-11　RLC 元件参数设置对话框

itial capacitor voltage”前的空白窗里勾选即设置电容的初始电压，并在“Measurements”列表框中对 RLC 支路进行电压、电流的测量：Branch voltage、Branch current、Branch voltage and current 或不测量：None。

三相 RLC 元件的参数设置同上。

3.3　常用电机与变压器的仿真模型

3.3.1　电机

这里详细介绍直流电机（DC Machine）与异步电机（Asynchronous Machine）的连接与参数设置的方法。这两模块元件提取的路径是 Simulink \ SimPoweSystem \ Machines。

1. 直流电机（DC Machine）

1）直流电机模型图标。直流电机模型图标如图 3-12 所示。

2）直流电机模型接线端子。直流电机模型接线端子功能如下：直流电机电枢回路接线端（A+）（A-）；电机励磁电路接线端（F+）（F-）；电机的负载转矩信号输入端（TL）；电机运转状态的信号检测端（m）：检测转速 ω（rad/s）、电枢电流 I_a（A）、励磁电流 I_f（A）、电磁转矩 T_e（N · m）等。

3）直流电机参数设置。在模型结构图中，双击图 3-12 所示图标时，则弹出直流电机参数设置对话框，如图 3-13 所示。多项参数说明如下。

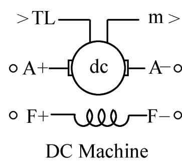


图 3-12　直流电机模型图标

“Preset model”：设置美国制式 5 ~ 250HP 直流电机型号规格，即选择其功率、电枢电压、速度、励磁电压等或不设置。

“Mechanical input”：设置电机输入转矩 TL 或速度 ω。

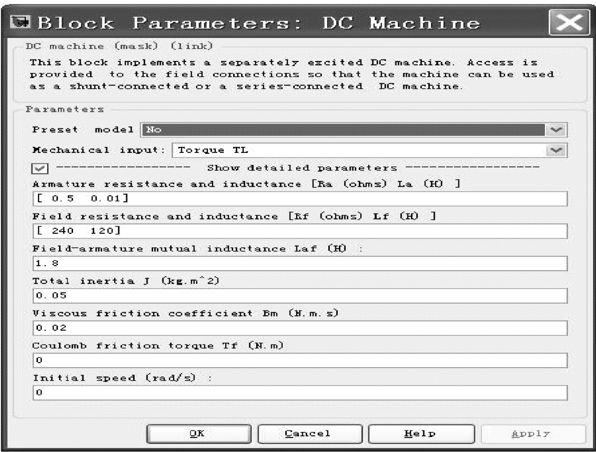


图 3-13　直流电机参数设置对话框

“Show detailed parameters”：当勾选此项时即显示以下参数，否则不显示。参数如下：

“Armature resistance and inductance［Ra（ohms）La（H）］”：电枢电阻 R_a（Ω）与电

感 L_a（H）。

“Field resistance and inductance [Rf（ohms） Lf（H）]”：励磁回路电阻 R_f（Ω）与电感 L_f（H）。

“Field－armature mutual inductance Laf（H）”：电枢与励磁回路互感 L_{af}（H）。

“Total inertia J（kg. m^2）”：电机转动惯量（kg · m^2）。

“Viscous friction coefficient Bm（N. m. s）”：黏滞摩擦系数（N · m · s）。

“Coulomb friction torque Tf（N. m）”：静摩擦转矩（N · m）。

还有参数初始角速度“Initial speed（rad/s）”。

2. 异步电机（Asynchronous Machine）

1）异步电机模型图标。异步电机模型图标如图 3-14 所示。图 3-14a 为标幺制单位（pu）的异步电机，图 3-14b 为标准单位（SI）的异步电机，后者是普遍使用的。

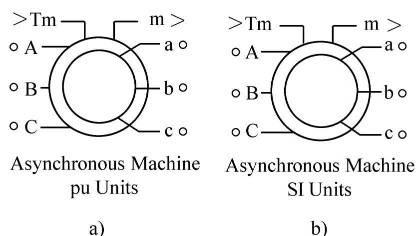


图 3-14　异步电机模型图标

2）异步电机模型接线端子。异步电机模型接线端子功能如下。A、B、C：交流电机的定子电压接线端；a、b、c：绕线转子交流电机的转子输出端，一般短接。若设置为笼型电机，则无此输出端子。Tm：电机转子的机械负载输入端。m：电动机运转状态的信号检测端，参见后续介绍的异步电机测试信号分配器（Machine Measurement Demux）。

3）异步电机参数设置。异步电机参数设置对话框如图 3-15 所示。多项参数说明如下。

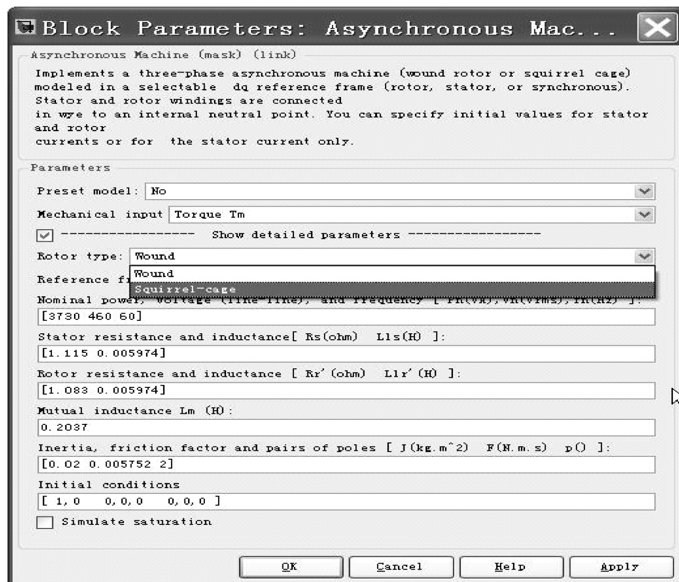


图 3-15　异步电机参数设置对话框

“Preset model”：设置美国制式 5～215HP 异步电机型号规格，即选择其功率、定子电

压、速度、频率等或不设置。

“Mechanical input”：选择电机输入转矩 Tm 或速度 ω。

“Show detailed parameters”：当勾选此项时即显示以下详细参数，否则不显示。参数为：

“Rotor type”：选择电机转子类型：Wound（绕线转子）或 Squirrel - cage（笼型）。

“Reference frame”：选择参考坐标系，有 Rotor（转子坐标系）、Stationary（静止坐标系）或 Synchronous（同步旋转坐标系）。

“Nominal power, voltage (line - line), and frequency [Pn (VA), Vn (Vrms), fn (Hz)]”：额定功率（VA），线电压有效值（V），频率（Hz）。

“Stator resistance and inductance [Rs (ohm) L1s (H)]”：定子电阻 R_s（Ω）和漏感 L_{1s}（H）。

“Rotor resistance and inductance [Rr' (ohm) L1r' (H)]”：转子电阻 $R_{r'}$（Ω）和漏感 $L_{1r'}$（H）。

“Mutual inductance Lm (H)”：互感 L_m（H）。

“Inertia, friction factor and pairs of poles [J (kg. m^2), F (N. m. s), p]”：转动惯量 J（kg · m^2），摩擦系数 F（N · m · s）与极对数 p。

“Initial conditions”：初始条件有初始转差 s，初始点角度 phas，phbs，phcs（deg）与定子电流 i_{sa}、i_{sb}、i_{sc}（A）。

还可勾选仿真饱和值“Simulate saturation”。

4）电机测试信号分配器(Machine Measurement Demux)。电机实体模型的运转信息一般不能直接得到，在仿真过程中需与模块 Machine Measurement Demux（电机测试信号分配器）配合使用而得到。电机测试信号分配器的提取路径为 Simulink \ SimPoweSystem \ Machines。

电机测试信号分配器的图标如图 3-16 所示。它有一个输入端（m），与电机的信号检测端（m）相连接，最多可有 21 路的输出信号与相应的仪表模块相连接。

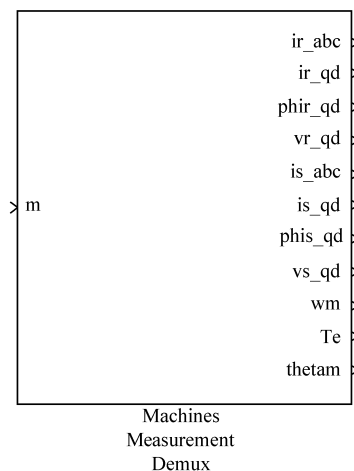


图 3-16　电机测试信号分配器图标

在模型结构图中，当双击图 3-14 所示图标时，则弹出电机测试信号分配器输出设置对话框，如图 3-17 所示。多项参数说明如下。

“Machine type”：选择电机类型，即 Synchronous（同步电机）、Simplified Synchronous（简化同步电机）、Asynchronous（异步电机）、Pemanent Magnet Synchronous（ 永磁同步电机）。显然，当选择不同的电机时会有不同的输出信号设置。以下是电机测试信号分配器的输出信号构成。

“Rotor currents”：转子电流 [ira、irb、irc]。

“Rotor currents”：同步坐标系 d - q 下的 q 轴下的转子电流与 d 轴下的转子电流 [ir_ q、ir_ d]。

“Rotor fluxes”：同步坐标系 d - q 下的 q 轴下的转子磁通与 d 轴下的转子磁通 [phir_

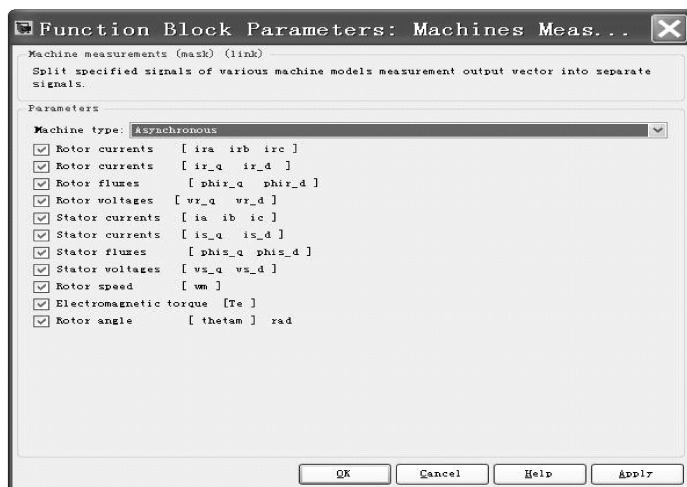


图 3-17　电机测试信号分配器的输出信号构成

q、phir_ d]。

“Rotor voltages”：同步坐标系 d－q 下的 q 轴下的转子电压与 d 轴下的转子电压 [vr_ q、vr_ d]。

“Stator currents”：定子电流 [isa、isb、isc]。

“Stator currents”：同步坐标系 d－q 下的 q 轴下的定子电流与 d 轴下的定子电流 [is_ q、is_ d]。

“Stator fluxes”：同步坐标系 d－q 下的 q 轴下的定子磁通与 d 轴下的定子磁通 [phis_ q、phis_ d]。

“Stator voltages”：同步坐标系 d－q 下的 q 轴下的定子电压与 d 轴下的定子电压 [vs_ q、vs_ d]。

“Rotor speed”：电机的转速 ω_m。

“Electromagnetic torque”：电机的电磁转矩 T_e。

“Rotor angle”：电机的转子角位移 θ_m（rad）。

3.3.2　变压器

电器元件（Elements）模块组中包括了各种变压器。变压器是变换交流电压、电流与阻抗的器件，变压器由铁心与绕组组成。当一次绕组中通有交流电时，铁心中便产生交流磁通，使二次绕组中感应出交流电。在此介绍单相变压器与三相变压器。这两个模块元件提取的路径是 Simulink \ SimPoweSystem \ Elements。

1. 单相变压器

（1）单相变压器模型图标

单相变压器模型图标如图 3-18 所示。图 3-18a 为 1 个一次绕组与 1 个二次绕组，图 3-18b 为 1 个一次绕组与 2 个二次绕组。在模型结构图中，当双击如图 3-18a 所示的图标时，则弹出

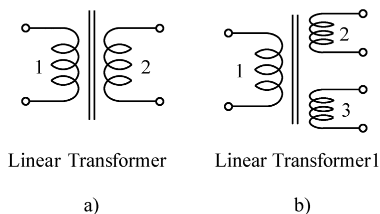


图 3-18　单相变压器模型图标

图 3-19a 所示的单相变压器参数设置对话框。当双击图 3-18b 所示的图标时，则弹出图 3-19b所示的单相变压器参数设置对话框。

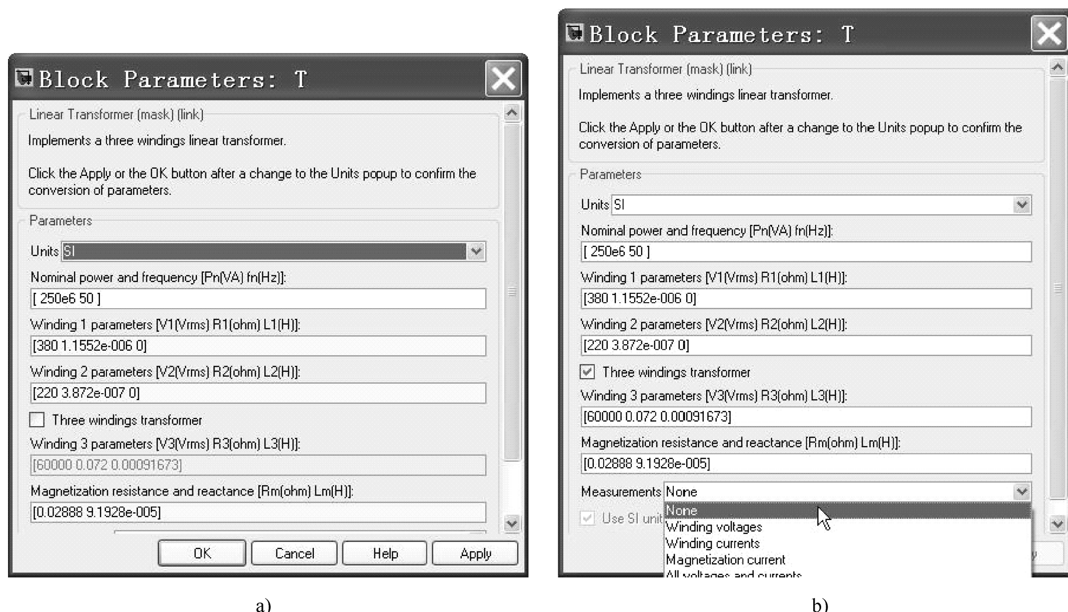


图 3-19　单相变压器参数设置对话框

（2）单相变压器参数设置

必须首先说明，变压器（包括单相与三相）参数中，当选择标幺值单位制（pu）时，容量、频率、电压采用标准单位，电阻与电感采用标幺值（pu）。标幺值与标准单位之间的换算关系为

$$R_{(pu)}=\frac{R(\Omega)}{R_{base}},L_{(pu)}=\frac{L(H)}{L_{base}},R_{base}=\frac{(U_n)^2}{P_n},L_{base}=\frac{R_{base}}{2\pi f_n}$$

式中，R_{base}、L_{base}分别为电阻 R（Ω）与电感 L（H）的基准值，U_n 为一次绕组的额定电压，P_n、f_n 分别为变压器的额定功率、额定频率。

以下是当选择标准单位制（SI）时有关参数的设置。

“Nominal power and frequency [Pn（VA），fn（Hz）]”：额定功率（VA）与频率（Hz）。

“Winding 1 parameters [V1（Vrms），R1（ohm），L1（H）]”：一次绕组的电压有效值、电阻与电感。

“Winding 2 parameters [V2（Vrms），R2（ohm），L2（H）]”：二次绕组的电压有效值、电阻与电感。

可勾选“Three windings transformer”项，即第二组二次绕组的参数，参见图 3-19b。

“Winding 3 parameters [V3（Vrms），R3（ohm），L3（H）]”：第二组二次绕组的电压有效值、电阻与电感。

“Magnetization resistance and reactance [Rm（ohm），Lm（H）]”：磁化电阻与电感。

在“Measurements”列表框里选择测量“Winding voltages”（绕组电压）、“Winding cur-

rents”（绕组电流）、“Magnetization current”（磁化电流）、“All voltages and currents”（全部绕组电压与绕组电流），还是“None”即什么都不测。

2. 三相变压器

（1）三相变压器模型图标

三相变压器模型图标如图 3-20 所示。图 3-20a 为一组三相一次绕组与一组三相二次绕组，图 3-20b 为一组三相一次绕组与两组三相二次绕组。在模型结构图中，当双击图 3-20a 所示的图标时，则弹出图 3-21a 所示的三相变压器参数设置对话框。当双击图 3-20b 所示的图标时，则弹出图 3-21b 所示的三相变压器参数设置对话框。

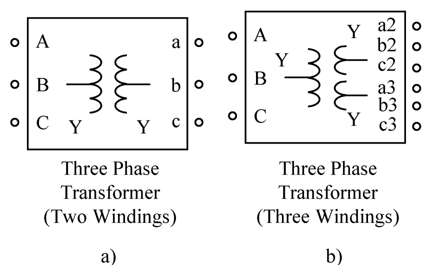
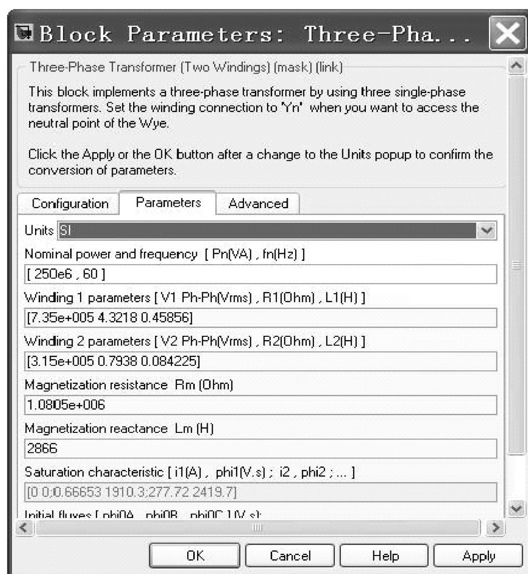
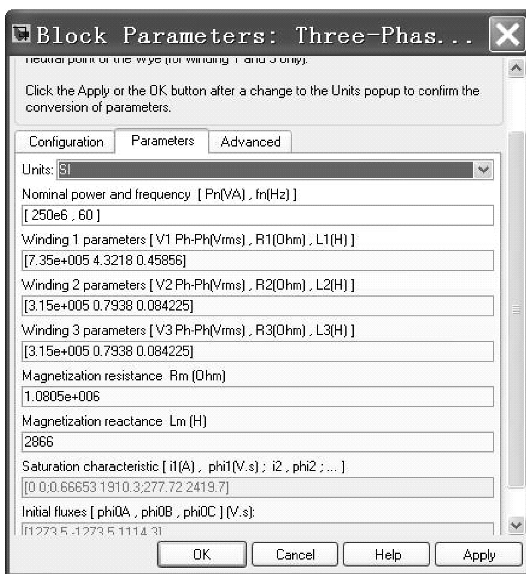


图 3-20 三相变压器模型图标

三相变压器参数中，当选择标幺值单位制（pu）时，容量、频率、电压采用标准单位，电阻与电感采用标幺值（pu）。标幺值与标准单位之间的换算关系同单相变压器。



a)



b)

图 3-21 三相变压器参数设置对话框

（2）三相变压器参数设置

以下是当选择标准单位制（SI）时有关参数的设置。

“Nominal power and frequency [Pn (VA), fn (Hz)]”：额定功率（VA）与频率（Hz）。

“Winding 1 (ABC) connection”：下拉列表复选一次绕组联结方式，‘Y’无中性线的星形联结，‘Yn’有中性线的星形联结，‘Yg’带接地的星形联结，‘Δ_1’电压相位滞后 Y 联

结的三角形联结，‘Δ_{11}’ 电压相位超前 Y 联结的三角形联结。

“Winding parameters [V1 ph－ph（Vrms），R1（Ohm），L1（H）]”：一次绕组的相电压有效值、电阻与电感；

“Winding 2（abc－2）connection”：下拉列表复选第一组三相二次绕组联结方式，五种联结同上。

“Winding parameters [V2 ph－ph（Vrms），R2（Ohm），L2（H）]”：一组三相二次绕组的相电压有效值、电阻与电感；

“Winding 3（abc－3）connection”：下拉列表复选另一组三相二次绕组联结方式，五种联结同上。

“Winding parameters [V3 ph－ph（Vrms），R3（Ohm），L3（H）]”：另一组三相二次绕组的相电压有效值、电阻与电感；

“Magnetization resistance Rm（Ohm）”：磁化电阻。

“Magnetization reactance Lm（H）”：磁化电感。

当勾选“Saturable core”铁心饱和情况时，参数磁化等效电感会消失，对话框中会自动增加饱和特性参数设置。“Saturation characteristic [i1，phi1，i2，phi2，…]”：即设置磁化电流 i_1、磁通 Φ_1、磁化电流 i_2、磁通 Φ_2 等。

可勾选“Simulate hysteresis”，用于进行磁滞饱和特性仿真；

可勾选“Specify initial fluxes”，用来设置初始磁通。

在测量“Measurements”列表框里选择测量‘Winding voltages’（绕组电压）、'Winding currents'（绕组电流）、‘Fluxes and excitation current’（磁通与激磁电流）、‘Fluxes and Magnetization current’（磁通与磁化电流）、‘All measurements（V I Fluxes）’（全部电压、电流、磁通测量）还是‘None’什么都不测。

3.4　基本电力电子器件的仿真模型

本节介绍的基本电力电子器件模型主要有二极管、晶闸管（Th）、门极关断晶闸管（GTO）、绝缘栅双极型晶体管（IGBT）、电力场效应晶体管（金属－氧化物－半导体场效应晶体管，MOSFET）、理想开关、多功能桥式整流电路等。这里将着重说明各种器件的主要功能、模型图标、连接端子与参数设置方法。

电力电子器件模块提取的路径是 Simulink \ SimPoweSystem \ Power Electronics。

3.4.1　二极管（Diode）

MATLAB 中的二极管模型，就是一个单向导电的半导体二端器件，没有电力二极管、普通二极管、续流二极管、快恢复二极管之分，都是一个模型图标，不同的二极管只能在参数设置上区别设置。

1. 二极管模型

二极管的模型图标如图 3-22a 所示，即通常是带缓冲电路的。当选择显示检测输出端 m 时，阳极标志 a，阴极标志 k，则二极管模型图标为图 3-22b。二极管的单向导电性能由二极管逻辑控制，其符号、封装、等效电路与伏安特性如图 3-23 所示。当二极管承受正向电

压（$U_{ak}>0$）时，二极管导通；当二极管承受反向电压（$U_{ak}<0$）或二极管电流下降到零（$I_{ak}=0$）时，二极管关断。

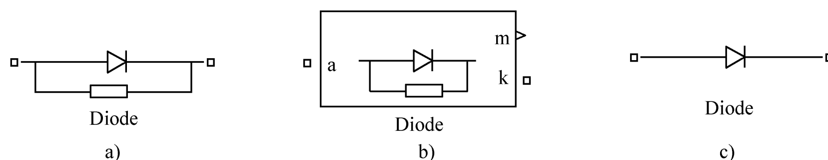


图 3-22　二极管的模型图标

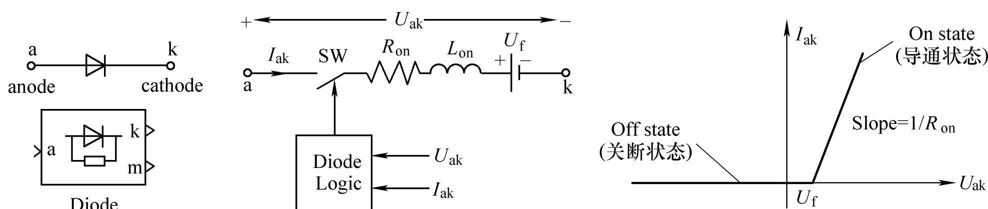


图 3-23　二极管符号、封装、等效电路与伏安特性

2. 二极管参数及其设置

在模型结构图中，当双击图 3-22a 所示图标时，则弹出二极管参数设置对话框，如图 3-24 所示。

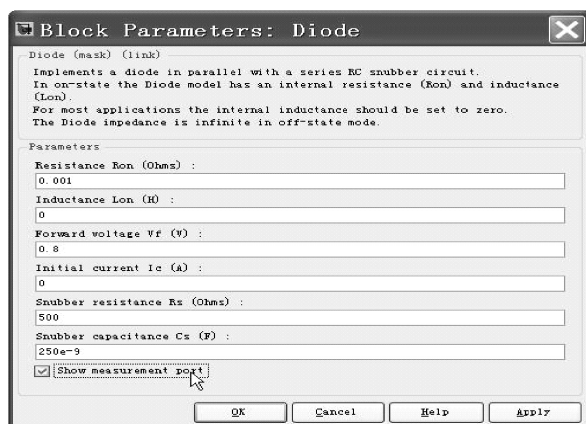


图 3-24　二极管参数设置对话框

“Resistance Ron（Ohms）”：二极管导通电阻 R_{on}（Ω）。

“Inductance Lon（H）”：二极管内电感 L_{on}（H）。

需注意，当电感参数设为“0”时，电阻参数不能同时设为“0”；当电阻参数设为“0”时，电感参数也不能同时设为“0”。

“Forward voltage Vf（V）”：二极管门槛电压（V）。在设置了门槛电压 U_f 时，只有当二极管正向电压大于 U_f 后二极管才能导通。

“Initial current Ic（A）”：初始电流（A）。通常将 I_c 设置为 0，使系统在零状态下开始仿真。当然，也可将 I_c 设置为非 0。但是，初始电流 I_c 设置是有条件的：第一，二极管内

电感大于 0；第二，仿真电路的其他储能元件也设定了初始值。

“Snubber resistance Rs（Ohms）”：吸收电阻（或称缓冲电阻）R_s（Ω）。

“Snubber capacitance Cs（F）”：吸收电容（或称缓冲电容）C_s（F）。为消除缓冲，即取消吸收电路（或称缓冲电路），如图 3-22c 所示，可将 R_s 设置为∞（inf），并将 C_s 设置为 0。为设置纯电阻吸收电路（见图 3-22a），可将 C_s 设置为∞（inf），只设置吸收电阻。

当勾选“Show measurement port”复选框时，即显示图 3-22b 所示二极管模型图标，二极管阳极端（a），二极管阴极端（k）。还有检测端（m），可连接相应仪表，检测二极管的正向管压降（U_{ak}）与流经二极管的电流（I_{ak}）。

3.4.2　晶闸管（Thyristor）

晶闸管是通过门极控制导通与关断的功率半导体器件。在 MATLAB 中，有晶闸管简化模型与晶闸管精细模型两种。

1. 晶闸管模型

晶闸管的模型图标如图 3-25 所示，图 3-25a 为未显示 m 端的图标，图 3-25b 为简化模型图标，图 3-25c 为精细模型图标。晶闸管模型有 2 个输入端与 2 个输出端，第一个输入与输出是晶闸管的阳极端（a）与阴极端（k）。第二个输入（g）是门极（或称栅极）控制信号端，当勾选“Show measurement port”复选框（见图 3-27）时便显示第二个输出端（m），这是晶闸管检测输出向量［I_{ak} U_{ak}］端，可连接相应仪表，检测流经晶闸管的电流（I_{ak}）与晶闸管的正向管压降（U_{ak}）。同二极管，晶闸管模型内部的阳极端（a）与阴极端（k）之间还有一条由 R_s 与 C_s 组成的阻容吸收回路。

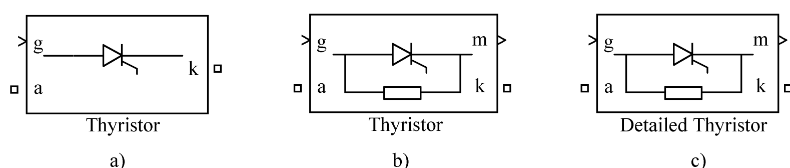


图 3-25　晶闸管的模型图标

晶闸管符号、封装、等效电路与伏安特性如图 3-26 所示。晶闸管伏安特性曲线形象地表明了晶闸管的开关特性。

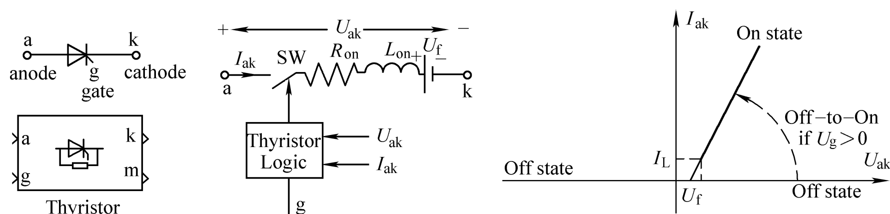


图 3-26　晶闸管的符号、封装、等效电路与伏安特性

由图 3-26 可知，当晶闸管的正负极电压 $U_{ak}>U_f$（门槛电压），并且同时门极（或称栅极）有正脉冲（$U_g>0$）时，则晶闸管导通。为了保证可靠导通，门极正电压 U_g 持续时间

必须足够长，使晶闸管的阳极电流 $I_{ak} > I_L$（维持电流）。在晶闸管导通期间，如果 $I_{ak} < I_L$，在 U_g 转变成低电平时，晶闸管会即刻关断。

当流过晶闸管的阳极电流 $I_{ak} = 0$，此时 $U_{ak} < 0$ 且持续时间 $\nless T_q$（晶闸管关断时间），则晶闸管关断。如果在 $t < T_q$ 内，变化的 $U_{ak} > 0$，即使门极信号电压 $U_g = 0$，$I_{ak} < I_L$（维持电流），晶闸管仍会自动导通。

2. 晶闸管参数及其设置

在模型结构图中，当双击图 3-25a 所示图标时，则弹出晶闸管参数设置对话框，如图 3-27 所示。

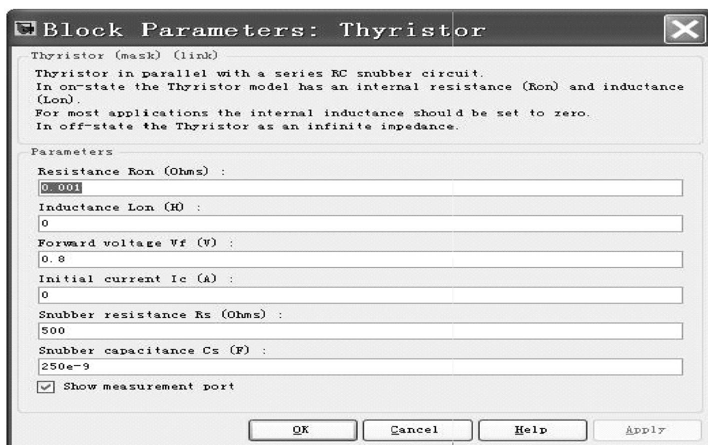


图 3-27　晶闸管参数设置对话框

"Resistance Ron (Ohms)"：晶闸管导通电阻 R_{on}（Ω）。

"Inductance Lon (H)"：晶闸管内电感 L_{on}（H）。

与二极管相同，当电感参数设为"0"时，电阻参数不能同时设为"0"；当电阻参数设为"0"时，电感参数也不能同时设为"0"。

"Forward voltage Vf (V)"：晶闸管门槛电压 U_f（V）。

"Initial current Ic (A)"：初始电流 I_c（A），其设置同二极管。

"Snubber resistance Rs (Ohms)"：吸收电阻 R_s（Ω）。

"Snubber capacitance Cs (F)"：吸收电容 C_s（F）。

同二极管，可对 R_s 与 C_s 设置不同的数值以改变或取消吸收电路。

当不勾选"Show measurement port"复选框与取消吸收电路时，晶闸管的模型图标如图 3-25c 所示。

当对图 3-25b 所示精细模型进行参数设置时，除以上各参数外，还有"Latching current Il"（维持电流）与"Turn off time Tq"（晶闸管关断时间）两项。

需要说明的是，含有晶闸管模型的电路仿真时，最好采用特定的算法 Ode23tb 与 Oder15s，而当对电路进行离散化处理时，晶闸管内电感量应设为 0。

3.4.3　门极关断晶闸管（GTO）

1. 门极关断晶闸管（GTO）模型

门极关断晶闸管（GTO）的模型图标如图 3-28 所示，与图 3-25 所示普通晶闸管的模型图标近乎完全相同，仅在门极上（有一横向短划线）稍有差别。GTO 导通条件同传统晶闸管。普通晶闸管仅在电流过零时才能关断，而 GTO 可在门极信号为 0 的任意时刻关断。

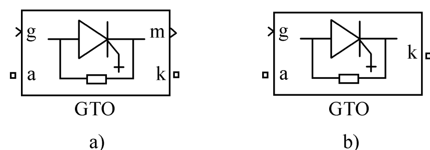


图 3-28　门极关断晶闸管（GTO）的模型图标

门极关断晶闸管（GTO）符号、封装与等效电路如图 3-29 所示，其伏安特性与电流关断曲线如图 3-30 所示。门极关断晶闸管伏安特性曲线形象地表明了晶闸管的开关特性。

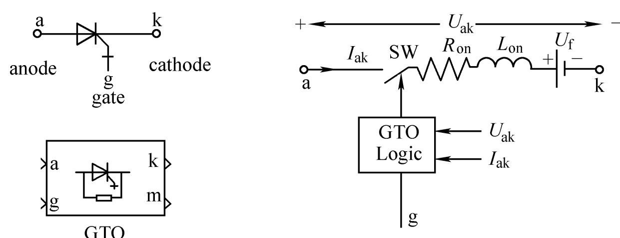


图 3-29　门极关断晶闸管（GTO）的符号、封装与等效电路

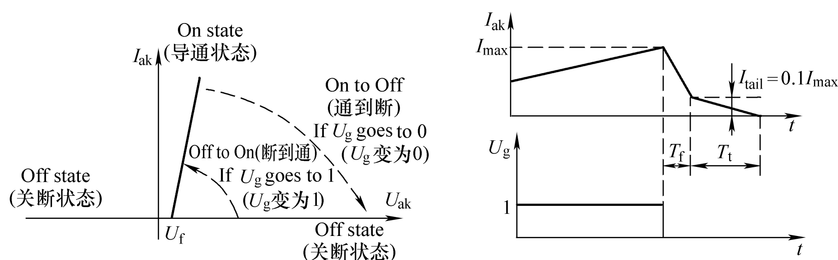


图 3-30　门极关断晶闸管（GTO）的伏安特性与电流关断曲线

由图 3-30 可知，当 GTO 的正负极电压 $U_{ak}>U_f$（门槛电压），并且同时门极（或称栅极）有正脉冲（$U_g>0$），则 GTO 导通。当 GTO 的门极 $U_g=0$ 时，GTO 开始关断，但电流 I_{ak}不会立即变到 0，需经电流下降时间 T_f，电流 I_{ak}开始从最大值 I_{max}减小到 $I_{max}/10$，再需要经过电流拖尾时间 T_t，电流 I_{ak}再从 $I_{max}/10$ 减小到 0，当电流 $I_{ak}=0$ 时，则 GTO 完全关断。

所谓 GTO 可在门极信号为 0 的任意时刻关断，是指上述的电流下降时间 T_f 与电流拖尾时间 T_t 在 MATLAB 仿真模型中为必须设置的任意参数。

2. 门极关断晶闸管（GTO）参数及其设置

门极关断晶闸管（GTO）参数设置对话框如图 3-31 所示。由图可知，GTO 参数设置与普通晶闸管参数设置几乎完全相同，只是多了两个参数需要设置。

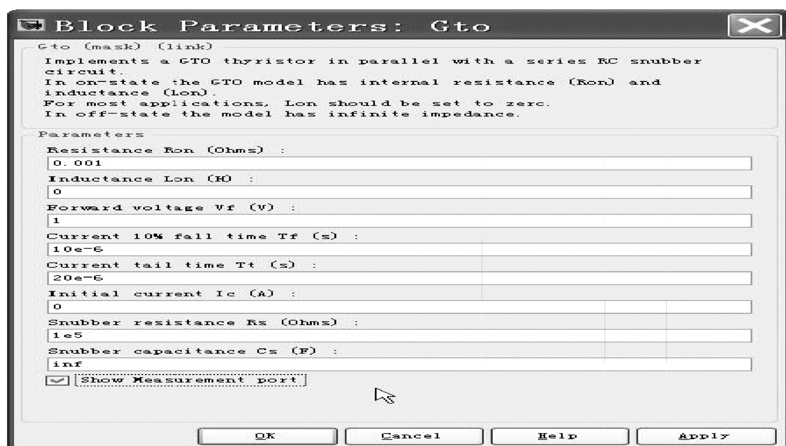


图 3-31　门极关断晶闸管（GTO）参数设置对话框

“Current 10% fall time Tf（s）”：电流下降时间 T_f。

“Current tail time Tt（s）”：电流拖尾时间 T_t。

当不勾选“Show measurement port”复选框与取消吸收电路时，门极关断晶闸管（GTO）的模型图标如图 3-28b 所示。

对有门极关断晶闸管（GTO）模型的电路仿真时，同样宜采用 Ode23tb 与 Oder15s 算法。

3.4.4　电力场效应晶体管（MOSFET）

电力场效应晶体管（MOSFET）即功率（Power）场效应晶体管（P－MOSFET）。在电子技术中已经学习过，由于其特殊的结构，场效应晶体管具有以下特点：由于是电压控制器件，驱动功率极小，输入电阻极高（$10^9 \sim 10^{14}\,\Omega$），工作频率高，无二次击穿，热稳定性好，安全工作区宽等。

1. 电力场效应晶体管（MOSFET）模型

电力场效应晶体管（MOSFET）的模型图标如图 3-32 所示，其内部有个反并联二极管与可任意设置的阻容吸收回路，其符号、封装、等效电路与伏安特性如图 3-33 所示。

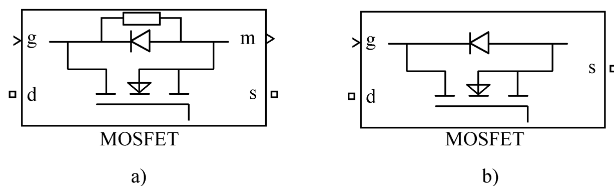


图 3-32　电力场效应晶体管（MOSFET）的模型图标

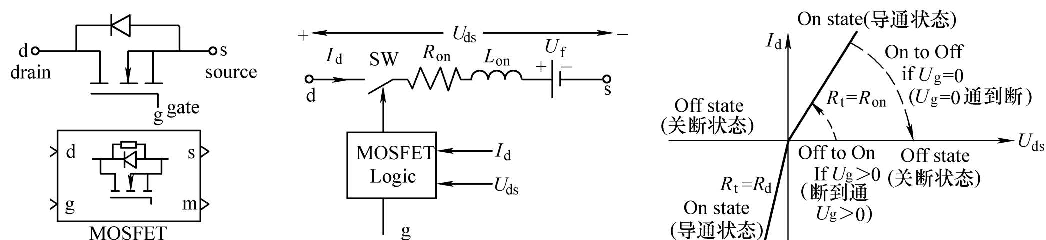


图 3-33　电力场效应晶体管（MOSFET）的符号、封装、等效电路与伏安特性

由图 3-33 可知，当漏极与源极之间有正电压（$U_{ds}>0$），同时门极（或称栅极）有一正信号（$U_g>0$）时，MOSFET 导通。当门极信号 $U_g=0$ 时，MOSFET 关断。另外，如果漏极电流 I_d 反向，即 I_d 正向流过内部二极管，并且 $U_g=0$，当 I_d 下降为 0 时（$I_d=0$），则 MOSFET 关断。请注意等效电路中有一模型可变电阻 R_t。

2. 电力场效应晶体管（MOSFET）参数及其设置

MOSFET 参数设置对话框如图 3-34 所示。由图可知，MOSFET 参数设置与普通晶闸管参数设置几乎完全相同，但另有几个参数需说明。

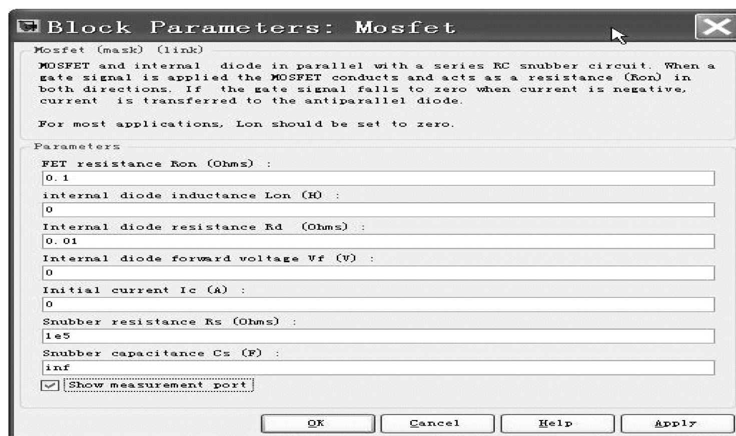


图 3-34　MOSFET 参数设置对话框

"FET resistance Ron（Ohms）"：MOSFET 导通电阻 R_{on}（Ω），当漏极电流 $I_d>0$，$R_t=R_{on}$。

"Internal diode inductance Lon（H）"：MOSFET 内部二极管电感 L_{on}（H）。

"Internal diode resistance Rd（Ohms）"：内部二极管电阻 R_d（Ω），当漏极电流 $I_d<0$，$R_t=R_d$。

"Internal diode forward voltage Vf（V）"：内部二极管门槛电压 U_f（V）。

当不勾选"Show measurement port"复选框与取消吸收电路时，电力场效应晶体管（MOSFET）的模型图标如图 3-32b 所示。

对有 MOSFET 模型的电路仿真时，也宜采用 Ode23tb 与 Oder15s 算法。

3.4.5　绝缘栅双极型晶体管（IGBT）

在电力电子技术中已经学习过，IGBT 相当于一个 MOSFET 驱动的大功率晶体管。既具有输入阻抗高、速度快、热稳定性好、驱动电路简单，又具有通态电压低、耐压高、流通大电流等优点。

1. 绝缘栅双极型晶体管（IGBT）模型

绝缘栅双极型晶体管（IGBT）的模型图标有三种：其中内部并联可任意设置阻容吸收回路的与反并联二极管的，其图标如图 3-35a、b 所示，其符号、等效电路如图 3-36 所示，它的伏安特性与电流关断曲线如图 3-37 所示。

由图 3-37 可知，当 IGBT 的集电极与发射极之间有正电压且 $U_{CE}>U_f$（门槛电压），同时栅极（或称门极）有一正信号（$U_g>0$）时，IGBT 导通。当集电极与发射极电压 $U_{CE}>0$，而门极信号 $U_g=0$ 时，IGBT 开始关断，但集电极电流 I_c 不会立即变到零，类似 GTO，需经电流下降时间 T_f，电流 I_c 开始从最大值 I_{max} 减小到 $I_{max}/10$，再需要经过电流拖尾时间 T_t，电流 I_c 再从 $I_{max}/10$ 减小到 0，当电流 $I_c=0$ 时，IGBT 完全关断。

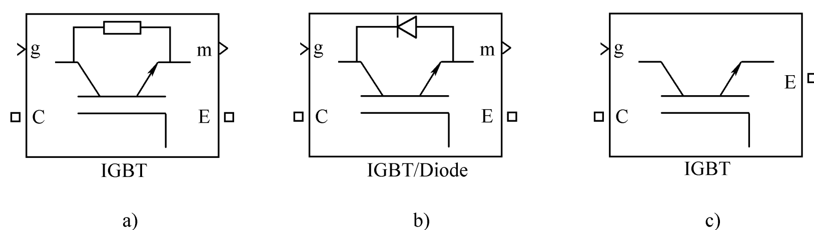


图 3-35　绝缘栅双极型晶体管（IGBT）的模型图标

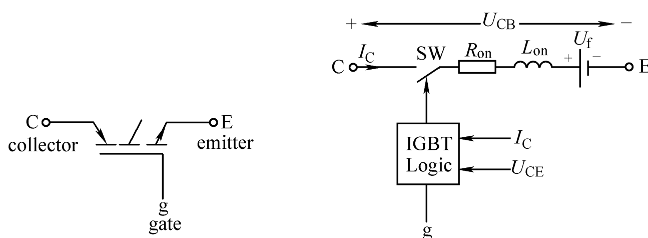


图 3-36　绝缘栅双极型晶体管（IGBT）的符号、等效电路

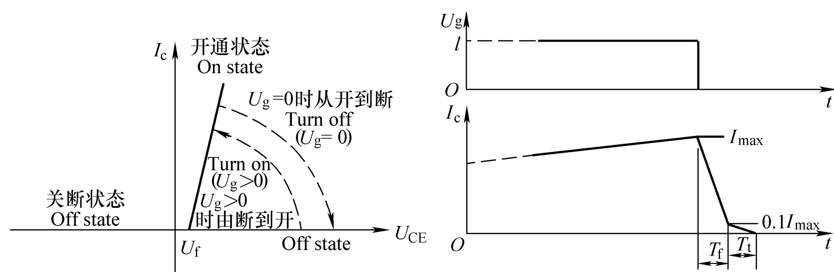


图 3-37　绝缘栅双极型晶体管（IGBT）的伏安特性与电流关断曲线

另外，当集电极与发射极之间电压 $U_{CE}<0$ 时，IGBT 关断。

2. 绝缘栅双极型晶体管（IGBT）参数及其设置

IGBT 参数设置对话框如图 3-38a 所示。由图可知，IGBT 参数设置与普通晶闸管参数设置几乎完全相同，另有两个参数类似 GTO 参数设置。

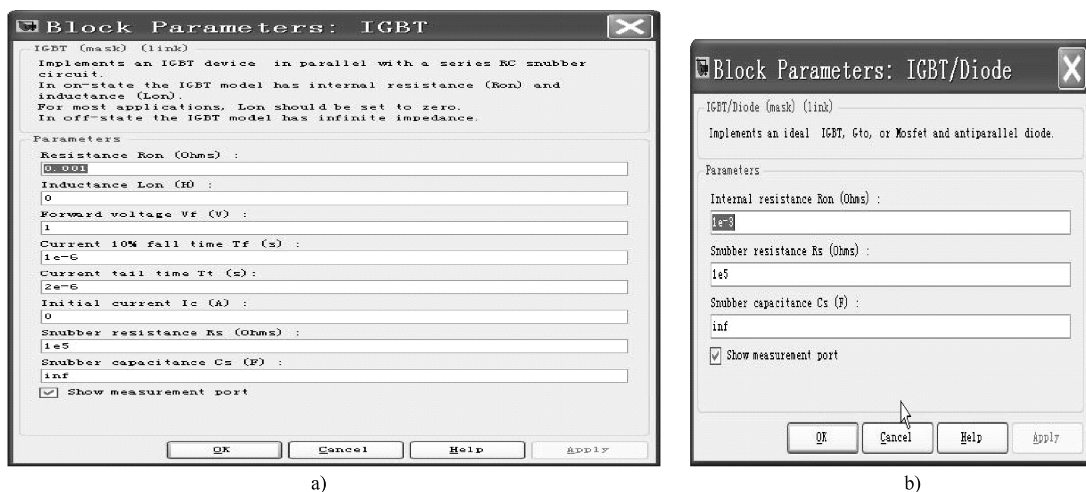
“Current 10% fall time Tf（s）”：电流下降时间 T_f。

“Current tail time Tt（s）”：电流拖尾时间 T_t。

当不勾选“Show measurement port”复选框与取消吸收电路时，IGBT 的模型图标如图 3-35c 所示。

对于如图 3-35b 所示内部反并联二极管的绝缘栅双极型晶体管（IGBT）模型，其参数设置更简单，如图 3-38b 所示。

对有 IGBT 模型的电路仿真时，还是适宜采用 Ode23tb 与 Oder15s 算法。



a)　b)

图 3-38　IGBT 参数设置对话框

3.4.6　理想开关（Ideal Switch）

理想开关（Ideal Switch）是 MATLAB 特设的一种电子开关。理想开关受门极控制，开关导通时电流可双向流通。理想开关在仿真中可作断路器使用，对门极作适当设计，也可作为简单的半导体开关用于自动控制。

1. 理想开关（Ideal Switch）模型

理想开关（Ideal Switch）的模型图标如图 3-39 所示，其符号、等效电路与伏安特性如图 3-40 所示。

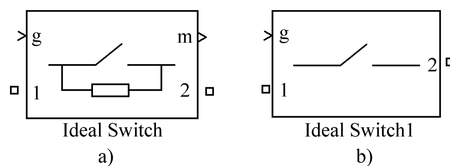


图 3-39　理想开关的模型图标

由图 3-40 可知，当 Ideal Switch 的门极有一正信号（$U_g>0$）时，无论开关两端（端子 1、2）之间施加正向电压还是反向电压，理想开关都导通。当 $U_g=0$ 时，无论开关受正向还是反向电压，理想开关都关断。门极触发时开关动作是瞬时完成的。

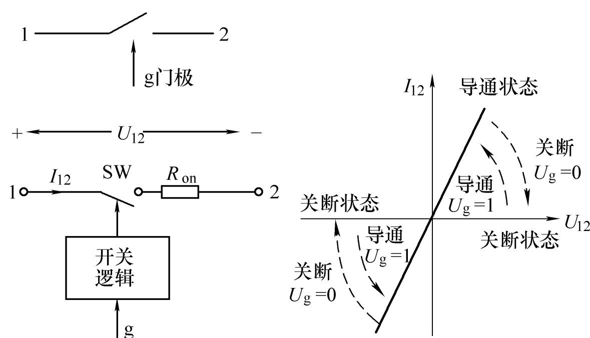


图 3-40　理想开关的符号、等效电路与伏安特性

2. 理想开关（Ideal Switch）参数及其设置

Ideal Switch 参数设置对话框如图 3-41 所示。由图可知，参数设置与普通晶闸管参数设置几乎完全相同，另有两个参数设置需注意。

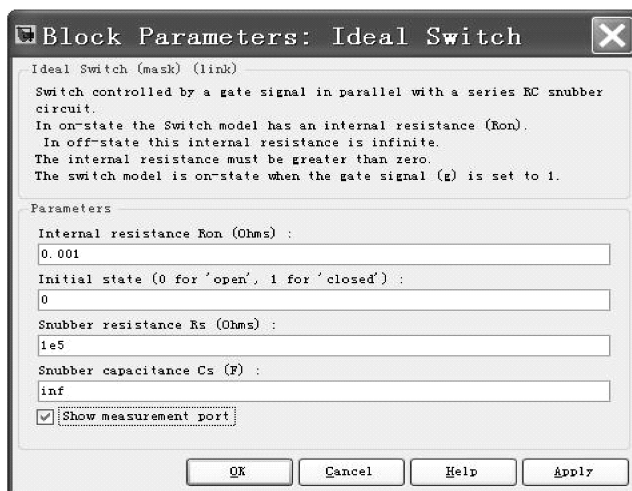


图 3-41　Ideal Switch 参数设置对话框

“Internal resistance Ron（Ohms）”：理想开关导通电阻 R_{on}（Ω）。

“Initial state（0 for 'open', 1 for 'closed'）”：初始状态，断开设为“0”，闭合设为“1”。

当不勾选“Show measurement port”复选框与取消吸收电路时，Ideal Switch 的模型图标如图 3-39b 所示。

3.4.7　多功能桥式整流电路（Universal Bridge）

1. 多功能桥式整流电路模型

多功能桥式整流电路模型，是一个既可用作整流器也可用作逆变器的模型，并且可通过选择或设置来改变其相数与采用不同的电力电子器件，其模型图标如图 3-42 所示。A、B、C 为三相交流电源的相电压输入（逆变时作为输出）端子。g 为触发脉冲输入端子，如果电

力电子器件选择为二极管，则无此端子。+、-为整流器的输出（逆变时作为输入）正负极端子。

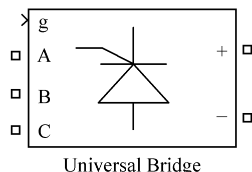


图 3-42　多功能桥式整流电路模型图标

2. 多功能桥式整流电路模型参数及其设置

多功能桥式整流电路模型参数设置对话框如图 3-43 所示。

“Snubber resistance Rs（Ohms）”：吸收（或称缓冲）电阻（Ω）。

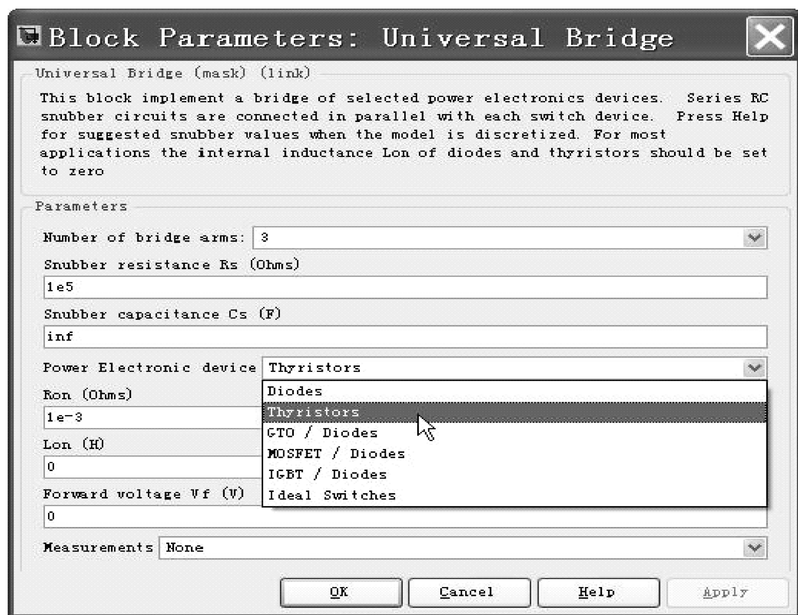


图 3-43　多功能桥式整流电路模型参数设置对话框

“Snubber capacitance Cs（F）”：吸收（或称缓冲）电容（F）。

“Number of bridge arms”：多功能整流桥模型桥臂的相数，有 1、2、3 三种相数可供选择。

“Power Electronic device”：电力电子器件的种类，有 Diodes（二极管）、Thyristors（晶闸管）、GTO/Diodes（门极关断晶闸管）、MOSFET/Diodes（电力场效应晶体管）、IGBT/Diodes（绝缘栅双极型晶体管）、Ideal Switches（理想开关）等 6 种可供选择。

“ Ron（Ohms）”：桥中使用的电力电子器件的内电阻（Ω）。

“ Lon（H）”：桥中使用的电力电子器件的内电感（H）。

“Forward voltage Vf（V）”：整流桥门槛电压（V）。

在“Measurements”列表框里选择测量“Device voltages”（装置电压）、“Device currents”（装置电流）、“UAB UBC UCA UDC voltages”（三相线电压与直流平均电压）、“All voltages and currents”（全部电压和电流）还是“None”即什么都不测。

3.5　电力电子变流器典型驱动装置的仿真模型

只有在正确的门极（或称栅极）信号驱动控制下，电力电子器件才能正常运行。

在电力电子器件（Power Electronics）模块组里，还有 2 个二级子模块组，即“Control Blocks”与“Discrete Control Blocks”。电力电子变流器典型驱动装置就在子模块组“Control Blocks”中。本节介绍同步 6 脉冲触发器模型、同步 12 脉冲触发器模型、脉宽调制 PWM 脉冲发生器与脉冲信号发生器（Pulse Generator）。

本节介绍的前三种电力电子器件驱动装置仿真模型提取的路径是 Simulink \ SimPoweSystem \ Power Electronics \ Control Blocks，而脉冲信号发生器（Pulse Generator）模型提取的路径是 Simulink \ Simulink \ Sources \ Pulse Generator。

3.5.1 同步 6 脉冲触发器（Synchronized 6 – Pulse Generator）

1. 同步 6 脉冲触发器模型功能

同步 6 脉冲触发器用于三相整流桥 6 个晶闸管的触发脉冲，在一个周期内产生 6 个触发信号，每个触发信号之间的间隔为 60°，而且 6 个触发脉冲需符合规定的顺序，如图 3-44 所示。

2. 同步 6 脉冲触发器模型

同步 6 脉冲触发器电路的模型图标如图 3-44a 所示，模型有 5 个输入端与 1 个输出端。输入端 alpha_ deg 为移相控制角给定信号，单位为“度”，控制角可以是固定值（输入端应与“常数”模块相连），也可以是变化值（输入端应与控制系统的控制器相连），从而对触发脉冲进行移相控制。移相控制角的起始点为同步电压的零点。

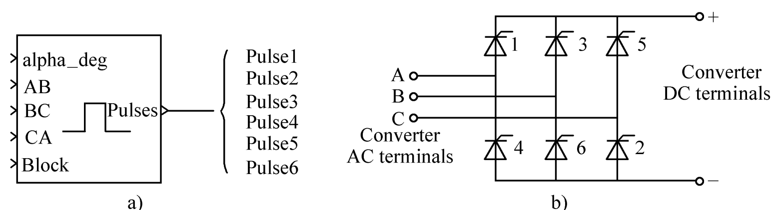


图 3-44 同步 6 脉冲触发器

输入端 AB、BC、CA 是同步线电压输入端，就是连接到三相整流桥的三相交流电压的线电压。同步的作用是使触发器产生的触发信号与整流主电路晶闸管（整流桥的晶闸管按自然导通顺序编号）需要被触发的时刻相一致，并且保证三相桥 6 个晶闸管按规定的顺序依次被触发，故同步信号要与晶闸管主电路的三相电源保持一定的相位关系，这通常用同步变压器来调整并予以实现。

输入端 Block 是触发器模型的使能端，当此端置“0”时，则输出脉冲，整流器就应工作；当此端置“1”时，则无输出脉冲，整流器就不工作。该端可以用作过电流保护与直流可逆系统中整流器工作状态的选择。

输出端 Pulses 是触发脉冲的输出，它是一个 6 维向量，即 6 个触发脉冲，需与三相整流桥电路模型的脉冲输入端 g 相连。输出的触发脉冲有两种形式：触发宽脉冲与触发双脉冲（参见以下脉冲触发器模型参数及其设置）。

3. 同步 6 脉冲触发器模型参数及其设置

在模型结构图中，当双击图 3-44a 所示的图标时，则弹出同步 6 脉冲触发器模型参数设

置对话框，如图 3-45 所示。

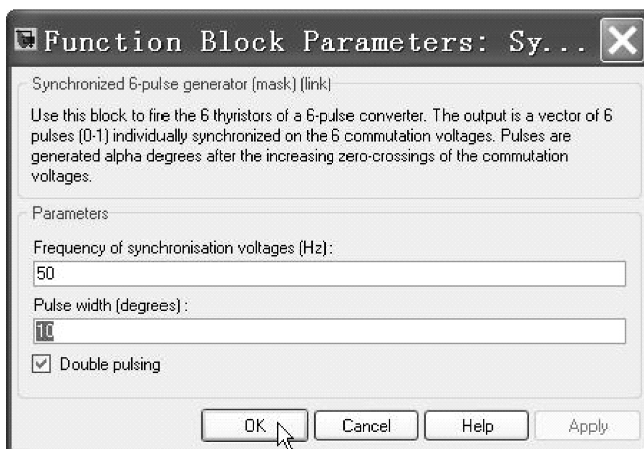


图 3-45　同步 6 脉冲触发器模型参数设置对话框

“Frequency of synchronisation voltages（Hz）”：同步电压频率（Hz）。

“Pulse width（degrees）”：脉冲宽度（°）。

当勾选“Double pulsing”（双脉冲）复选框时，触发器模型能输出间隔 60°的双脉冲，不勾选时，则输出宽脉冲。

3.5.2　同步 12 脉冲触发器（Synchronized 12 – Pulse Generator）

在 1000kW 以上的大功率系统中，常采用双三相桥构成的十二相整流电路。对于晶闸管—直流电动机系统，为了克服电流脉动产生的脉动转矩对生产机械造成的损害，也常采取增加整流电路的相数，而采用十二相整流电路。

1. 同步 12 脉冲触发器模型功能

同步 12 脉冲触发器用于产生十二相整流器的触发脉冲，十二相整流器通常由两组三相桥式整流电路串联或并联组成，根据电机学理论，两组三相桥的交流电源分别由整流变压器的两套二次绕组提供，一套接成Y，另一套接成△，使输出相电压相位错开 30°。

2. 同步 12 脉冲触发器模型

同步 12 脉冲触发器的模型图标如图 3-46 所示，模型有 5 个输入端与 2 个输出端。

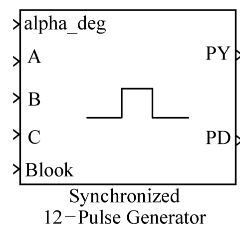


图 3-46　同步 12 脉冲触发器模型图标

输入端 alpha_ deg、A、B、C、Block 功能与同步 6 脉冲触发器相同。

输出端 PY、PD 是触发脉冲的两组输出，每组各有 6 个脉冲，其中 PY 输出到变压器二次绕组Y联结整流桥，PD 输出到变压器二次绕组△联结整流桥。整流桥的晶闸管按自然导通顺序编号。必须注意，MATLAB 的同步 12 脉冲触发器从 PD 输出的脉冲比 PY 输出对应的脉冲滞后 30°，这使得双三相桥整流变压器二次侧Y与△联结的△必须采用△ –1 联结，以与触发脉冲相配合。

与 6 脉冲触发器模型一样，12 脉冲触发器模型也有双脉冲与宽脉冲两种触发方式。

3. 同步 12 脉冲触发器模型参数及其设置

同步 12 脉冲触发器模型参数设置对话框亦如图 3-45 所示。其参数设置与同步 6 脉冲触发器模型的相同。

3.5.3　PWM 脉冲发生器（PWM Generator）

1. PWM 脉冲发生器模型功能

根据自动控制系统理论，正弦波脉宽调制是通信系统的调制技术在交流变频中的应用，其原理是以正弦波为调制波、以三角波为载波，将两者进行比较，在其交点处产生脉冲的前后沿，以形成与正弦波等效的等幅矩形脉冲序列 SPWM 波（这是以下要介绍的调制信号内部生成方式）。基于此原理的是采用脉宽调制脉冲发生器（PWM Generator）模块实现交流变频调速。

还有一种以直流电压为控制信号、以三角波为载波（MATLAB 系统的概念），将两者进行比较，在其交点处产生脉冲的前后沿，以形成幅值上正下负的等幅矩形脉冲序列 PWM 波（这是以下要介绍的外部调制信号方式）。基于此原理的也要采用脉宽调制脉冲发生器（PWM Generator）模块而实现直流脉宽调速。

该模型产生的脉冲可触发单相半桥、单相全桥、三相桥式等构成的可控整流桥与逆变桥中的全控型器件 MOSFET、GTO、IGBT 等，并且还可以提供用于双三相桥式电路驱动的 12 脉冲。

2. PWM 脉冲发生器模型

PWM 脉冲发生器的模型图标如图 3-47 所示。请注意，在创建仿真模型图时，无论选择内部生成还是外部输入调制信号（参见以下 PWM 模型参数设置），图标左端的输入信号标记 Signal（s）均保持不变。另外，图标右端的输出信号标记，对应着发生器的不同工作模式产生的不同脉冲路数。

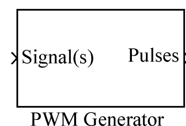


图 3-47　PWM 脉冲发生器模型图标

现以变换器由 IGBT 器件构成为例，来说明 PWM 脉冲发生器输出脉冲的使用。

1）选择单桥臂时，其输出脉冲与对应的触发桥如图 3-48 所示。

2）选择双桥臂时，其输出脉冲与对应的触发桥如图 3-49 所示。

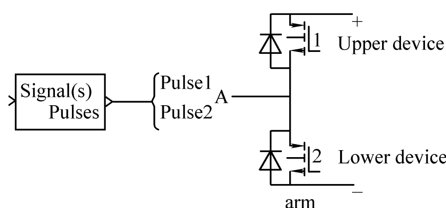


图 3-48　触发单相半桥时的输出脉冲

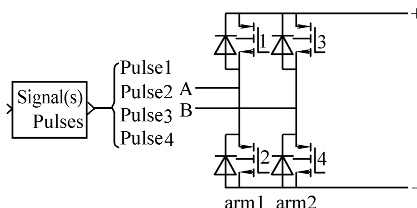


图 3-49　触发单相全桥时的输出脉冲

3）选择三桥臂时，其输出脉冲与对应的触发桥如图 3-50 所示。

4）选择双三桥臂时，其输出脉冲与对应的触发桥如图 3-51 所示。

3. PWM 脉冲发生器模型参数及其设置

在模型结构图中，当双击图 3-47 所示图标时，则弹出 PWM 脉冲发生器模型参数设置

对话框，如图 3-52 所示。

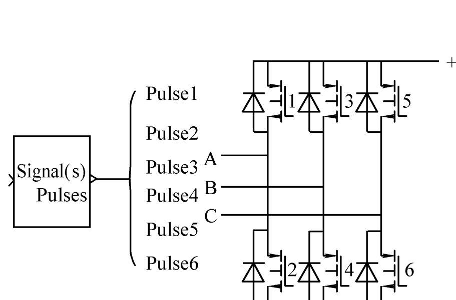


图 3-50　触发三相桥时的输出脉冲

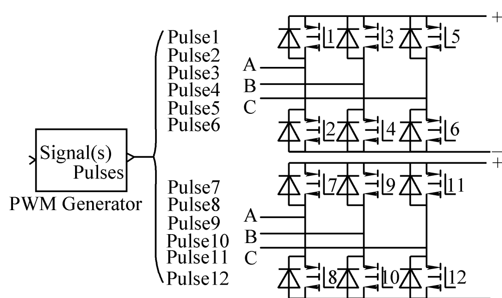


图 3-51　触发双三相桥时的输出脉冲

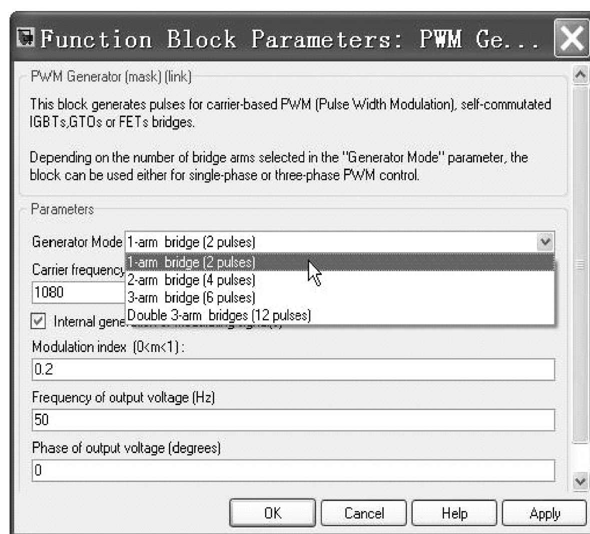


图 3-52　PWM 脉冲发生器模型参数设置对话框

“Generator Mode”：发生器工作模式，用于选择产生的脉冲路数，以适应所触发的桥臂数，可供选择的有单桥臂（1－arm bridge，2 pulses）、双桥臂（2－arm bridge，4 pulses）、三桥臂（3－arm bridge，6 pulses）、双三桥臂（Double 3－arm bridges，12 pulses）。

“Carrier frequency（Hz）”：载波频率（Hz），用于设置三角载波信号的频率。

“Internal generation of modulating signal”：调制信号内部生成方式，当勾选此复选框时，内部生成正弦调制信号，此时必构成 SPWM 调制方式；否则，必须使用外部信号作为调制信号。

已经说明，当使用外部信号作为调制信号时，既可以是直流控制信号，也可是正弦波交流控制信号。在 PWM 直流脉宽调速仿真时采用直流控制信号，三角波载波的高度参数在 PWM Generator 模块里是可设置的，直流控制信号的大小应不大于三角波载波的高度以便能生成确切的交点。

在用交流正弦波作为外部调制信号的情况下，当 PWM Generator 模块被用于触发单相单桥（一桥臂）、单相全桥（二桥臂）变流器时，模块 Signal（s）端应输入单相正弦信号；

当模块被用于触发单个或两个三相变换器（三桥臂）时，模块 Signal（s）端应输入三相正弦信号。

“Modulation index（$0 < m < 1$）”：调制度。根据自动控制理论，调制度 $m = U_{rm}/U_{tm}$，式中，U_{rm}与 U_{tm}分别为正弦调制波参考信号与三角载波的峰值。当改变 m 时，即可控制输出电压的幅值。需要指出的是，只有在内部生成调制信号时，设置 m 才有效。

“Frequency of output voltage（Hz）”：输出电压频率（Hz），也是设置正弦调制波的频率。同样只有在内部生成调制信号时才有效。

“Phase of output voltage（degrees）”：输出电压相角（°），用于设置正弦调制波的相角，以控制输出电压的相位。也是只有在内部生成调制信号时才有效。

3.5.4 脉冲信号发生器（Pulse Generator）

再一次提醒读者，脉冲信号发生器（Pulse Generator）模型提取的路径是 Simulink \ Simulink \ Sources \ Pulse Generator。

1. 脉冲信号发生器（Pulse Generator）模型功能

脉冲信号发生器（Pulse Generator）是一矩形方波信号发生器，且为矩形方波前沿触发方式，可用于触发电力电子器件，如晶闸管等。它是信号发生器，不需要任何输入信号激励。

2. 脉冲信号发生器（Pulse Generator）模型

脉冲信号发生器（Pulse Generator）的模型图标如图 3-53 所示，无输入信号端，有 1 个矩形方波信号输出端。

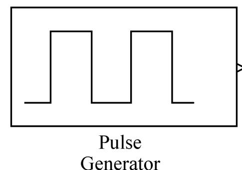


图 3-53　脉冲信号发生器的模型图标

3. 脉冲信号发生器（Pulse Generator）模型参数及其设置

脉冲信号发生器（Pulse Generator）模型参数设置对话框如图 3-54 所示。

“Pulse type”：脉冲类型，有 Time based（时间基准）与 Sample based（采样基准）两种可供选择。

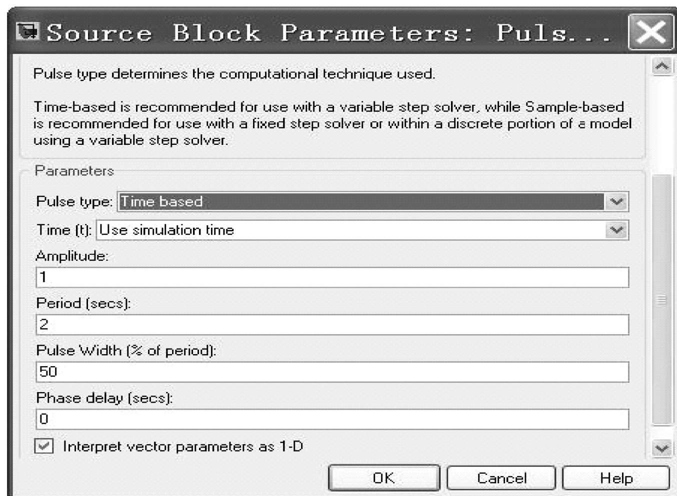


图 3-54　Pulse Generator 模型参数设置对话框

“Time（t）”：时间，有 Use simulation time（使用仿真时间）与 Use external signal（使用内部信号）两种可供选择。

“Amplitude”：脉冲幅值。

“Period（secs）”：周期（s）。

“Pulse Width（% of Period）”：脉冲宽度（周期的百分数）。

“Phase delay（secs）”：相位延迟（s）。

当选择 Use simulation time（使用仿真时间）时，可勾选“Interpret vector parameters as 1 – D”即解释向量参数为一维的，当选择 Use external signal（使用内部信号）时，则无此勾选项。

3.6　常用测量元件的仿真模型

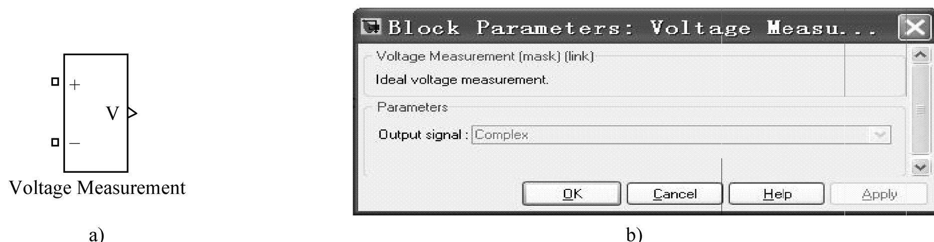
无论电路还是控制系统，运行的状态或参数、指标，都必须用测量元件测量后而知晓。本节就介绍几个常用电气测量元件的仿真模型。

这些仿真模型提取的路径是 Simulink \ SimPoweSystem \ Measurements。

3.6.1　电压测量（Voltage Measurement）

电压测量模型用于测量电路中两节点之间的电压，其模型图标如图 3-55a 所示。模型图标有 2 个标有极性的输入端，既可用来测量直流电压（按正负极性连接），也可用来测量交流电压（按正弦向量规定正方向连接）。模型图标有 1 个输出端 v，既可用来连接示波器，也可用来连接实时数字显示仪表（Display）。当测量交流时，如果没按规定正方向连接，波形会反向，数字仪表显示的值会带负号。

电压测量模型参数设置对话框如图 3-55b 所示。其中只有列表框“Output signal”一项，选项用于设置输出信号的形式，可选择 Complex（复数）、Real – Imag（实部—虚部）、Magnitude – Angle（幅值—相角）、Magnitude（幅值）等项，前三种是复数量，幅值则是一个标量信号。



a)　　b)

图 3-55　电压测量模型图标与模型参数设置对话框

当电压测量模型用于测量相量的仿真结果时，则需进行必需的设置，即在仿真的模型结构图中，添设 Powergui 模型并选择“Phasor simulation”相量仿真。

3.6.2　电流测量（Current Measurement ）

电流测量模型相当于一个分流器，用于测量流经电路、系统或连接线中的电流，其模型

图标如图 3-56a 所示。模型图标有 2 个标有“+、-”极性的输入端与 1 个输出端 i，“+、-”输入端必须与被测的电流串联。模型参数设置对话框如图 3-56b 所示，其他使用方法与参数设置同电压测量。

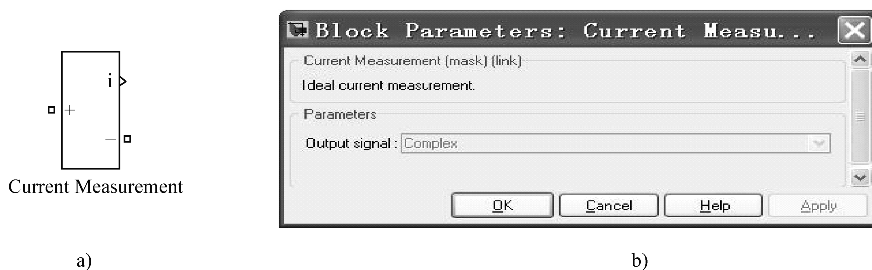


图 3-56　电流测量模型图标与模型参数设置对话框

3.6.3　三相电压电流测量（Three－Phase　V－I Measurement）

当电力电子变换电路为三相电路时，就有必要测量三相电压与电流。当然，可以用单相电压与电流测量模块测量三个相，但是，此时的电路连线会有复杂与不简便之弊。三相电压电流测量便有必要了。

1. 三相电压电流测量模型功能与图标

三相电压电流测量模型图标如图 3-57a 所示，使用时将其与负载串联，通常三相电源侧连接端子 A、B、C，负载侧连接端子 a、b、c，输出的三相电压与电流信号由端子 Vabc、Iabc 引出。

2. 三相电压电流测量模型参数及其设置

三相电压电流测量模型参数设置对话框如图 3-57b 所示。

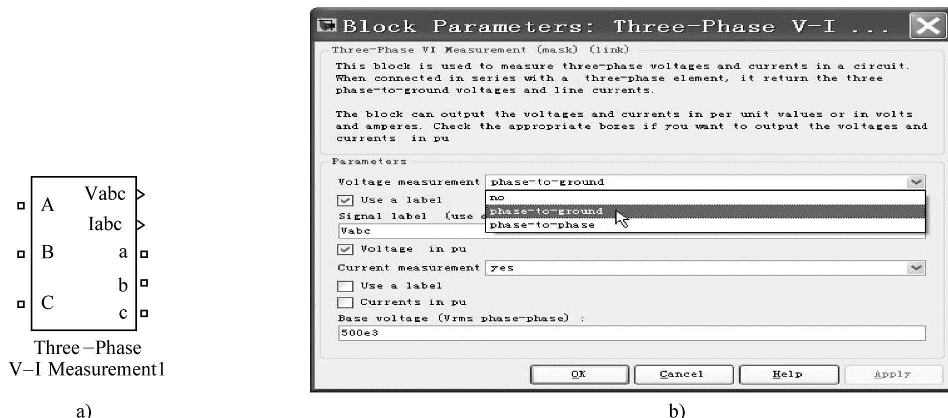


图 3-57　三相电压电流测量模型图标与参数设置对话框

“Voltage measurement”：电压测量，有 phase－to－ground（相—地电压）、phase－to－phase（相—相电压）与 no（不测量）三种可供选择。请注意，当选择“phase－to－ground”时，测量三相的相电压必须使电压源中性点引出并连接到接地端子模块。

“Use a label”：应用标签，当勾选时，电压测量的量将传递给带标签的信号，“use a From block to collect this signal”用一个名为“源模块”认定该信号。当不勾选时，则电压测量可通过端口 Vabc 直接输出测量结果。

“Signal label”：信号标签，为被测电压量指定一个标签名称，即给被测电压量命名。

“Voltage in pu”：电压标幺值，当勾选时，被测电压将以标幺值（pu）形式输出测量结果。为此，必须设置“Base voltage”基准电压值 U_{base}。对此，电压标幺值有以下公式：

$$U_i(pu)=\frac{U_i}{U_{base}\sqrt{2}/\sqrt{3}}$$

式中，i 为 a、b、c 即三相的标志。当不勾选时，将以有名值输出测量结果，则不必设置基准电压值 U_{base}。

“Current measurement”：电流测量，有 yes（测量）与 no（不测量）两种可供选择。

“Currents in pu”：电流标幺值，当勾选时，被测电流将以标幺值（pu）形式输出测量结果，此时还必须设置“Base power”（基准功率）P_{base}。对此，电流标幺值有以下公式：

$$I_i(pu)=\frac{I_i}{P_{base}/(U_{base}\cdot\sqrt{2}/\sqrt{3})}$$

式中，i 为 a、b、c 即三相的标志。当不勾选时，则不必设置基准功率 P_{base}。其他参数设置与电压测量相同。

3.6.4　选路器或选择开关（Selector）

选路器（Selector）也叫选择开关，是 MATLAB 仿真库中的一个重要模块，提取的路径为 Simulink \ Simulink \ Signal Routing \ Selector，其图标如图 3-58 所示。

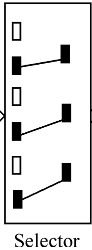


图 3-58　选路器（Selector）图标

图标左侧小黑方块与小空白方块数之和是其输入信号的个数或路数（即是参数“Input port size”中设置的数值），右侧小黑方块数是输出信号的个数或路数（即是参数“Index”中设置数组的维数），右侧小黑方块与左侧小黑方块有连线者表示信号连通，即由左侧输入传送到右侧输出，左侧没有被连线者一定是小空白方块。

选路器参数设置对话框如图 3-59 所示，只需要选择或设置以下 5 项参数。

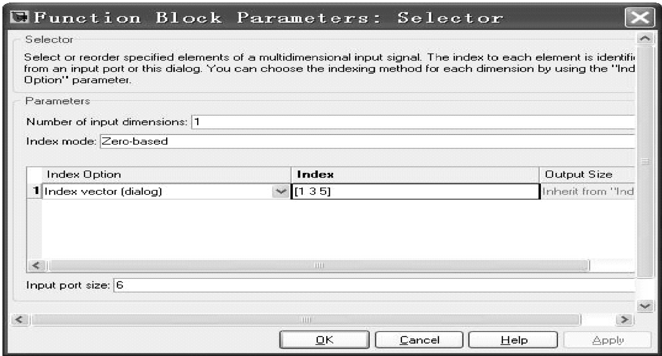


图 3-59　选路器（Selector）参数设置对话框

“Number of input dimensions”：输入信号维数，一般都是一维数据输入，就输入“1”。

“Index mode”：基数标志模式，可选择“Zero – based”（零基）与“One – based”（一基）来进行数数，“零基”者，即第一个数从 0 开始计数（0、1、2…）；“一基”者，即第一个数从 1 开始计数（1、2、3…）。本例两者均可选，而实际选择“Zero – based”（零基）。

“Index Option”：索引，有“Select all”（选择全部）、“Index vector（dialog）”（标注向量）等多项选择。一般用“Index vector（dialog）”。

“Index”：用数组的形式设置输入向量元素中哪些元素的信号要传送到输出端，数组的维数是右侧小黑方块数，即输出信号的个数。数组的元素顺序号，可按“零基”或“一基”计数。请注意，图 3-59 是在“Zero – based”（零基）下，故设置为［1 3 5］，即第 1 个、第 3 个、第 5 个元素；若采用“One – based”（一基），则应设置为［2 4 6］。

还需注意，选择了“Index vector（dialog）”后，用鼠标指向“Index”下的空白框并单击，只要空白框的四周界线变成黑线，在其中的原信息并不消失的情况下，就直接输入要设置的带方括号的数组元素顺序号，例如字符［1 3 5］或［2 4 6］等。

“Input port size”：选路器输入信号的个数或路数，设置的数值应与输入到选路器的模块相配合，这里设置为“6”。

3.7 用“SimPowerSystems”创建系统仿真模型

在学习并熟悉了本章“SimPowerSystems”实体图形化模型库里各种模块的提取路径、功能、图标与参数设置后就可以创建控制系统的仿真模型。现以第 13 章中【例 13-3】的模型 sx2L1303. mdl 与【例 13-4】的模型 sx2L1304. mdl 作为学习本章的示例。

【例 3-1】 试用 SimPowerSystems 模型库模块，建立转速闭环直流脉宽 PWM – M 调速系统的仿真模型。

解：创建转速闭环直流脉宽 PWM – M 调速系统的仿真模型 sx2L0301. mdl，如图 3-60 所示。细节请参见【例 13-3】。

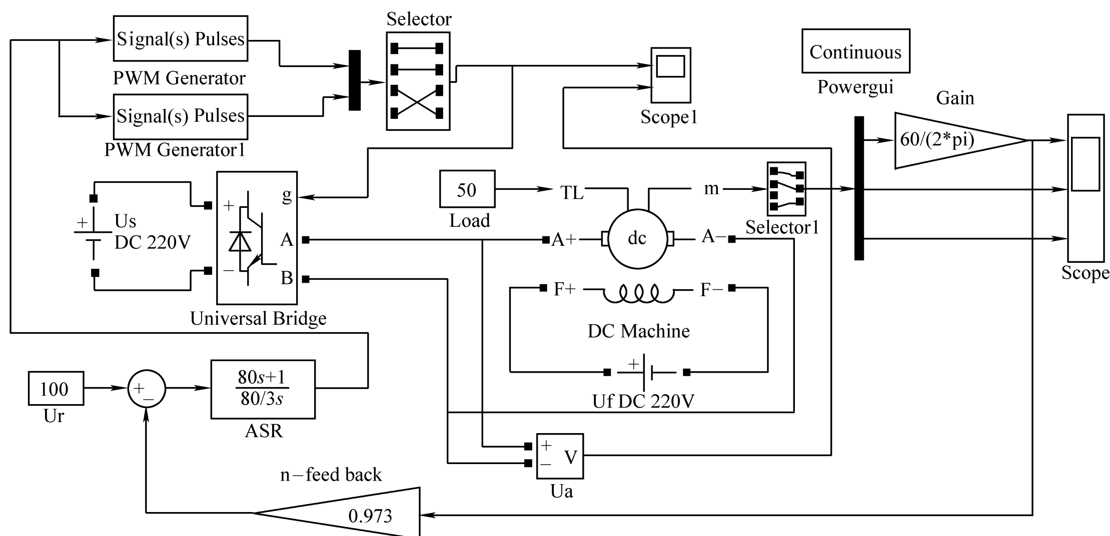


图 3-60 转速闭环脉宽 PWM – M 调速系统仿真模型 sx2L0301. mdl

【例 3-2】 试用 SimPowerSystems 模型库模块，建立带转速微分负反馈的双闭环直流V－M调速系统仿真模型。

解： 创建带转速微分负反馈的双闭环直流 V－M 调速系统仿真模型 sx2L0302. mdl，如图 3-61 所示。细节请参见【例 13-4】。

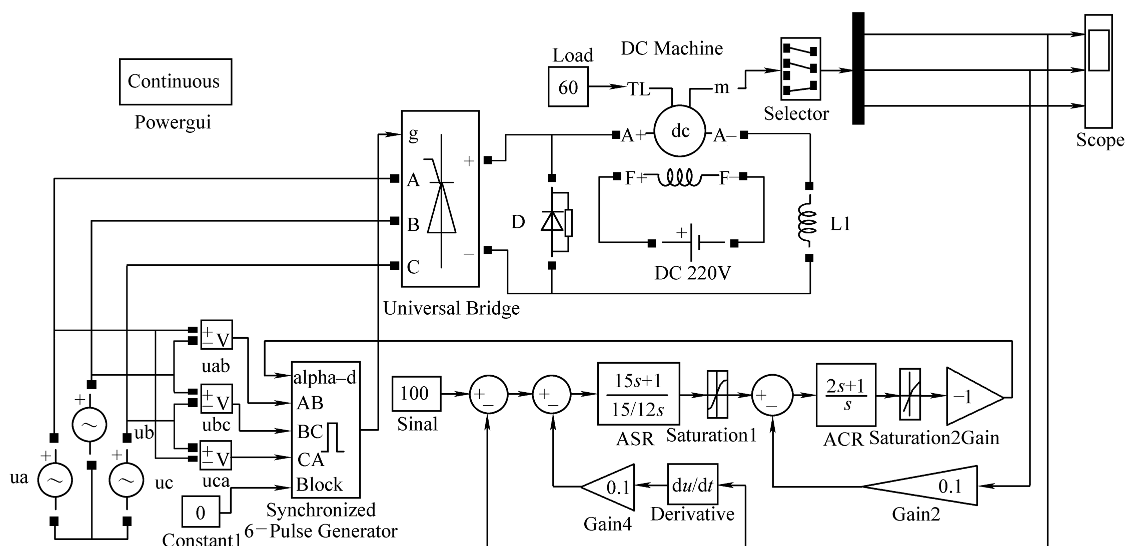


图 3-61　带转速微分负反馈的双闭环直流调速系统的模型 sx2L0302. mdl

第4章　控制系统数学模型的 MATLAB 实现

数学模型是控制系统计算与仿真的基础。在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中，已经介绍传递函数模型、零极点增益模型、状态空间模型与动态结构图模型 4 种。前三种数学模型是纯数学表达式形式的，它们之间可以用 MATLAB 函数进行互相转换，而动态结构图模型则是传递函数模型的图形化形式，它虽然是图，但是已被赋予了系统模型的所有信息，是一个异常重要的工具。

为方便读者计算，作者开发了传递函数、零极点增益与状态空间三种模型之间相互转换的函数 tfto2. m、zpkto2. m、ssto2. m，有关函数存储与运行方式请参见文献［1］，其源程序与用法参见附录。

可以将前三种模型按第 2 章建立动态结构图模型的方法转换成第 4 种模型，用 MATLAB 系统函数 linmod2()可以将动态结构图模型转换成状态空间模型，进而得到全部前三种模型。所以 4 种数学模型是完全可以互相转换、完全同一控制系统的不同表达形式。

4.1　设置或修改 LTI 对象的属性值函数 set()

函数指令 set(tf)可显示传递函数模型对象的所有属性,tf 模型对象关键属性如表 4-1 所示。

表 4-1　传递函数模型 tf 对象关键属性

属性名	功　能	属性值类型
den	传递函数分母系数	由数值行向量组成的单元阵列
num	传递函数分子系数	由数值行向量组成的单元阵列
Variable	传递函数变量	's','p','z','q'或者'z^-1'之一

set(zpk)可以显示零极点增益模型对象的所有属性，zpk 模型对象关键属性如表 4-2 所示。

表 4-2　零极点增益模型 zpk 对象关键属性

属性名	功　能	属性值类型
k	增益	二维矩阵
p	极点	由数值行向量组成的单元阵列
Variable	零极点模型变量	's', 'p', 'z', 'q'或者'z^-1'之一
z	零点	由数值行向量组成的单元阵列

函数指令 set(ss) 显示状态空间模型对象的所有属性，ss 模型对象关键属性如表 4-3 所示。

在控制系统工具中，三种对象 tf、zpk、ss 具有一些共同的属性如表 4-4 所示。

表 4-3　状态空间模型 ss 对象关键属性

属性名	功　　能	属性值类型
a	系数矩阵 ***A***	二维矩阵
b	系数矩阵 ***B***	二维矩阵
c	系数矩阵 ***C***	二维矩阵
d	系数矩阵 ***D***	二维矩阵
e	系数矩阵 ***E***	二维矩阵
StateName	状态变量名	字符串单元向量

表 4-4　模型共有属性

属性名	功　　能	属性值类型
InputName	输入变量名	字符串单元向量
Notes	模型描述	文本
OutputName	输出变量名	字符串单元向量
Ts	采样周期	数值标量
Td	输入延时	数值向量
Userdata	附加数据	任意数据类型

特别提醒读者注意的是，表 4-4 中输入延时 Td 的设定（即函数命令 set(sys,'Td',tau)），对于过程控制里大延时系统的程序设计是非常有用的。

4.2　控制系统数学模型

微分方程是自动控制系统最原始的数学模型，它反映系统动态运行规律。时域分析中要介绍应用拉普拉斯变换定义传递函数，还有基于传递函数图形化形式的动态结构图，即微分方程、传递函数、动态结构图是控制系统的三类基本数学模型。请看以下示例。

【例 4-1】　阻容 RC 网络如图 4-1 所示，试求以 u_c 作输出，以 u_r 作输入的微分方程与传递函数模型。

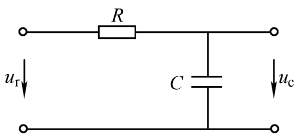


图 4-1　阻容 RC 网络

解：1）用符号运算的程序列写微分方程。

```
clear;syms i ur ucp uc R C;
ur = R * i + uc;ur = subs(ur,i,C * ucp),
```

程序运行后得到微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_c=u_r$$

需要说明：①由 $u_c=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$ 有 $i=C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$；②ucp 即为 $u'_c=\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$。

2）用 RC 复阻抗的分压系数求传递函数模型。

```
clear;syms R C s Ur Uc;
Uc = simple(Ur * (1/(s * C))/(R + 1/(s * C)));G = Uc/Ur,
```

程序运行后得到传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{RCs+1}$$

需要说明：①R 的复阻抗 $Z_R=R$；②C 的复阻抗 $Z_C=\frac{1}{sC}$。

【例 4-2】　RLC 网络如图 4-2 所示，试求以 u_c 作输出，以 u_r 作输入的微分方程与传递函数模型。

解：1）用符号运算的程序列写微分方程。

```
clear;syms i ip ur ul ucpp ucp uc R L C;
ip = C * ucpp;ul = L * ip;
```

```
ur = R * i + ul + uc; ur = subs(ur, i, C * ucp),
```

程序运行后得到微分方程

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=u_r$$

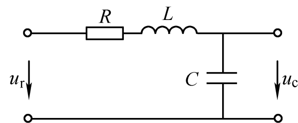


图 4-2 RLC 网络

需要说明：①电感两端的电压 ul = L * ip 即 $u_l=L\frac{di}{dt}$；②有 $i=C\frac{du_c}{dt}$，$\frac{di}{dt}=C\frac{d^2u_c}{dt^2}$写成 ip = C * ucpp；③ucpp 即为 $u''_c=\frac{d^2u_c}{dt^2}$。

2）符号运算求传递函数模型。

```
clear; syms R C L s Ur Uc;
Uc = simple(Ur * (1/(s * C))/(R + s * L + 1/(s * C))); G = factor(Uc/Ur),
```

程序运行后得到传递函数

$$G(s)=\frac{U_C(s)}{U_R(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

【例 4-3】 图 4-3 为控制系统校正时用到的同相输入端输入、反相输入端接地的调节器。试求其传递函数。

解： 利用输出与输入复阻抗之比求系统传递函数。

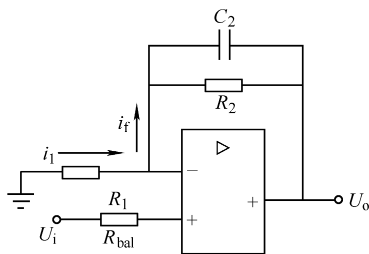


图 4-3 同相输入端输入的调节器

设输入回路的复阻抗为 $Z_1=R_1$。反馈回路的复阻抗 Z_2，那么，有

$$\frac{1}{Z_2}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{\frac{1}{C_2s}}=\frac{R_2C_2s+1}{R_2}$$

即得

$$Z_2=\frac{R_2}{R_2C_2s+1}$$

图 4-3 为运算放大器的同向输入，反向输入端不是“虚地”。根据运算放大器的“虚短”与“虚断”，那么 $U_-=U_+=U_i$，$i_1=i_f$，即有$\frac{0-U_-(s)}{R_1}=\frac{U_-(s)-U_o(s)}{Z_2}\Rightarrow\frac{0-U_-(s)}{R_1}=\frac{U_-(s)-U_o(s)}{\frac{R_2}{R_2C_2s+1}}$

$$\Rightarrow\frac{-U_i(s)}{R_1}=\frac{U_i(s)-U_o(s)}{R_2}(R_2C_2s+1)$$

$$\Rightarrow\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{R_2+R_1(R_2C_2s+1)}{R_1(R_2C_2s+1)}=\frac{R_2+R_1+R_1R_2C_2s}{R_1(R_2C_2s+1)}$$

则同相输入端输入、反相输入端接地的调节器传递函数为

$$G_c(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{(R_1+R_2)\left(1+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_2s\right)}{R_1(R_2C_2s+1)}=K\frac{\tau s+1}{Ts+1}$$

式中，$K=\dfrac{R_1+R_2}{R_1}$、$\tau=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_2$、$T=R_2C_2$，而平衡电阻 $R_0=R_1//(R_2+R_3)$。

【例 4-4】 试推导负反馈连接的等效传递函数 $\Phi_{cr}(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$ 与 $\Phi_{cn}(s)=\dfrac{C(s)}{N(s)}$。

解：1）对负反馈连接（见图 4-4）求 $\Phi_{cr}(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

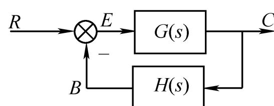


图 4-4　负反馈连接

```
clear;syms R C E B G H;
B=H*C;E=R-B;C=E*G;C=expand(C),
```

程序运行后得到

C = G * R - G * H * C

移项做恒等变换得到

$$\Phi_{cr}(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

2）对图 4-5 求 $\Phi_{cn}(s)=\dfrac{C(s)}{N(s)}$。

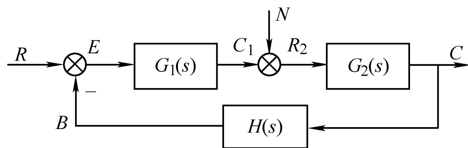


图 4-5　带扰动的负反馈连接

```
clear;syms N C C1 R R2 E B G1 G2 H;
B=H*C;R=0;E=R-B;C1=E*G1;R2=C1
+N;
C=R2*G2;C=expand(C),
```

程序运行结果

```
C = -G2*H*C*G1+G2*N
```

移项做恒等变换得到

$$\Phi_{cn}(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

对于较复杂的系统，可能由多个微分方程组成的方程组来描述。要计算其指定输出与输入间的传递函数时，先将系统微分方程组改写成象方程组，其要点是：将微分方程中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 换成 s，将 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ 换成 s^2，将 $\int\mathrm{d}t$ 换成 $\dfrac{1}{s}$，将时域量换成对应的复域量的象方程组，注意两种方程组的结构、项数、系数与阶次完全一致；再对对象方程组求解，指定输出量与输入量间的关系式；最后求传递函数 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

根据系统的象方程组可以绘制系统动态结构（方框）图。其方法如下：

① 根据传递函数的定义，按“输入 × 传递函数方框 = 输出”绘制每一个传递函数方框。

② 以系统的输入作为第一个环节的输入，将第一个环节的输出作为第二个环节的输入，依此类推，以系统的输出作为最后一个环节的输出。按此方法用带箭头的信号线依此连接。

③ 关注信号综合（叠加）点的信号个数与符号，特别是构成闭环的负反馈信号。

④ 关注信号引出点的位置以及信号引出的去向。

⑤ 将图中相同的信号直接用线连接。

⑥ 在带箭头的信号线旁标注为信号的 Laplace 变换量。请看以下示例。

【例 4-5】 已知系统微分方程为

$$\begin{cases} x_1 = r(t) - c(t) \\ x_2 = \tau \dfrac{dx_1}{dt} + K_1 x_1 \\ x_3 = K_2 x_2 \\ x_4 = x_3 - K_5 c(t) \\ \dfrac{dx_5}{dt} = K_3 x_4 \\ T\dfrac{dc(t)}{dt} + c(t) = K_4 x_5 \end{cases}$$

式中，$r(t)$是输入量；$c(t)$是输出量；x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 为中间变量；K_1，K_2，K_3，K_4，K_5，T，τ 为常量。试绘制系统动态结构图，并求传递函数 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

解：1）绘制系统动态结构图如图 4-6 所示。

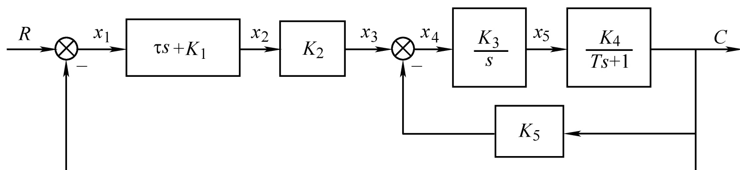


图 4-6　双闭环系统

2）用符号运算的程序求传递函数 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

① 求 $R(s)$。

```
clear;syms s C R X1 X2 X3 X4 X5 K1 K2 K3 K4 K5 T tau;
X5 = (T * s + 1) * C/K4;X4 = s * X5/K3;X3 = X4 + K5 * C;
X2 = X3/K2;X1 = X2/(tau * s + K1);R = C + X1,
```

程序运行结果

```
R  =  C + (s * (T * s + 1) * C/K4/K3 + K5 * C)/K2/(tau * s + K1)
```

② 求 $C(s)$。

```
clear;syms s C R X1 X2 X3 X4 X5 K1 K2 K3 K4 K5 T tau;
[C] = solve('R = C + (s * (T * s + 1) * C/K4/K3 + K5 * C)/K2/(tau * s + K1)','C'),
```

程序运行结果

```
C = R/(K4 * K3 * K2 * tau * s + K4 * K3 * K2 * K1 + T * s^2 + s + K5 * K4 * K3) * K4 * K3 * K2 * (tau * s +
K1)
```

即传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_2 K_3 K_4 (\tau s + K_1)}{Ts^2 + K_2 K_3 K_4 \tau s + s + K_1 K_2 K_3 K_4 + K_3 K_4 K_5}$$

用 Simulink 建立的系统结构图模型是第 4 种系统数学模型，在以下系统模型的化简里，显示了其独特的作用。

4.3　控制系统模型转换与化简

在 MATLAB 里，可用 4 种数学模型表示控制系统，其中前三种用数学表达式描述即已经介绍的：传递函数模型、零极点增益模型与状态空间模型。每种模型都有连续系统的及离散系统的两种类别。基于传递函数的图形化形式——动态结构图就是 MATLAB 里的 Simulink 结构图，为第 4 种数学模型。

已经说明过，实际工程里要解决自动控制问题所需用的数学模型与该问题所给定的已知数学模型往往不一致；或者要解决问题最简单而又最方便的方法所用到的数学模型与该问题所给定的已知数学模型不同，此时，就需要对自控系统的数学模型进行转换。

一个复杂的控制系统建立后，不是要对它计算就是要对其仿真。这就是说，要对系统化简进而求其总闭环传递函数。在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中，已经介绍了环节串联连接、并联连接、反馈连接的化简规则。自动控制原理里，也讨论过信号综合点（或叠加点）与引出点越过传递函数方框前移与后移的等效变换规则，还有信号综合点相互之间与信号引出点相互之间移动的等效变换规则。这些基本规律非常重要，在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》与本书里会多处用到。

【例 4-6】　已知一造纸工业中的网前箱为一加压液流箱系统。该系统的状态变量是箱中的液位 $h(t)$ 与料浆的总压头 $H(t)$，输入变量是料浆流入量 $u_1(t)$ 与空气流入量 $u_2(t)$，输出变量就是状态变量 $H(t)$ 与 $h(t)$ 本身。系统状态空间模型为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{H}(t)\\ \dot{h}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.395 & 0.01145\\ -0.011 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H(t)\\ h(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.03362 & 1.038\\ 0.000966 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=[1\quad 1]\begin{bmatrix}H(t)\\ h(t)\end{bmatrix}+[0\quad 0]\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

试求多个输入到输出的传递函数模型与多个输入到输出的零极点增益模型。

解：给出以下调用自编函数 ssto2. m 的程序求解。

```
clear;A = [ -0.3950   0.01145; -0.011  0];
B = [0.03362  1.038;0.000966  0];C = [1  1];D = [0  0];
key = 1;G = ssto2(key,A,B,C,D);
key = 2;G = ssto2(key,A,B,C,D);
```

程序执行后得到：

系统从第一个输入到输出的传递函数模型为

$$G_{1\text{tf}}(s)=\frac{0.03459s+0.00002281}{s^2+0.395s+0.000126}$$

从第二个输入到输出的传递函数模型为

$$G_{2\text{tf}}(s)=\frac{1.038s-0.01142}{s^2+0.395s+0.000126}$$

从第一个输入到输出的零极点增益模型为

$$G_{1\text{zpk}}(s)=0.034586\frac{(s+0.0006595)}{(s+0.3947)(s+0.0003191)}$$

从第二个输入到输出的零极点增益模型为

$$G_{2\text{zpk}}(s)=1.038\frac{(s-0.011)}{(s+0.3947)(s+0.0003191)}$$

【例 4-7】 设一系统传递函数 $G(s)=\dfrac{6s+24}{s^3+6s^2+11s+6}$，试将其转换为零极点增益模型与状态空间模型，并予验证。

解： 1）给出以下调用自编函数 tfto2. m 的程序求解。

```
clear; n=[6 24];d=[1 6 11 6];
key=1;G=tfto2(key,n,d);
key=2;G=tfto2(key,n,d);
```

程序运行后得到系统零极点增益模型 $G(s)=\dfrac{6(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$，还有系统的状态空间模型 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-6 & -2.75 & -1.5\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[0\quad 0.75\quad 3]\boldsymbol{x}\end{cases}$。

2）给出以下调用自编函数 zpkto2. m 的程序验证。

```
clear;k=6;z=-4;p=[-1,-2,-3];
key=1;G=zpkto2(key,z,p,k);
```

3）给出以下调用自编函数 ssto2. m 的程序验证。

```
clear;A=[-6 -2.75 -1.5;4 0 0;0 1 0];B=[2;0;0];C=[0 0.75 3];
D=0;key=1;G=ssto2(key,A,B,C,D);
key=2;G=ssto2(key,A,B,C,D);
```

【例 4-8】 如图 4-7 所示电枢控制的他励直流电机拖动系统，试建立输出轴转角 θ 与电枢电压 u_a 之间的传递函数。

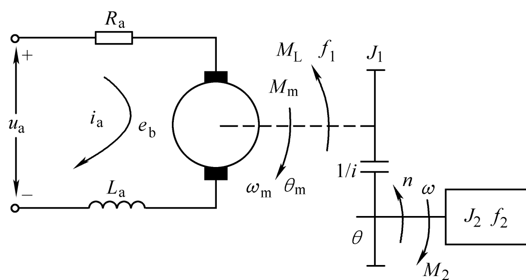


图 4-7　他励直流电机拖动原理图

解： 1）对图 4-7 他励直流电机拖动，假设：u_a、i_a、R_a、L_a、e_b 分别为电枢电压、电流、电阻、电感与反电动势；M_m、θ_m、ω_m、J、f 分别为电机转轴的电磁力矩、转角、角速度、转动惯量与黏性摩擦系数；θ、i 分别为负载转角、减速器的减速比。

那么系统有动态方程

$$u_a=R_a i_a+L_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}+e_b,e_b=K_b\omega_m,$$

$$M_m = M_L + f\omega_m + J\frac{d\omega_m}{dt}, i_a = \frac{M_m}{C_m}, \omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}, \theta = \frac{\theta_m}{i}$$

2）对以上关系式变换方程组消去中间变量求 θ 与 u_a 之间的关系（若 $M_L=0$）。

```
clear;syms Ua Ra La Ia Eb Kb omegam s J f Cm zetam i zeta Mm ML;
[zetam] = solve('zeta = zetam/i','zetam');
omegam = s * zetam; Ia = solve('Mm = Cm * Ia','Ia');
ML = 0; Ia = subs(Ia,[Mm],[ML + f * omegam + J * s * omegam]);
Eb = Kb * omegam; Ua = Ra * Ia + La * s * Ia + Eb,
```

程序运行结果

```
Ua = Ra * (f * s * zeta * i + J * s^2 * zeta * i)/Cm + La * s * (f * s * zeta * i + J * s^2 * zeta * i)/Cm + Kb * s * zeta
* i
```

3）输出轴转角 θ 与电枢电压 u_a 之间的传递函数。

```
clear;syms Ua Ra La Ia Eb Kb omegam s J f Cm zetam i zeta Mm ML;
[zeta] = solve('Ua = Ra * (f * s * zeta * i + J * s^2 * zeta * i)/Cm + La * s * (f * s * zeta * i + J * s^2 * zeta * i)/
Cm + Kb * s * zeta * i   ','zeta');G = zeta/Ua,
```

程序运行后得到

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U_a(s)} = \frac{C_m/i}{s(JL_a s^2 + R_a Js + L_a fs + R_a f + K_b C_m)}$$

4.4　用系统 Simulink 结构图模型化简控制系统模型

MATLAB 系统函数命令 linmod() 与 linmod2() 的重要功能就是将系统的 Simulink 结构图模型转换为系统状态空间模型，进而转换为传递函数与零极点增益模型，那么系统的计算与仿真就很简单了。先看一个简单的示例。

【例 4-9】 图 4-8 所示为一个高阶系统的 Simulink 结构图模型 sx2L0409 . mdl，试用函数 linmod2( ) 将系统模型图经状态空间模型转换成系统传递函数。

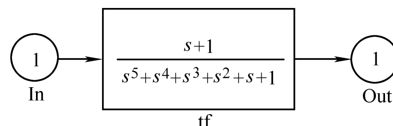


图 4-8　高阶系统模型 sx2L0409. mdl

解：请读者仔细体味以下程序。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L0409');
key = 1;G = ssto2(key,A,B,C,D);
```

程序运行后得到

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}$$

【例 4-10】 已知铣床光电跟踪旋转系统的 Simulink 模型图 sx2L0410. m 如图 4-9 所示。试用函数 linmod()将系统模型图经状态空间模型转换成系统传递函数。

解：再次给出调用系统函数 linmod2()与自编函数 ssto2. m 的程序求解。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L0410');
key = 1;G = ssto2(key,A,B,C,D);
```

程序运行后得到系统传递函数

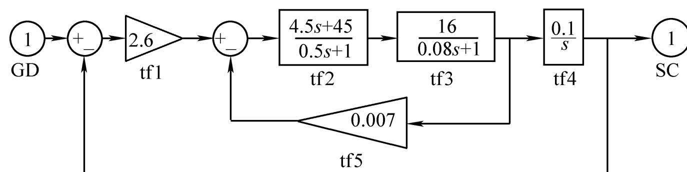


图 4-9　铣床光电跟踪旋转系统

$$\Phi(s)=\frac{468s+4680}{s^3+27.1s^2+619s+4680}$$

由以上两题的解算可知：

1）无论多么复杂的控制系统，只要绘制出 Simulink 动态结构图模型，即可将系统化简进而求其传递函数。就计算的可行性而言，所有系统框图等效变换的法则、信号流图的 Mason 公式等（这些内容对学生而言还是应该学的），都被本题的几条程序所取代了。科学研究与工程计算里这是一个既简单又方便而且准确的科学方法。

2）特别提醒读者注意，控制系统必须是具体数值系统，不能带文字符号，例如不能出现 $G_1(s)=\frac{b}{s+a}$，因为 Simulink 动态结构图模型没有定义字符。

【例 4-11】　已知图 4-10 所示系统中 $G_1(s)=\frac{1}{s+1}$与 $G_2(s)=\frac{2}{s+2}$，①试用 Mason 公式求系统闭环传递函数 $\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$；②再用函数 linmod2()将系统模型图经状态空间模型转换并求其系统的传递函数。

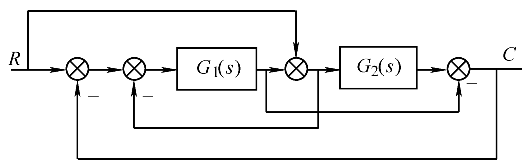


图 4-10　复杂系统

解： 1）用 Mason 公式求系统闭环传递函数公式。

① 3 个反馈回路传递函数：$L_1=-G_1G_2$，$L_2=-G_1$，$L_3=-G_1$

② 4 条前向通道：$P_1=G_2$，$P_2=G_1G_2$，$P_3=G_1$，$P_4=-G_1$

③ 求主特征式：$\Delta=1-\sum_{a=1}^{3}L_a=1+2G_1+G_1G_2$

④ 求余子式：$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=1$

⑤求传递函数 $\Phi(s)=\frac{\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_2+G_1G_2}{1+2G_1+G_1G_2}$

2）用 Mason 公式求系统闭环传递函数。

```
clear;syms s G1 G2 phi;
G1 =1/(s+1);G2 =2/(s+2);
phi =factor(((G1 +1) * G2)/(1 +2 * G1 +G1 * G2)),
```

程序运行后得到系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2s+4}{s^2+5s+8}$$

3）对图 4-10 所示系统绘制模型 sx2L0411. mdl 如图 4-11 所示，用函数 linmod2 () 求$\Phi(s)$。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L0411');
key = 1;G = ssto2(key,A,B,C,D);
```

程序运行后得到与 Mason 公式求得的完全相同的结果。

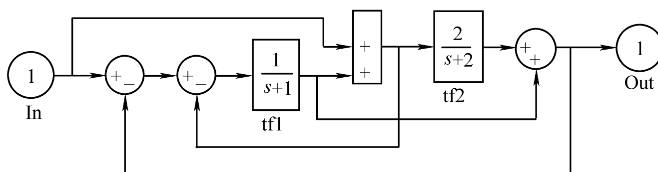


图 4-11　复杂系统模型图 sx2L0411. mdl

习　题

【4-1】 两级 RC 阻容无源网络如图 4-12 所示，试求以 u_c 为输出、以 u_r 为输入的微分方程与传递函数模型。求当 $R_1 = 20\text{k}\Omega$、$R_2 = 40\text{k}\Omega$、$C_1 = 50\mu\text{F}$、$C_2 = 25\mu\text{F}$ 时的传递函数模型与零极点增益模型。

【4-2】 RC 网络如图 4-13 所示，当 $R_1 = 20\text{k}\Omega$、$R_2 = 40\text{k}\Omega$、$C_1 = 50\mu\text{F}$、$C_2 = 25\mu\text{F}$ 时，试求以 u_c 为输出、以 u_r 为输入的传递函数模型与零极点增益模型。

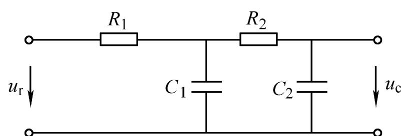


图 4-12　两级 RC 网络

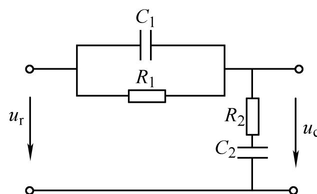


图 4-13　RC 网络

【4-3】 控制系统校正时常采用的准比例积分调节器如图 4-14 所示，试求以 U_{ex}为输出量、以 U_{in}为输入量之调节器的传递函数。

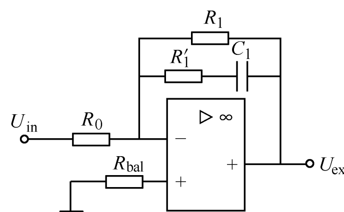


图 4-14　准比例积分调节器

【4-4】 系统微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1[r(t) - c(t) - \beta x_3] \\ x_2 = \tau\dot{r}(t) \\ T\dot{x}_3 + x_3 = x_1 + x_2 \\ \dot{c}(t) = k_2 x_3 \end{cases}$$

式中，$r(t)$是输入量；$c(t)$是输出量；x_1，x_2，x_3 为中间变量；β，τ，k_1，k_2 为常量。试绘制系统动态结构框图，并求传递函数$\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

【4-5】 已知系统微分方程为

$$\begin{cases} x_1 = K(r-c) \\ x_2 = \tau \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = x_1 + x_2 - x_3 \\ T\dfrac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t} + x_4 = x_3 + x_5 \\ c = x_4 - n \\ x_5 = T\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + n \end{cases}$$

式中，$r(t)$是输入量；$c(t)$ 是输出量；$n(t)$是扰动量；x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 为中间变量；K，τ，T 为常量。试绘制系统动态结构图，并求传递函数$\dfrac{C(s)}{R(s)}$与$\dfrac{C(s)}{N(s)}$。

【4-6】 试对图 4-15 与图 4-16 分别推导闭环控制系统的误差传递函数 $\Phi_{\mathrm{er}}(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)}$与 $\Phi_{\mathrm{en}}(s)=\dfrac{E(s)}{N(s)}$。

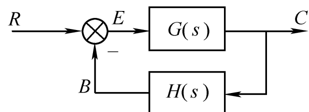


图 4-15　负反馈连接

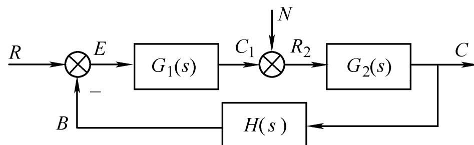


图 4-16　带扰动的负反馈连接

【4-7】 设一高阶系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{0.0001s^3+0.0218s^2+1.0436s+9.3599}{0.0006s^3+0.0268s^2+0.6365s+6.2711}$$

试将系统传递函数模型转换为状态空间模型及零极点增益模型。

【4-8】 已知离散系统动态方程为
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix} -2.8 & -1.4 & 0 & 0 \\ 1.4 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8 & -0.3 & -1.4 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k)=[0\quad 0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

试求采样周期 $T_{\mathrm{s}}=0.1\mathrm{s}$ 时，系统传递函数模型的两个向量 **num**、**den** 与系统零极点增益模型。

【4-9】 已知双环调速系统电流环内前向通道模型 sx2X0409. mdl 如图 4-17 所示，带给定滤波与反馈滤波的电流环系统模型 sx2X0409a. mdl 如图 4-18 所示。试分别求图 4-17 与图 4-18 的等效传递函数及等效空间模型。

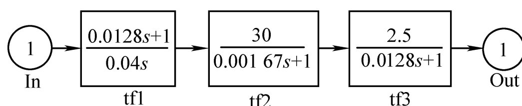


图 4-17　双环系统电流环内前向通道模型

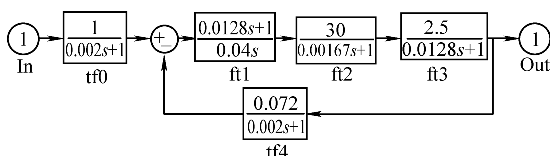


图 4-18　带给定滤波与反馈滤波电流环系统模型

【4-10】 自整角机位置随动系统的动态结构图模型 sx2X0410. mdl 如图 4-19 所示。试用 linmod() 函数求系统闭环传递函数并验证。

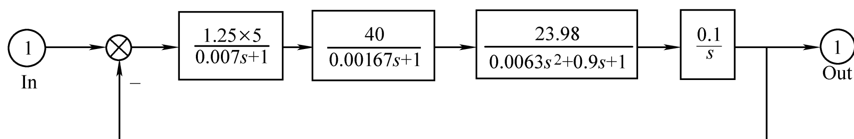


图 4-19　自整角机位置随动系统 Simulink 结构图

【4-11】　当 $G_1=\frac{1}{s+1}$、$G_2=\frac{2}{s+2}$、$G_3=\frac{3}{s+3}$、$G_4=\frac{4}{s+4}$、$G_5=\frac{5}{s+5}$时，试用 linmod() 函数对图 4-20 所示复杂系统求 $\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$。

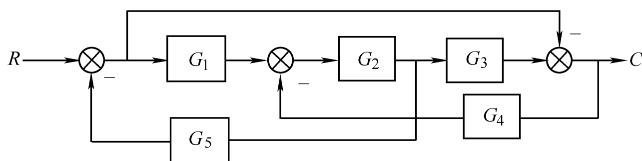


图 4-20　复杂系统

第 5 章　连续系统时域分析的 MATLAB 实现

控制系统最基本的问题就是求在输入信号作用下的输出响应，此即为控制系统时域分析。求解系统的微分方程，就能得到系统响应的时域解。用 Laplace 变换的方法解微分方程简单而方便。《控制系统 MATLAB 计算及仿真》对有关基本概念已有充分复习。

需要说明的是，控制系统稳定性分析与稳态误差计算理论都是系统时域分析的范畴。但是，求解控制系统的输出响应必须用 Laplace 变换，其内容既丰富又重要，作者只好将控制系统稳定性分析与稳态误差计算的 MATLAB 实现另设章节加以叙述。

本章使用的 MATLAB 系统函数命令有laplace()、ilaplace()、step()、impulse ()、initial()、linmod() 等，还有作者编制的 MATLAB 函数程序 zetosi. m、trtp. m、can. m、cats. m、sitoze. m、perf. m,其源程序与用法参见附录。有关函数存储与运行方式,请参见参考文献[1],后续自编函数同此。

5.1　Laplace 变换及反变换的 MATLAB 实现

在数学中经常采用一种变换,把较复杂的运算转化为简单运算。例如,数量的乘积或商可以通过对数,变换成对数的和或差,然后再取反对数即可求得原来数量的乘积或商。Laplace 变换是一个重要工具。Laplace 变换能把微分方程转换为代数方程,使微分方程的求解简单而方便。另外,控制系统基本数学模型之一的传递函数也是用 Laplace 变换来定义的,经典控制理论就是在传递函数概念基础上建立起来的。

5.1.1　MATLAB 系统中 Laplace 变换与反变换的函数命令

Laplace 变换是将连续(时间)函数的实变函数经过积分变换运算变换为一个复变函数的过程,Laplace 反变换正好相反。

Laplace 变换的 MATLAB 函数 laplace()的调用格式为

F = laplace(f)

这种格式函数是对默认独立变量为 t 的符号表达式 f 即 $f(t)$ 求其 Laplace 变换 $F(s)$，变换式 F 被默认为复变量 $s(s=\sigma+\mathrm{j}\omega)$ 的函数。这种命令格式中的 $f(t)$ 是原函数，$F(s)$ 是象函数。$F(s)$ 为被积函数对 t 的积分，即 $F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 。

Laplace 反变换的 MATLAB 函数 ilaplace()的调用格式为

f = ilaplace(F)

这种格式函数是对默认独立变量为 s 的象函数表达式 $F(s)$ 求其原函数 $f(t)$ 。

5.1.2　两个特殊函数的表示法

必须重提在 Laplace 变换中有两个非常重要而又特殊的函数：单位阶跃函数与单位脉冲

（或叫单位冲激）函数。这是 MATLAB 系统借用了 Maple 函数库[30]中的有关定义，以便编写 MATLAB 语句或程序时使用。

在 Maple 函数库中，单位阶跃函数 $u(t-a)=\begin{cases}1, & t\geqslant a\\ 0, & t<a\end{cases}$ 是用“Heaviside（t－a）”来定义的。所以在 MATLAB 运算中使用该函数时，必须把“Heaviside（t－a）”整体当做一个符号对象加以定义与使用，即用“u = sym('Heaviside(t－a)')”语句形式来定义，而不能当做 MATLAB 的函数加以调用。

在工程数学中，单位脉冲函数 $\delta(t)$ 定义为 $\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$。在 Maple 函数库中，单位脉冲函数 $\delta(t)$ 是用“Dirac”来命名的。Maple 库中的函数 Dirac(n，t)表示求单位脉冲函数的 n 阶导数，Dirac(t)被默认为 Dirac(0,t)。所以在 MATLAB 运算中使用该函数时，也必须把 Dirac(t)整体作为一个符号对象加以定义与使用，即用“u = sym('Dirac(t)')”语句形式来定义，也不能将其当做 MATLAB 的函数加以调用。

5.1.3　计算函数的 Laplace 变换

首先计算几个 Laplace 变换的基本公式。

【例 5-1】　求函数 $f(t)$ 为 1)1；2)$A\cdot t$;3)t^2；4)$A\cdot e^{at}$ 的 Laplace 变换 $F(s)$。

解：1)$f(t)=1$。

```
clear;syms s t; F=laplace(1,s),
```

语句运行后得到函数 $f(t)=1$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=L[f(t)]=L[1]=\dfrac{1}{s}$。当读者复习了 Laplace 反变换后，就会验证变换是否正确。在此仅对此题作验证，其他题读者可自行验证。

```
clear;syms s t; F=1/s; f=ilaplace(F),
```

语句运行后说明变换正确。

2）斜坡函数 $f(t)=A\cdot t$。

```
clear;syms A s t; F=laplace(A*t),
```

语句执行后得到函数 $f(t)=A\cdot t$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=L[f(t)]=L[A\cdot t]=\dfrac{A}{s^2}$。

3)函数 $f(t)=t^2$。

```
clear;syms s t; F=laplace(t^2),
```

语句执行后得到函数 $f(t)=t^2$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=L[f(t)]=L[t^2]=\dfrac{2}{s^3}$。

4）指数函数 $f(t)=A\cdot \mathrm{e}^{at}$。

```
clear;syms A a s t;F=laplace(A*exp(a*t)),
```

语句执行后得到函数 $f(t)=A\cdot \mathrm{e}^{at}$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=L[f(t)]=L[A\cdot \mathrm{e}^{at}]=\dfrac{A}{s-a}$。

【例 5-2】　求函数 $f(t)$ 为 1)$\cos\omega t$；2)$\mathrm{e}^{\mathrm{at}}\sin\omega t$；3)$\delta(t)$；4)$A\cdot t^2+B\cdot t^3$ 的 Laplace 变换 $F(s)$。

解：1）余弦函数 $f(t)=\cos\omega t$。

```
clear;syms s t omega
laplace(cos(t*omega)),
```

语句执行后得到 $F(s)=L[f(t)]=L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$。

2）函数 $f(t)=e^{at}\sin\omega t$。

```
clear;syms s t a omega;
F=laplace(exp(a*t)*sin(omega*t)),
```

语句执行后得到 $F(s)=L[f(t)]=L[e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$。

3）单位冲激函数 $\delta(t)$。

```
clear;syms s t; f=sym('Dirac(t)'); F=laplace(f,t,s),
```

语句执行后得到 $F(s)=L[f(t)]=L[\delta(t)]=1$ 。

再次提醒读者注意：①在 MATLAB 中，单位冲激函数 $\delta(t)$ 规定写成 Dirac(t)，而且第一个字母 D 必须为大写；②定义符号变量 Dirac(t)，在函数 sym() 的参数引用时两端必须加单引号。单位阶跃函数写成 Heaviside(t) 的规则同此。

4）函数 $f(t)=A\cdot t^2+B\cdot t^3$。

```
clear;syms s t A B;
F=laplace(A*t^2+B*t^3),
```

语句执行后得到 $F(s)=L[f(t)]=L[A\cdot t^2+B\cdot t^3]=\frac{2A}{s^3}+\frac{6B}{s^4}$，由此可得 Laplace 变换的线性性质如下。设 $F_1(s)=L[f_1(t)]$ 与 $F_2(s)=L[f_2(t)]$，A 与 B 为常数，则有

$$F(s)=L[A\cdot f_1(t)+B\cdot f_2(t)]=A\cdot F_1(s)+B\cdot F_2(s)$$

这可以执行以下 MATLAB 语句来验证。

```
clear;syms s t A B;
laplace(A*(sym('f1(t)'))+B*('f2(t)')),
```

必须说明，在 MATLAB 系统中，字符串"laplace(f(t)，t，s)"即为"$F(s)$"。

【例 5-3】 计算 Gamma 函数及幂函数 t^{m-1} 的 Laplace 变换。

解：1）MATLAB 中有很多特殊函数，Gamma 函数就是其中之一。积分变换中定义定积分 $\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{m-1}dt$ 为伽马函数，记为 $\Gamma(m)$，即 $\Gamma(m)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{m-1}dt, m>0$。

用以下 MATLAB 语句实现 Gamma 函数的定义。

```
clear;syms s t; m=sym('m','positive');
f=exp(-t)*t^(m-1); F=int(f,t,0,inf),
```

语句运行结果

```
F=gamma(m)
```

将 t^{m-1} 改为 t^m 再运行一次以下语句：

```
clear;syms s t;m=sym('m','positive');
f=exp(-t)*t^m;F=int(f,t,0,inf),
```

语句运行后得到 $\Gamma(m+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^m dt=m\Gamma(m)$ 。由上可知，当 m 为正整数时，有关系式 $\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)=m!$ 与关系式 $\Gamma(m)=(m-1)!$ 成立。

必须说明：①当 m 为正整数时的 MATLAB 实现语句 m = sym('m','positive') 是必需的，否则不能解算；②阶乘 $m! = 1\times2\times3\times\cdots\times m$，可用作者自编函数 pro. m 计算，参见【例 1－7】。在 MATLAB 中有函数命令 prod. m 计算一个向量或数组所有元素的乘积，这些元素可以不连续，但程序中必须写出全部所有元素，prod() 用来求阶乘时也必须写出全部元素。

2）求幂函数 t^{m-1} 的 Laplace 变换 $F(s)$。

求解幂函数 t^{m-1} 的 $F(s)$ 可以执行以下 MATLAB 语句：

```
clear;syms s t; m = sym('m','positive');
f = t^(m-1);F = laplace(f,t,s),
```

语句执行结果

F = gamma(m) * s^(-m)

即 t^{m-1} 的 $F(s)$ 为 $F(s) = L[t^{m-1}] = \dfrac{\Gamma(m)}{s^m} = \dfrac{(m-1)!}{s^m}$

【例 5-4】　求函数1) $f(t) = 3\sin t + 2\cos t$；2) $f(t) = \cos(2t + 45°)$；

3) $f(t) = e^{-t}u(t) + e^{-(t-1)}u(t-1) + \delta(t-2)$ 的象函数 $F(s)$。

解：1）$f(t) = 3\sin t + 2\cos t$

```
elear;syms s t;f = 3 * sin(t) + 2 * cos(t);F = laplace(f,t,s)
```

程序运行后得到 $F(s) = L[f(t)] = \dfrac{2s+3}{s^2+1}$。

2）$f(t) = \cos(2t + 45°)$

```
clear;syms s t;f = cos(2 * t + 45 * pi/180);F = laplace(f,t,s),
```

程序运行后得到 $F(s) = L[f(t)] = \dfrac{s-2}{\sqrt{2}(s^2+4)}$。

3）$f(t) = e^{-t}u(t) + e^{-(t-1)}u(t-1) + \delta(t-2)$

```
clear;syms s t;
f1 = exp(-t) * sym('Heaviside(t-0)');
f2 = exp(-t+1) * sym('Heaviside(t-1)');
f3 = sym('Dirac(t-2)');
f = f1 + f2 + f3;F = laplace(f,t,s),
```

程序运行后得到 $F(s) = L[f(t)] = \dfrac{1+e^{-s}}{s+1} + e^{-2s}$。

5.1.4　计算用图形表示函数的 Laplace 变换

理论研究中，经常要计算用图形表示的函数的 Laplace 变换。用图形表示的函数，一般都可以转化为典型基本函数的叠加。那么，这就可以用 Laplace 变换基本性质来求解。所以必须仔细观察并分析已知图形，运用解析几何知识，将其分解成多个已知基本函数之和，这是解题的基础。还必须熟练典型基本函数的 Laplace 变换公式。请看示例。

【例 5-5】　求图 5-1 所示单个矩形波的 Laplace 变换。

解：1）单个矩形波函数图形分析。单个矩形波可看成如图 5-2 所示两个阶跃函数的叠加。

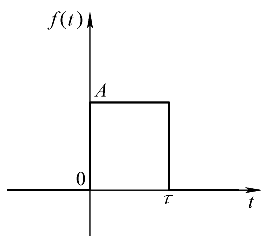


图 5-1　单个矩形波

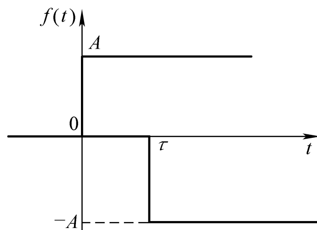


图 5-2　等效的两个阶跃函数叠加

图 5-2 所表示函数的表达式为

$$f(t)=A\cdot u(t)-A\cdot u(t-\tau)$$

2）求函数 Laplace 变换的 MATLAB 语句如下。

```
clear;syms A t; syms tau positive;
f = A * sym('Heaviside(t)') - A * sym('Heaviside(t-tau)');
F = laplace(f),
```

程序执行后得到单个矩形波的 Laplace 变换为

$$F(s)=L[f(t)]=L[A\cdot u(t)-A\cdot u(t-\tau)]=\frac{A}{s}(1-\mathrm{e}^{-\tau s})$$

【例 5-6】 对图 5-3 所示的函数，求其 Laplace 变换。

解： 1）图形所示函数分析。图 5-3 可以看成图 5-4 所示两个函数的叠加。

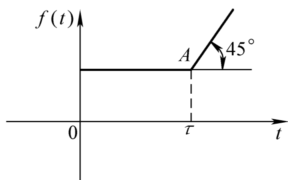


图 5-3　抬升的斜坡信号

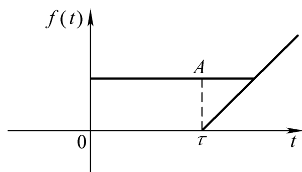


图 5-4　阶跃波与斜坡信号叠加

图 5-4 所表示函数的表达式为

$$f(t)=A\cdot u(t)+(t-\tau)\cdot u(t-\tau)$$

2）求阶跃波与斜坡信号叠加的 Laplace 变换。

```
clear;syms A t; tau = sym('tau','positive');
f = A * sym('Heaviside(t)') + (t-tau) * sym('Heaviside(t-tau)');
F0 = laplace(f);F = factor(F0),
```

程序运行后得到图 5-4 阶跃波与斜坡信号叠加的 Laplace 变换为

$$F(s)=L[f(t)]=L[A\cdot u(t)+(t-\tau)\cdot u(t-\tau)]=\frac{A}{s}+\frac{\mathrm{e}^{-\tau s}}{s^2}$$

当 $A=1$ 时，则有 $F(s)=L[f(t)]=L[1\cdot u(t)+(t-\tau)\cdot u(t-\tau)]=\dfrac{1}{s}+\dfrac{\mathrm{e}^{-\tau s}}{s^2}$

【例 5-7】 求图 5-5 所示单个直角三角形波的 Laplace 变换。

解： 1）图形所示函数分析。图 5-5 所示的直角三角形波可以看成图 5-6 所示的 3 个函数（2 个斜坡函数与一阶跃函数）的叠加，即图 5-6 所表示的函数表达式为

$$f(t)=t\cdot u(t)-(t-\tau)\cdot u(t-\tau)-\tau\cdot u(t-\tau)$$

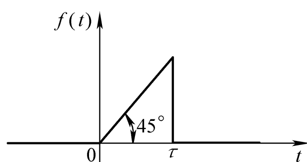


图 5-5　单个直角三角形波

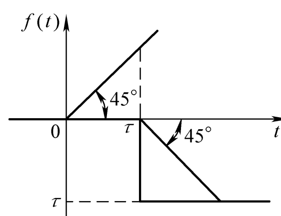


图 5-6　三个基本函数叠加

2）求三个基本函数叠加的 Laplace 变换。

```
clear;syms A t;tau = sym('tau','positive');
f1 = t * sym('Heaviside(t)');f2 = -(t - tau) * sym('Heaviside(t - tau)');
f3 = -tau * sym('Heaviside(t - tau)');F0 = laplace(f1 + f2 + f3);F = factor(F0),
```

程序运行后得到单个直角三角形波的 Laplace 变换为

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{1 - e^{-\tau s} - \tau s e^{-\tau s}}{s^2}$$

【例 5-8】 求图 5-7 所示的正弦周期交流电（振幅 $A=1$）整流半波函数的 Laplace 变换。

解：本题求解方法很多，在此要用《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中单个正弦半波的拉氏变换结果求解。

1）正弦交流电整流半波函数图形分析。图 5-7 所示的正弦交流电半波整流函数可以看成图 5-8 所示的所有第奇数个的单个正弦半波函数的叠加。由《控制系统 MATLAB 计算及仿真》可知，图 5-7 所表示的第 1 个正弦半波函数表达式为 $f(t) = \sin(\frac{2\pi t}{T}) \cdot u(t) + \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t - \frac{T}{2})\right] \cdot u(t - \frac{T}{2})$。

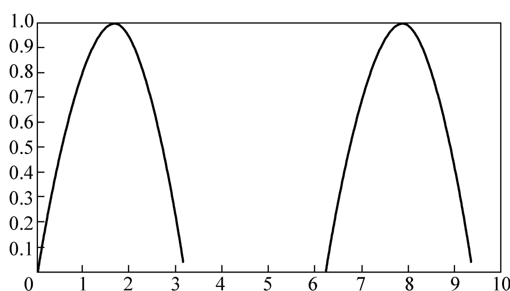


图 5-7　正弦交流电半波整流函数

2）第一个正弦半波函数的 Laplace 变换为

$$F(s) = L[f(t)] = L\left[\sin(\frac{2\pi t}{T}) \cdot u(t) + \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t - \frac{T}{2})\right] \cdot u(t - \frac{T}{2})\right]$$

$$= \frac{2\pi T}{s^2 T^2 + 4\pi^2}(1 + e^{-\frac{1}{2}Ts})$$

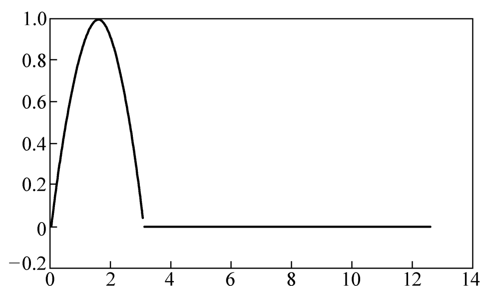


图 5-8　等效第奇数个单个正弦半波函数的叠加

3）求第 3 个半波的 Laplace 变换。

```
clear;syms  s  t;T = sym('T','positive');
f1 = sin(2 * pi * (t - T)/T) * sym('Heaviside(t - T)');
f2 = sin(2 * pi * (t - T - T/2)/T) * sym('Heaviside(t - T - T/2)');
F0 = laplace(f1 + f2);F = factor(F0),
```

语句执行后得到正弦交流电整流全波的第 3 个半波的 Laplace 变换为

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{2\pi T(\mathrm{e}^{-\frac{3Ts}{2}}+\mathrm{e}^{-Ts})}{s^2T^2+4\pi^2}$$

4）求第 5 个半波的 Laplace 变换。

```
clear;syms  s  t;T = sym('T','positive');
f1 = sin(2 * pi * (t - 2 * T)/T) * sym('Heaviside(t - 2 * T)');
f2 = sin(2 * pi * (t - 2 * T - T/2)/T) * sym('Heaviside(t - 2 * T - T/2)');
F0 = laplace(f1 + f2);F = factor(F0),
```

语句执行后得到正弦交流电整流半波的第 5 个半波的 Laplace 变换为

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{2\pi T(\mathrm{e}^{-\frac{5Ts}{2}}+\mathrm{e}^{-2Ts})}{s^2T^2+4\pi^2}$$

5）由正弦交流电半波整流的第 1 个、第 3 个、第 5 个半波之和，用归纳法推导出整流半波 Laplace 变换的一般表达式为

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}Ts})+\frac{2\pi T(\mathrm{e}^{-\frac{3Ts}{2}}+\mathrm{e}^{-Ts})}{s^2T^2+4\pi^2}+\frac{2\pi T(\mathrm{e}^{-\frac{5Ts}{2}}+\mathrm{e}^{-2Ts})}{s^2T^2+4\pi^2}+\cdots=\\&=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}Ts})\cdot(1+\mathrm{e}^{-Ts}+\mathrm{e}^{-2Ts}+\cdots)\end{aligned}$$

6）求无穷级数$(1+\mathrm{e}^{-Ts}+\mathrm{e}^{-2Ts}+\cdots)$的和，必须使用 MATLAB 求和函数 symsum()。

```
clear;syms  s;n = sym('n','positive');T = sym('T','positive');
ss = symsum((exp( - n * T * s)),n,0,inf),
```

语句执行后得到无穷级数$(1+\mathrm{e}^{-Ts}+\mathrm{e}^{-2Ts}+\cdots)$的和为$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}$。

7）整流半波的 Laplace 变换为

$$F(s)=\frac{2\pi T}{s^2T^2+4\pi^2}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}Ts}}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}$$

需要说明的是，收敛的幂级数，不论常数项级数还是函数项级数，都有求和的问题。在 MATLAB 中提供了符号函数求和[1]的函数命令 symsum()，它有以下调用格式。

s = symsum(S, v, a, b)

这种调用格式的功能是，对输入参数 S（为求和的对象函数或表达式），在对指定变量 v 取遍［a b］（即从 a 到 b）中所有整数时，对 S 求和，即为左端输出参数 s。求无穷级数$(1+\mathrm{e}^{-Ts}+\mathrm{e}^{-2Ts}+\cdots)$的和，正是使用了函数的这种调用格式。

5.1.5　利用留数将象函数表达式展成部分分式

在 MATLAB 系统中，有专门为求留数而开发的函数命令。先复习抽象的留数概念。

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，C 是 z_0 的足够小的邻域内包含 z_0 点于其内的任何一条正向简单闭曲线，且积分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 为与 C 无关的定值，则 $\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 称为 $f(z)$ 在 z_0 点的留数或残数，记作 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$，即 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$。

这是根据复变函数理论定义的留数，非常抽象。在微积分中，计算有理分式函数的积分时，讨论过把分式分解成所谓部分分式的方法。在此，再给出部分分式中留数的直观概念。

若 n 阶多项式 $A(s)$ 不含有重根，则以下展开称为部分分式展开，即

$$\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{R_1}{s-p_1}+\frac{R_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{R_n}{s-p_n}+k(s)$$

式中，p_1，p_2，…，p_n 称为极点；R_1，R_2，…，R_n 称为留数；$k(s)$ 称为直接项。

若 $A(s)$ 含有 m 重根 p_j，那么相应部分则写为

$$\frac{R_\mathrm{j}}{s-p_\mathrm{j}}+\frac{R_{\mathrm{j}+1}}{(s-p_\mathrm{j})^2}+\cdots+\frac{R_{\mathrm{j}+\mathrm{m}-1}}{(s-p_\mathrm{j})^m}$$

在高等数学中，留数 R_1，R_2，…，R_n 通常用待定系数法来计算。

在 MATLAB 中求留数的函数命令为 residue()，即 residue 意为留数（部分分式展开）。其调用格式为

[R, p, k] = residue(B, A)

函数命令输入参量为 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是分子多项式 $B(s)$ 与分母多项式 $A(s)$ 以降幂排列的多项式系数向量，residue() 函数是对两个多项式的比值 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 计算，计算结果作为函数的输出量，即函数返回留数向量 $\boldsymbol{R}$、极点向量 $\boldsymbol{p}$，直接项返回到向量 $\boldsymbol{k}$。返回极点向量 $\boldsymbol{p}$ 的元素是从小到大的顺序排列的，留数向量 $\boldsymbol{R}$ 中元素与 $\boldsymbol{p}$ 中元素的位置顺序一一对应。

需要说明的是，极点的个数 n = length(A) − 1 = length(R) = length(p)。如果 length(B) < length(A)，则直接项向量为空；否则 length(k) = length(B) − length(A) + 1。另外，①MATLAB 中函数 length() 的功能为计算向量的维数；②向量 $\boldsymbol{k}$ 中存放的是假分式 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 的有理整式的系数，即对应着从右向左依次为 s^0，s^1，s^2，s^3 等项的系数。

若$A(s)$含有m重根p_j，即$p_j=p_{j+1}=\cdots=p_{j+m-1}$，函数返回向量仍以极点向量$\boldsymbol{p}$元素从小到大的顺序排列，而重根部分展开为式$\frac{R_j}{s-p_j}+\frac{R_{j+1}}{(s-p_j)^2}+\cdots+\frac{R_{j+m-1}}{(s-p_j)^m}$，即向量$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{p}$元素的顺序与展开式各项从左到右的顺序一致。请看以下示例。

【例 5-9】 将象函数表达式 1) $F(s)=\frac{s^3}{s+3}$；2) $F(s)=\frac{s+3}{s^2+2s+2}$；3) $F(s)=\frac{s^2-3s+2}{s^3+2s^2+s}$；4) $F(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}$展成部分分式。

解：用以下 MATLAB 语句计算留数、极点与直接项。

1) $F(s)=\frac{s^3}{s+3}$。

```
clear;B=[1 0 0 0];A=[1 3]; [R p k]=residue(B,A),
```

语句执行后得到

```
R=-27
p=-3
k=1    -3    9
```

即 $F(s)=\frac{s^3}{s+3}=s^2-3s+9-\frac{27}{s+3}$。在此予以验证，其他题目读者自行验证。

```
clear;syms s;
[n,d]=numden(s^2-3*s+9-27/(s+3)),
```

语句执行后说明部分分式展开正确。

2) $F(s)=\frac{s+3}{s^2+2s+2}$。

```
clear;B=[1 3];A=[1 2 2]; [R p k]=residue(B,A),
```

语句执行后得到 $F(s)=\frac{s+3}{s^2+2s+2}=\frac{0.5-j}{s+1-j}+\frac{0.5+j}{s+1+j}$。

3) $F(s)=\frac{s^2-3s+2}{s^3+2s^2+s}$。

```
clear;B=[1 -3 2];A=[1 2 1 0]; [R p k]=residue(B,A),
```

语句执行后得到 $F(s)=\frac{s^2-3s+2}{s^3+2s^2+s}=\frac{-1}{s+1}+\frac{-6}{(s+1)^2}+\frac{2}{s}$。

4) $F(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}$。

```
clear;B=[1 2];A=[1 4 3]; [R p k]=residue(B,A),
```

语句执行后得到 $F(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}=\frac{0.5}{s+3}+\frac{0.5}{s+1}$。

5.1.6 用 Laplace 反变换求原函数

直接用 MATLAB 系统的 Laplace 反变换函数求原函数非常方便。

【例 5-10】 求 1) $F(s)=\frac{s+b}{s(s+a)^2}$与 2) $F(s)=\ln\frac{s-a}{s-b}$的原函数$f(t)=L^{-1}[F(s)]$。

解：1） $F(s)=\dfrac{s+b}{s\,(s+a)^2}$，求 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$。

```
clear;syms s t a b; f=collect(ilaplace((s+b)/(s*(s+a)^2)),exp(-a*t)),
```

语句执行后得到 $f(t)=L^{-1}[F(s)]=\dfrac{b}{a^2}+\left(\dfrac{a-b}{a}t-\dfrac{b}{a^2}\right)e^{-at}$。

2） $F(s)=\ln\dfrac{s-a}{s-b}$，求 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$。

```
clear;syms s t a b; f=ilaplace(log((s-a)/(s-b))),
```

语句执行后得到 $f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\ln\dfrac{s-a}{s-b}\right]=\dfrac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$。

【例 5-11】 求象函数 $F(s)$ 为 1) $\dfrac{s}{s^2+8s+17}$; 2) $\dfrac{s}{(s+1)^2(s+2)}$ 的原函数 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$。

解：1） $F(s)=\dfrac{s}{s^2+8s+17}$。

```
clear;syms s t;F=s/(s^2+8*s+17); f=factor(ilaplace(F)),
```

语句执行后得到 $f(t)=(\cos t-4\sin t)\cdot e^{-4t}$。

2） $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)^2(s+2)}$。

```
clear;syms s t;F=s/((s+1)^2*(s+2)); f=ilaplace(F);f=collect(f,exp(-t)),
```

语句执行后得到 $f(t)=(2-t)e^{-t}-2e^{-2t}$。

5.1.7　Laplace 变换的卷积与卷积定理

根据积分变换理论,已知两个函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$,则积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$ 叫做函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积,记为 $f_1(t)\otimes f_2(t)$，即 $f_1(t)\otimes f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$。

若两个时间函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 都满足条件:当 $t<0$ 时, $f_1(t)=f_2(t)=0$,则 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的以上卷积式为 $f_1(t)\otimes f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$。请注意两卷积式积分上下区间的变化。

卷积有交换律 $f_1(t)\otimes f_2(t)=f_2(t)\otimes f_1(t)$,其左端 $f_1(t)\otimes f_2(t)$ 叫做 $f_1(t)$ 卷乘 $f_2(t)$,而右端 $f_2(t)\otimes f_1(t)$ 叫做 $f_2(t)$ 卷乘 $f_1(t)$。与右端式相应的有 $f_2(t)\otimes f_1(t)=\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau$。若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 满足 Laplace 变换存在的条件,并且有 $L[f_1(t)]=F_1(s)$ 与 $L[f_2(t)]=F_2(s)$,根据积分变换原理,可以证明

$$L[f_1(t)\otimes f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)\text{或}L^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)\otimes f_2(t)$$

此两公式叫做 Laplace 变换的卷积定理。这就是：两个函数卷积的 Laplace 变换等于该两个函数 Laplace 变换的乘积或者两个函数 Laplace 变换乘积的反变换就等于该两个函数的卷积。卷积定理也是 Laplace 变换的一个重要性质。这个性质不仅被用来求某些函数的逆变换及一些积分值，而且在线性系统的分析中起着重要的作用。

【例 5-12】 计算$f_1(t)=\cos t$与$f_2(\mathrm{t})=\sin t$的卷积。

解： 1）用函数卷积定义求解。

```
clear;syms T s t tau; f1 = cos(t);f2 = sin(t);
bg = subs(f1,'t',tau) * subs(f2,'t',(t - tau));
f1f2 = int(bg,tau,0,t),
```

程序运行后得到$f_1(t)\otimes f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{t}{2}\sin t$。

2）用卷积定理验证。

```
clear;syms T s t tau; f1 = cos(t);f2 = sin(t);
F1 = laplace(f1);F2 = laplace(f2);
f12 = ilaplace(F1 * F2),
```

程序运行后得到相同的结果。

【例 5-13】 计算$f_1(\mathrm{t})=\sinh(kt)$与$f_2(t)=\sinh(t)$的卷积。

解：

```
clear;syms T s k t tau;f1 = sinh(k * t); f2 = sinh(t);
bg = subs(f1,'t',tau) * subs(f2,'t',(t - tau));
f1f2 = int(bg,tau,0,t),
```

程序运行后得到$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积为$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\sinh(kt)-k\cdot\sinh(t)}{(k+1)(k-1)}$。

【例 5-14】 已知$F_1(s)=\frac{1}{s^2+1}$与$F_2(s)=\frac{1}{s^2}$，$F(s)=F_1(s)F_2(s)$，应用卷积公式求$f(t)=L^{-1}[F(s)]$。

解： 根据卷积定理有$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]$。

```
clear;syms s y ; F1 = 1/s^2;F2 = 1/(s^2 + 1); f = ilaplace(F1 * F2),
```

程序运行后得到$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=t-\sin t$。

5.1.8 用 Laplace 变换定义传递函数

传递函数就是在 Laplace 变换基础上定义的。

【例 5-15】 系统的单位阶跃响应为$c(t)=1+0.2\mathrm{e}^{-60t}-1.2\mathrm{e}^{-10t}$，试求其传递函数$\frac{C(s)}{R(s)}$。

解： 1）因系统单位阶跃响应为$c(t)=1+0.2\mathrm{e}^{-60t}-1.2\mathrm{e}^{-10t}$，还有$r(t)=1$。

2）求解系统的传递函数$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{L[c(t)]}{L[r(t)]}$。

```
clear;syms s t; r = 1 * sym('Heaviside(t)');
R = laplace(r);c = 1 + 0.2 * exp( - 60 * t) - 1.2 * exp( - 10 * t);
C = laplace(c);[n,d] = numden(C/R);
n = expand(n);d = expand(d);phi = n/d,
```

程序运行后得到系统传递函数为$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{600}{(s+60)(s+10)}=\frac{600}{s^2+70s+600}$。

【例 5-16】 已知系统非零初始条件下的单位阶跃响应为$c(t)=1+\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}$，传递函数分子为常数，试求其传递函数$\frac{C(s)}{R(s)}$。

解：1）根据自控原理[8,9]，非零初始条件下系统响应过程为两个分量叠加而成，一是零初始条件响应分量，二是初始条件响应分量。而且两个分量关于系统响应过程的分析与影响完全相同。那么零初始条件与非零初始条件下系统单位阶跃响应只相差系数。故可设零初始条件下单位阶跃响应为 $c(t)=1+A_1e^{-t}-A_2e^{-2t}$，因此 $\dot{c}(t)=-A_1e^{-t}+2A_2e^{-2t}$。式中，$A_1$ 与 A_2 是待定系数。

2）根据 $c(t)$ 与 $\dot{c}(t)$ 的表达式，联立求解当 $t=0$ 时用 A_1 与 A_2 表达 $c(0)$ 与 $\dot{c}(0)$ 的公式。

```
clear;syms t s A1 A2 c; c=1+A1*exp(-t)-A2*exp(-2*t);
cp=diff(c);c=subs(c,[t],[0]), cp=subs(cp,[t],[0]),
```

程序运行后得到 $c(0)=1+A_1-A_2$，$\dot{c}(0)=-A_1+2A_2$。

3）根据传递函数定义，必须求系统零初始条件下单位阶跃响应表达式。在系统零初始条件 $c(0)=0$ 与 $\dot{c}(0)=0$ 下可确定 A_1、A_2：

```
clear; syms t s A1 A2 c; [A1,A2]=solve('1+A1-A2=0','-A1+2*A2=0'),
```

语句运行结果 $A_1=-2$、$A_2=-1$。

4）系统零初始条件下单位阶跃响应为 $c(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t}$，据此求其传递函数：

```
clear;syms s t C c R r phi;
r=1*sym('Heaviside(t)');R=laplace(r);
c=1-2*exp(-t)+exp(-2*t);C=laplace(c);
[n,d]=numden(C/R);n=expand(n);d=expand(d);phi=n/d,
```

程序运行后得到 $\Phi(s)=\dfrac{C}{R}=\dfrac{2}{s^2+3s+2}$。

【例 5-17】　已知系统输入信号为 $x(t)=1(t)$，初始条件为零，系统输出响应如图 5-9 所示。试求系统传递函数。

解：1）由解析几何基本原理，图 5-9 所示的基本图形叠加的函数表达式为 $y(t)=1\cdot u(t)-u(t-2)$。

2）求系统的传递函数的 MATLAB 语句段如下：

```
clear;syms s t K;tau=sym('tau','positive');
x=1*sym('Heaviside(t)');X=laplace(x);
y1=1*sym('Heaviside(t)');y2=-1*sym('Heaviside(t-2)');
Y=laplace(y1+y2);Y=factor(Y);G=Y/X,
```

程序运行后得到系统的传递函数为 $G(s)=1-e^{-2s}$。

【例 5-18】　试求系统传递函数，已知系统零初始条件下微分方程组如下：

$$\begin{cases} x_1=x-y \\ T_1\dfrac{dx_2}{dt}=K_1x_1-x_2 \\ x_3=x_2-K_Hy \\ T_2\dfrac{dy}{dt}+y=K_2x_3 \end{cases}$$

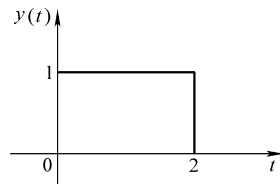


图 5-9　输出响应方波

解：1）对微分方程组求其变换方程组。

```
clear;syms t s T1 T2 K1 K2 KH X1 X2 X3 X Y ;
S1Z = laplace(sym('x1(t)'));
S1Y = laplace(sym('x(t)') - sym('y(t)'));S1 = S1Z - S1Y,
S2Z = laplace(T1 * diff(sym('x2(t)')));
S2Y = laplace(K1 * sym('x1(t)') - sym('x2(t)')); S2 = S2Z - S2Y,
S3Z = laplace(sym('x3(t)'));
S3Y = laplace(sym('x2(t)') - KH * sym('y(t)')); S3 = S3Z - S3Y,
S4Z = laplace(T2 * diff(sym('y(t)')) + sym('y(t)'));
S4Y = laplace(K2 * sym('x3(t)')); S4 = S4Z - S4Y,
```

语句段运行结果

```
S1 = laplace(x1(t),t,s) - laplace(x(t),t,s) + laplace(y(t),t,s)
S2 = T1 * s * laplace(x2(t),t,s) - T1 * x2(0) - K1 * laplace(x1(t),t,s) + laplace(x2(t),t,s)
S3 = laplace(x3(t),t,s) - laplace(x2(t),t,s) + KH * laplace(y(t),t,s)
S4 = T2 * s * laplace(y(t),t,s) - T2 * y(0) + laplace(y(t),t,s) - K2 * laplace(x3(t),t,s)
```

2）解算变换方程组。这里要特别强调，在解代数方程（即象函数方程）列写 MATLAB 语句时，必须改写所有函数的初始条件 $f(0)$ 为 f0 并设置为 0，因传递函数定义为零初始条件；改写所有函数 f(t)的 laplace(f(t)，t，s)为 F。例如，函数 y(t)的 laplace(y(t),t，s)为 Y。

```
clear;syms t s T1 T2 K1 K2 KH X1 X2 X3 X Y;x20 = 0;y0 = 0;
S1 = X1 - X + Y; X1 = solve(S1,X1);
S2 = T1 * (s * X2 - x20) - K1 * X1 + X2; X2 = solve(S2,X2);
S3 = X3 - X2 + KH * Y; X3 = solve(S3,X3);
S4 = T2 * (s * Y - y0) + Y - K2 * X3; Y = solve(S4,Y);
G = simple(factor(Y/X)),
G = K2 * K1/(T2 * s^2 * T1 + (T2 + K2 * KH * T1 + T1) * s + K2 * K1 + K2 * KH + 1)
```

程序运行后得到系统的传递函数为

$$G = \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + T_1 K_2 K_H)s + K_1 K_2 + K_2 K_H + 1}$$
$$= \frac{K_1 K_2}{(T_1 s + 1)\cdot(T_2 s + K_2 K_H + 1) + K_1 K_2}$$

【例 5-19】 系统的传递函数为 $G(s) = \dfrac{2s^2 - 5s + 1}{s(s^2 + 1)}$，试求系统脉冲响应函数。

解： 根据脉冲响应函数的定义 $g(t) = L^{-1}[G(s)]$。

```
clear;syms s t;
G = (2 * s^2 - 5 * s + 1)/(s * (s^2 + 1));
g = simple(factor(ilaplace(G))),
```

程序执行后得到系统的脉冲响应函数为 $g(t) = L^{-1}[G(s)] = 1 + \cos t - 5\sin t$。

5.1.9 用 Laplace 反变换求解微分方程

用 Laplace 变换的方法求解微分方程简单而方便。Laplace 变换能把微分方程转换为代数方程，而且能把初始条件直接反映在方程中，这便是 Laplace 变换的奇特功能。

【例 5-20】　求解微分方程 $A\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+B\cdot\frac{dy}{dt}+C\cdot y=D\cdot x$。方程中 y 为输出量；x 为输入量。当 $A=1$、$B=2$、$C=-3$、$D=1$ 且 $y(0)=0$、$\dot{y}(0)=1$、$x=e^{-t}$时，绘制微分方程解 $y(t)$ 的曲线。

解：1）将微分方程进行积分下限为 0_- 的 Laplace 变换，得到对应的变换方程。

```
clear;syms t s A B C D y x;
z0 = A * diff(sym('y(t)'),2) + B * diff(sym('y(t)')) + C * sym('y(t)');
z = laplace(z0);y = laplace(D * exp(-t)), S = z - y,
```

程序段运行结果

```
y = D/(s+1)
S = A * s^2 * laplace(y(t),t,s) - A * D(y)(0) - A * s * y(0) + B * s * laplace(y(t),t,s) - B * y(0) + C * laplace(y(t),t,s) - D/(s+1)
```

2）解变换方程求未知函数的象函数表达式，并进行 Laplace 反变换求微分方程全解。重写变换方程：改写 $y(0)$为 y0，改写 laplace(y(t), t, s)为 Y，并且计及初始条件 $y(0)=0$、$\dot{y}(0)=1$。

```
clear;syms t s Y X A B C D;
S = A * s^2 * Y - A + B * s * Y + C * Y - D/(1+s);
F = solve(S,Y);f0 = ilaplace(F);y = simple(factor(f0)),
```

语句段运行后，得微分方程的全解为

```
y =
(-2 * exp(-1/2 * t/A * B) * sinh(1/2 * t/A * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2)) * A * B - exp(-1/2 * t/A * B) * sinh(1/2 * t/A * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2)) * B * D + 2 * exp(-1/2 * t/A * B) * sinh(1/2 * t/A * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2)) * A * C + 2 * exp(-1/2 * t/A * B) * sinh(1/2 * t/A * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2)) * A * D + 2 * exp(-1/2 * t/A * B) * sinh(1/2 * t/A * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2)) * A^2 + D * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2) * exp(-t) - D * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2) * exp(-1/2 * t/A * B) * cosh(1/2 * t/A * (B^2 - 4 * A * C)^(1/2)))/(B^2 - 4 * A * C)^(1/2)/(-B + C + A)
```

3）当 $A=1$、$B=2$、$C=-3$、$D=1$ 且 $y(0)=0$、$\dot{y}(0)=1$ 时，对微分方程的解绘制曲线。

① 求微分方程的全解。参变量代入具体数值的 MATLAB 程序如下：

```
clear;syms t s Y X A B C D;
A = 1;B = 2;C = -3;D = 1;
S = A * s^2 * Y - A + B * s * Y + C * Y - D/(1+s);
F = solve(S,Y);y = ilaplace(F),
```

程序段运行后得到

$$y=\frac{1}{8}\cosh(t)+\frac{5}{8}\sinh(t)-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

② 对微分方程的解绘制曲线。

```
clear;t = 0:0.01:10;
y = 1/8 * cosh(t) + 5/8 * sinh(t) - 1/8 * exp(-3 * t);
plot(t,y,'-r');grid;
xlabel('t(秒)');Ylabel('输出量  y');grid on ;
title('\fontsize{14}\bf 微分方程解  y(t)  曲线');
```

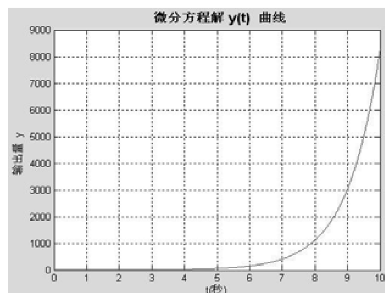


图 5-10　微分方程的解 $y(t)$ 曲线

程序运行后即得微分方程解的曲线如图 5-10 所示。

【例 5-21】 电阻 R、电感 L 串联电路如图 5-11 所示，开关接通前 $i(0)=0$。试求电路与按指数规律衰减的电压 $u_r(t)=A\cdot e^{-\frac{t}{T}}$ 接通时的电路电流。并绘制 $A=10\text{V}$、$T=0.5\text{s}$、$R=0.003333\Omega$、$L=0.001\text{H}$ 时的变化曲线 $i(t)$。

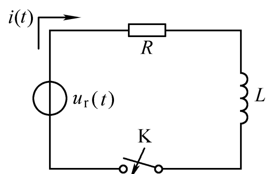


图 5-11 RL 网络

解： 1）根据电工原理，RL 网络电流 $i(t)$ 满足以下微分方程 $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=A\cdot e^{-\frac{t}{T}}$，式中 $u_r(t)=A\cdot e^{-\frac{t}{T}}$。

2）根据用 Laplace 变换方法解微分方程的步骤计算如下。

① 将微分方程进行积分下限为 0_ 的 Laplace 变换，得到对应的变换方程。

```
clear;syms t s R L A T T1 i;z00 = laplace(L * diff(sym('i(t)')) + R * sym('i(t)'));
R = L/T1;z0 = subs(z00,'R',R); z = factor(z0);y = laplace(A * exp(-t/T)); S = z - y,
```

语句段运行结果

```
S = L * (s * laplace(i(t),t,s) * T1 - i(0) * T1 + laplace(i(t),t,s))/T1 - A * T/(s * T + 1)
```

② 解变换方程求未知函数的象函数表达式，并进行 Laplace 反变换求微分方程的全解。重写变换方程：改写 laplace(ai(t), t, s)为 Ai，并且计及 $i(0)=0$。

```
clear;syms t s L I T T1 A; S = L * (T1 * s * I + I)/T1 - A/(s + 1/T);
I = solve(S,I);i0 = ilaplace(I); i = factor(i0),
```

运行后得到电路电流为 $i(t)=\dfrac{A\cdot T\cdot T_1}{L\cdot(T_1-T)}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T}}\right)$。

3）当 $R=0.003333\Omega$、$L=0.001\text{H}$、$A=10\text{V}$、$T=0.5\text{s}$ 时，绘制微分方程解的曲线。

```
clear;t = 0:0.001:1; T = 0.5;A = 10;T1 = 0.3;L = 0.001;
i = - A * T * T1 * ( - exp(-t/T) + exp(-t/T1))/L/(T - T1);plot(t,i,'-k'); grid;
xlabel('t(秒)');Ylabel('A(安)');grid on ;
title('\fontsize{14} \bf 电路电流 i(t)曲线');
```

程序段运行后绘制 $i(t)$ 曲线如图 5-12 所示。

【例 5-22】 电阻、电感、电容串联电路 R、L、C 如图 5-13 所示，试求电路突然接通电源 U_s 时电容电压 $u_c(t)$ 的变化规律，并绘制 $R=1\Omega$、$L=0.5\text{H}$、$C=1\text{F}$、$U_s=1\text{V}$、$u_c(0)=0\text{V}$、$\dot{u}_c(0)=0\text{V}$ 时的电容电压 $u_c(t)$ 变化曲线。

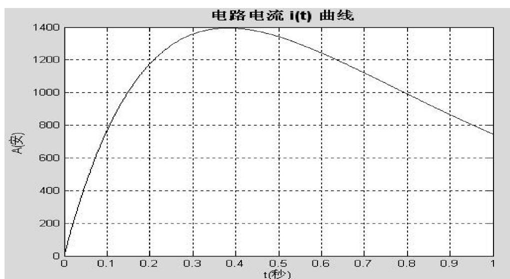


图 5-12 电路电流 $i(t)$ 曲线

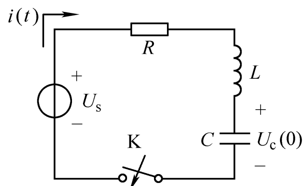


图 5-13 RLC 网络

解：1）根据电工原理，列写 RLC 串联电路基尔霍夫电压方程式 $U_s = Ri + L\dfrac{di}{dt} + u_c$，即

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = U_s$$

式中，$i = C\dfrac{du_c}{dt}$。

2）将微分方程进行积分下限为 0_- 的 Laplace 变换，得到对应的变换方程。

```
clear;syms t s R L C Us uc;
z=laplace(L*C*diff(sym('uc(t)'),2)+R*C*diff(sym('uc(t)'))+sym('uc(t)'));
y=laplace(Us*sym('Heaviside(t)')); S=z-y,
```

程序段运行结果

```
S =
-C*(L*D(uc)(0)+L*s*uc(0)+R*uc(0))+L*C*s^2*laplace(uc(t),t,s)+R*C*s*laplace(uc
(t),t,s)+laplace(uc(t),t,s)-Us/s
```

3）解算变换方程，必须改写 $u_c(0)$ 为 uc0，改写 laplace(uc(t), t, s)为 U_c。求反变换，并代入参量值 $R=1\Omega$、$L=0.5\text{H}$、$C=1\text{F}$、$U_s=1\text{V}$、$u_c(0)=0\text{V}$、$\dot{u}_c(0)=0\text{V}$，对微分方程的解绘制曲线。

```
clear;syms t s R L C uc0 Duc0 E Uc;
R=1;L=0.5;C=1;Us=1;uc0=0;Duc0=0;
S=-C*(L*Duc0+L*s*uc0+R*uc0)+L*C*s^2*Uc+R*C*s*Uc+Uc-Us/s;
F=solve(S,Uc),uc=factor(simple(ilaplace(F))),
ezplot(uc,[0 7]),grid;
```

程序段执行后得到

$$u_c(t) = 1-(\cos t+\sin t)e^{-t}。$$

程序段执行后还绘制电容电压 $u_c(t)$ 变化曲线如图 5-14 所示。

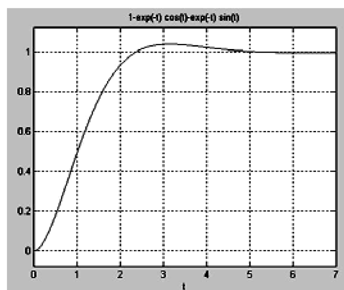


图 5-14　电容电压 $u_c(t)$变化曲线

控制系统时域分析的 MATLAB 实现有两种方法：一是在 MATLAB 函数指令方式下进行时域仿真；另一种是利用 Simulink 动态结构图进行时域仿真。以下将逐一介绍。

5.2　MATLAB 函数指令方式下的时域响应仿真

函数指令下的两种仿真方式是 Notebook 执行方式（不是带鼠标操作的均可采用）与程序文件执行方式（带鼠标操作的采用）。

5.2.1　一阶系统时域分析的 MATLAB 实现

根据自动控制原理，一阶系统的微分方程为 $T\dfrac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$，动态结构如图 5-15 所示。对应闭环传递函数 $\Phi(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{1}{Ts+1}$。

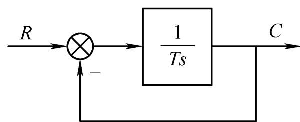


图 5-15　一阶系统典型结构图

一阶系统的单位阶跃响应为 $c(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$，其调节时间：当 $\Delta=0.05$ 时，$t_s=3T$；当 $\Delta=0.02$ 时，$t_s=4T$。

【例 5-23】 用 MATLAB 仿真函数命令绘制一阶系统 $\Phi(s)=\dfrac{1}{s+1}$ 单位阶跃响应曲线、单位脉冲响应曲线、单位斜坡响应曲线与等加速度响应曲线等。

解：1）绘制单位阶跃响应与单位脉冲响应曲线。

```
clear;sys = tf([0 1],[1 1]);t = 0:0.001:6;
figure(1);step(sys,t),grid;pause;
figure(2);impulse(sys,t),grid;
```

程序运行后得到如图 5-16 所示一阶系统单位阶跃响应曲线与图 5-17 所示一阶系统单位脉冲响应曲线。

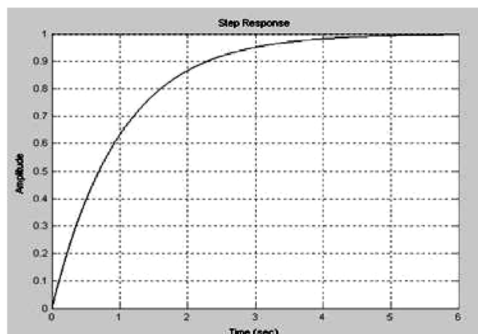


图 5-16　一阶系统单位阶跃响应曲线

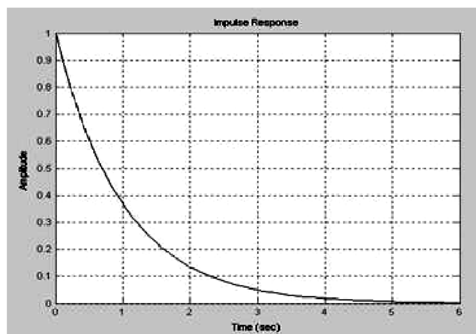


图 5-17　一阶系统单位脉冲响应曲线

2）绘制单位斜坡响应曲线与等加速度响应曲线等。

```
clear;sys1 = tf([0 1],[1 1 0]);t = 0:0.001:10;
figure(1);step(sys1,t),grid;pause;
sys2 = tf([0 1],[1 1 0 0]);
figure(2);step(sys2,t),grid;
```

程序运行后得到如图 5-18 所示一阶系统单位斜坡响应曲线与如图 5-19 所示一阶系统等加速度响应曲线。

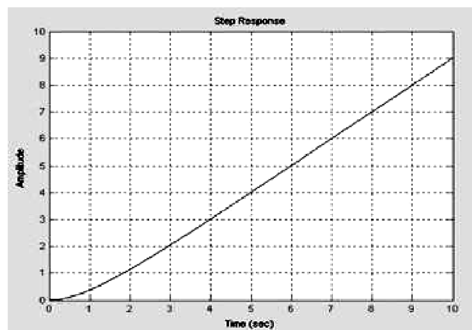


图 5-18　一阶系统单位斜坡响应曲线

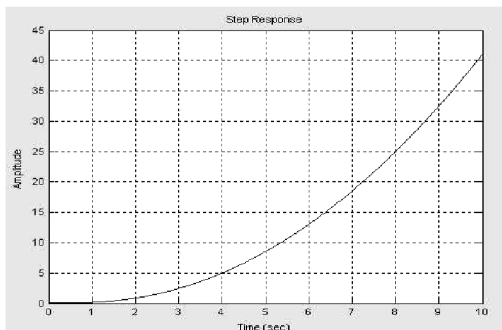


图 5-19　一阶系统等加速度响应曲线

5.2.2　二阶及高阶系统时域分析的 MATLAB 实现

根据自动控制原理[10]，二阶系统的闭环传递函数与欠阻尼时单位阶跃响应如下。

$\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 与 $h(t)=1-\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arccos\zeta)$，阶跃响应上升时间：$t_r=\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$；峰值时间：$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$；阶跃响应超调量：$\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%$。

调节时间：

$$t_s\geqslant\frac{3+\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}\Delta=0.05$$

$$t_s\geqslant\frac{4+\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}\Delta=0.02$$

振荡次数：

$$N=N\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}}+\frac{\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{2\pi}\right)$$

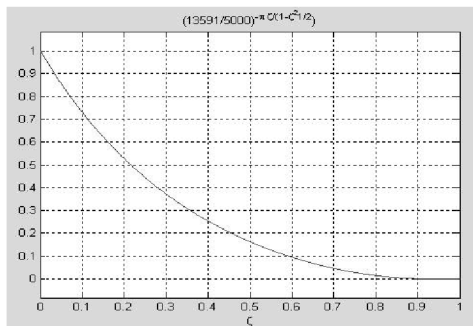
关于高阶系统时域分析的 MATLAB 实现，特别是计算其阶跃响应超调量、峰值时间与调节时间等指标，利用作者开发的函数 perf()，能够简单方便地计算出结果。利用 MATLAB 系统函数 step()即可绘制其阶跃响应曲线。

【例 5-24】　欠阻尼二阶系统的超调量 $\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%$，试绘制 $\sigma\%$ 与阻尼比 ζ 之间的关系曲线 $\sigma=f(\zeta)$ 与 $\zeta=f(\sigma)$。

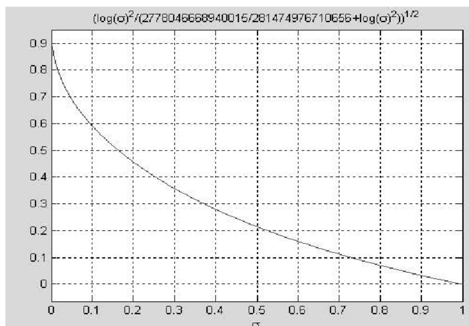
解：1）用函数命令 explot()绘制 $\sigma\%$ 与阻尼比 ζ 之间的关系曲线。

```
clear;syms zeta sigma;
sigma = 2.7182^( - pi * zeta/(1 - (zeta)^2)^(1/2));
ezplot(sigma,[0,1]),grid;
```

程序运行后，绘制的曲线 $\sigma=f(\zeta)$ 如图 5-20a 所示。



a) $\sigma=f(\zeta)$



b) $\zeta=f(\sigma)$

图 5-20　$\sigma\%$ 与 ζ 之间的关系曲线

2）演算关系式 $\zeta=f(\sigma)$。由 $\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%$，得到 $\log_e\sigma=-\dfrac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$。经恒等变换 $\sqrt{1-\zeta^2}\log_e\sigma=-\pi\zeta\Rightarrow(1-\zeta^2)(\log_e\sigma)^2=(-\pi\zeta)^2\Rightarrow(\log_e\sigma)^2=(-\pi\zeta)^2+\zeta^2(\log_e\sigma)^2$ $\Rightarrow\zeta=\sqrt{\dfrac{(\log_e\sigma)^2}{\pi^2+(\log_e\sigma)^2}}$。

```
clear;syms zeta sigma;
zeta=((log(sigma))^2/((pi)^2+(log(sigma))^2))^(1/2);
ezplot(zeta,[0,1]),grid;
```

程序运行后，绘制的曲线 $\zeta=f(\sigma)$ 如图 5-20b 所示。

【例 5-25】 已知二阶系统传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$，当 $\omega_n=1$ 时，试绘制当阻尼比 ζ 值从 0 到 1（步长 0.1）时二阶系统的单位阶跃响应曲线簇。

解：

```
clear;num=1;i=0;
for zeta=0:0.1:1;
den=[1,2*zeta,1];
sys=tf(num,den);
i=i+1;
step(sys,10),grid;hold on;
end
lab1='\varsigma =0';text(3.7,1.9, lab1),
lab2='\varsigma =0.1';text(2.9,1.77, lab2),
lab3='\varsigma =0.2';text(2.9,1.57, lab3),
lab4='\varsigma =0.3';text(2.9,1.42, lab4),
lab5='\varsigma =0.4';text(3,1.3, lab5),
lab6='\varsigma =0.5';text(3.2,1.2, lab6),
lab7='\varsigma =0.7';text(3.6,1.08, lab7),
lab8='\varsigma =1.0';text(3.6,0.85, lab8),
```

运行该程序即得二阶系统单位阶跃响应曲线簇，如图 5-21 所示。

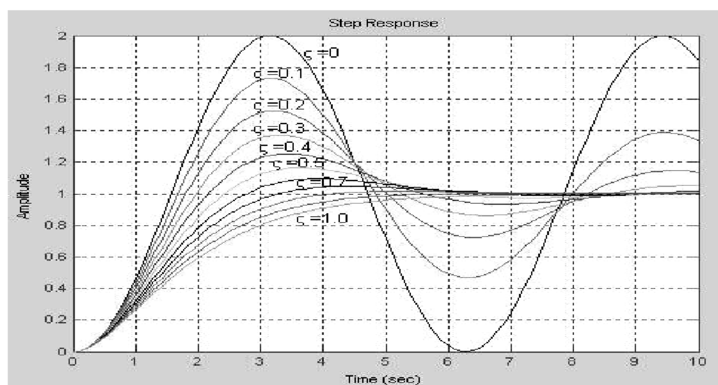


图 5-21 二阶系统的单位阶跃响应曲线簇

【例 5-26】　已知图 5-22 所示一阶环节传递函数 $G(s)=\frac{K_0}{s}$。欲使系统的放大系数为 1，调节时间 $t_s=0.1s$（5% 的误差带），试求 K_0 与 K_t 的值。

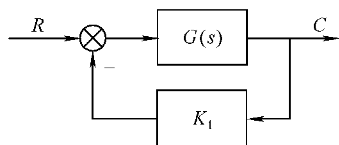


图 5-22　一阶环节结构图

解：1）计算系统传递函数 $\Phi(s)$。

```
clear;syms s K0 Kt G phi;
G = K0/s;phi = simple(G/(1 + G * Kt)),
```

程序运行后得到 $\Phi(s)=\frac{K_0}{s+K_0K_t}=\frac{K_0/K_0K_t}{\frac{1}{K_0K_t}s+1}=\frac{1/K_t}{Ts+1}$。

2）计算 K_t。

```
clear;syms s K0 Kt G phi;[Kt] = solve('1/Kt = 1','Kt'),
```

程序运行后得到 $K_t=1$。

3）计算 K_0。

$$\Phi(s)=\frac{K_0}{s+K_0K_t}=\frac{K_0/K_0K_t}{\frac{1}{K_0K_t}s+1}=\frac{1/K_t}{Ts+1}=\frac{1}{\frac{1}{K_0}s+1}$$

```
clear;syms K0;[K0] = solve('3/K0 = 0.1','K0'),
```

程序运行后得到 $K_0=30$。

【例 5-27】　已知二阶系统闭环传递函数为 $\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$。式中，系统阻尼比 $\zeta=0.6$；无阻尼振荡角频率 $\omega_n=5\text{rad/s}$。试计算系统单位阶跃响应的特征量 t_r、t_p、$\sigma\%$、t_s 与 N。

解：1）由 $\zeta=0.6$，$\omega_n=5\text{rad/s}$，求特征量 t_r、t_p、$\sigma\%$。

$$\beta=\arccos\zeta\text{、}t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-\arccos\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\text{、}t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

```
clear; zeta = 0.6;omegan = 5; [sigma] = zetosi(zeta); [tr,tp] = trtp(zeta,omegan);
```

程序运行后得到 $\sigma\%=9.48\%$、$t_r=0.5536s$、$t_p=0.7854s$。

2）由 $\zeta=0.6$，$\omega_n=5\text{rad/s}$，求特征量 t_s 与 N。

```
clear;zeta = 0.6;delta = 0.05;omegan = 5;[ts] = cats(1,zeta,omegan,delta);
zeta = 0.6;delta = 0.02;omegan = 5;[ts] = cats(2,zeta,omegan,delta);
delta = 0.05;zeta = 0.6;[N] = can(1,zeta,delta);delta = 0.02;zeta = 0.6;[N] = can(2,zeta,delta);
```

程序运行后得到$t_s=\begin{cases}1.1488s & \Delta=0.05\\1.4821s & \Delta=0.02\end{cases}$

$$N=\begin{cases}N(0.8307)=1 & \Delta=0.05\\N(1.0251)=1 & \Delta=0.02\end{cases}$$

【例 5-28】　已知系统结构如图 5-23 所示。要求系统超调量 $\sigma\%=16.3\%$，峰值时间 $t_p=1s$，求 K 与 τ。

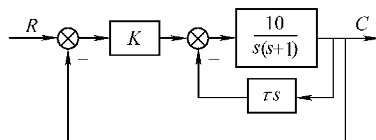


图 5-23　系统结构图

解：1）求系统闭环传递函数。

```
clear;syms s K tau phi1 G1 G2 G H1 H2 phi;
```

```
G1 = 10/(s * (s + 1));H1 = tau * s;
phi1 = factor(G1/(1 + G1 * H1));
G2 = phi1 * K;H2 = 1;phi2 = factor(G2/(1 + G2 * H2)),
```

程序运行后得到 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{10K}{s^2+(10\tau+1)s+10K}$。

2）根据二阶系统公式：系统闭环传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$，峰值时间 $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$，超调量 $\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%$。计算阻尼比 ζ 与无阻尼振荡角频率 ω_n。

```
clear;syms omegan zeta tp;tp = 1;sigma = 0.163;[zeta] = sitoze(sigma);
omegan = pi/(tp * sqrt(1 - zeta^2));omegan = vpa(omegan,4),
```

程序运行后得到 $\zeta=0.5$ 与 $\omega_n=3.628\text{rad/s}$。

3）求 K 与 τ。

```
clear;syms K tau omegan zeta;zeta = 0.5;omegan = 3.628;[K] = solve('10 * K = 3.628^2');
[tau] = solve('2 * 0.5 * 3.628 = 1 + 10 * tau');K = vpa(K,4),tau = vpa(tau,4),
```

程序运行结果为 $K=1.316$ 与 $\tau=0.2628$。

【例 5-29】 一系统结构如图 5-24 所示。试设计反馈通道传递函数 $H(s)$，使整个系统阻尼比 ζ 提高到 ζ_1 值，但保持系统增益 K 与无阻尼振荡角频率 ω_n 不变。

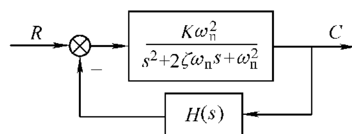


图 5-24 系统结构图

解：1）由结构图求系统闭环传递函数。

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2+K\omega_n^2H(s)}$$

观察 $\Phi(s)$ 分母表达式的 s 一次方系数，为满足题目要求即保持 K 与 ω_n 不变，应取

$$H(s)=K_1s$$

2）对比二阶系统标准传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$，求 K_1 与 $H(s)$。

因 $s^2+(2\zeta+KK_1\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2=0$，故 $(2\zeta+KK_1\omega_n)=2\zeta_1$。

```
clear;syms zeta zeta1 K K1 omegan H s;
[K1] = solve('2 * zeta + K * K1 * omegan = 2 * zeta1',K1),H = K1 * s,
```

程序运行结果为 $K_1=\dfrac{2(\zeta_1-\zeta)}{K\omega_n}$、$H(s)=K_1s=\dfrac{2(\zeta_1-\zeta)}{K\omega_n}s$。

【例 5-30】 已知图 5-25 所示的单位负反馈系统的开环传递函数 $G_2(s)=\dfrac{K_2}{s(s+a)}$，当系统的单位阶跃响应曲线如图 5-26 所示时，试确定 K_1、K_2 与 a。

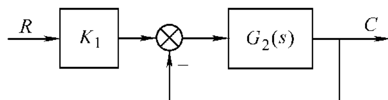


图 5-25 二阶系统

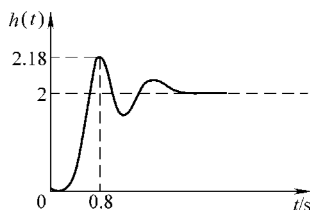


图 5-26 单位阶跃响应曲线

解：1）演算关系式。

$$\Phi(s)=\frac{K_1K_2}{s(s+a)+K_2}=\frac{K_1K_2}{s^2+as+K_2}、t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}、\sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\sigma=\frac{2.18-2}{2}=\frac{0.18}{2}=0.09=9\%、K_1=c(\infty)=2$$

2）求 ζ、ω_n。

```
clear;syms sigma zeta omegan tp;
sigma=0.09;[zeta]=sitoze(sigma);
tp=0.8;omegan=pi/(tp*(1-zeta^2)^(1/2)),
```

程序运行后得到 $\zeta=0.6083$、$\omega_n=4.9478$。

3）确定 K_1、K_2 与 a。

$$\Phi(s)=\frac{K_1K_2}{s(s+a)+K_2}=\frac{K_1K_2}{s^2+as+K_2}=K_1\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$$

```
clear;syms k2 a;omegan=4.9478;
zeta=0.6083;K2=omegan^2,a=2*zeta*omegan,
```

程序运行后得到 $K_2=24.4807$ 与 $a=6.0195$，还有 $K_1=2$。

【例 5-31】 设二阶系统的初始条件为零，其微分方程为 $0.04\ddot{c}(t)+0.24\dot{c}(t)+c(t)=r(t)$，试求系统的脉冲响应 $g(t)$、单位阶跃响应 $h(t)$、超调量 $\sigma\%$、峰值时间 t_p 与调整时间 t_s。

解：1）由微分方程求两端的 Laplace 变换。

```
clear;syms t s c r;
l=0.04*diff(diff(sym('c(t)')))+0.24*diff(sym('c(t)'))+sym('c(t)');
L=laplace(l),R=laplace(sym('r(t)')),
```

程序运行后得到

```
L=1/25*s^2*laplace(c(t),t,s)-1/25*D(c)(0)-1/25*s*c(0)+6/25*s*laplace(c(t),t,s)-6/25*
c(0)+laplace(c(t),t,s)
R=laplace(r(t),t,s)
```

2）由两端的 Laplace 变换求系统的传递函数。此时需注意零初始条件，即 c(0)=0，D(c)(0)=0。表达式 laplace(c(t),t,s)即 C(s)写成 C，laplace(r(t),t,s)即 R(s)写成 R。

```
clear;syms s R C Z Y; L=1/25*s*s*C+6/25*s*C+C;
[C]=solve('1/25*s*s*C+6/25*s*C+C=R',[C]),
```

程序运行后得到 $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{25}{s^2+6s+25}$。

3）求 ω_n，ζ。

对比 $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$，可知 $\omega_n=\sqrt{25}=5\text{rad/s}$

```
clear;syms omegan zeta;
[zeta]=solve('2*zeta*omegan=6');
zeta=subs(zeta,[omegan],[5]),
```

程序运行后得到 $\zeta=0.6$。

4）求脉冲响应 $g(t)=\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t)$。

```
clear;syms t omegan zeta beta; omegan=5;zeta=0.6;
g=omegan*exp(-zeta*omegan*t)/sqrt(1-zeta^2)*sin(omegan*sqrt(1-zeta^2)*t);
g=vpa(g,3),n=[25];d=[1 6 25];sys=tf(n,d); impulse(sys),grid;
```

程序运行后得到脉冲响应 $g(t)=\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t)=6.25e^{-3t}\sin(4t)$，并绘制系统脉冲响应曲线 $g(t)$，如图 5-27 所示。

还可以用绘图函数 plot() 绘制完全相同的脉冲响应 $g(t)$ 曲线。

```
clear;t=0:0.001:2; g=6.250*exp(-3.*t).*sin(4.*t);plot(t,g),grid;
```

5）求单位阶跃响应 $h(t)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta)$。

```
clear;syms t omegan zeta beta; omegan=5;zeta=0.6;
beta=atan((1-zeta^2)^(1/2)/zeta);
h=1-exp(-zeta*omegan*t)/sqrt(1-zeta^2)*sin(omegan*sqrt(1-zeta^2)*t+beta);
h=vpa(h,4), n=[25];d=[1 6 25]; sys=tf(n,d);step(sys),grid;
```

程序运行后得到单位阶跃响应 $h(t)=1-1.250e^{-3t}\sin(4t+0.9273)$，并绘制系统单位阶跃响应曲线 $h(t)$，如图 5-28 所示。

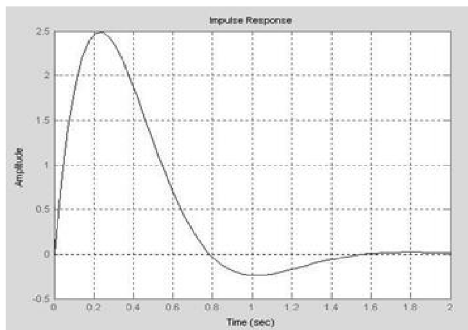


图 5-27 系统脉冲响应曲线 $g(t)$

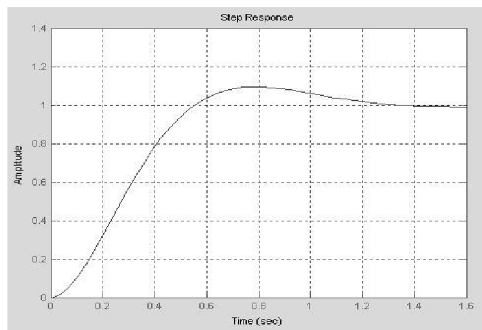


图 5-28 系统单位阶跃响应曲线 $h(t)$

还可以用绘图函数 plot() 绘制完全相同的单位阶跃响应 $h(t)$ 曲线。

```
clear;t=0:0.001:1.6; h=1.-1.250*exp(-3.*t).*sin(4.*t+.9273); plot(t,h),grid;
```

6）求超调量 $\sigma\%$、峰值时间 t_p 与调整时间 t_s。

```
clear;syms omegan zeta omegad sigma tr tp ts ts1 ts2
omegan=5;zeta=0.6; omegad=omegan*sqrt(1-zeta^2);
beta=atan((1-zeta^2)^(1/2)/zeta),
tr=(pi-beta)/omegad, tp=pi/omegad,
sigma=2.7182^(-pi*zeta/(1-(zeta)^2)^(1/2)),
delta=0.05; ts=cats(1,zeta,omegan,delta),
delta=0.02; ts=cats(2,zeta,omegan,delta),
```

程序运行后得到 $\beta=0.9273\text{rad}$、$t_p=0.7854\text{s}$、$\sigma\%=9.48\%$、$t_s=1.1488\text{s}(\Delta=5\%)$，$t_s=1.4821\text{s}(\Delta=2\%)$。

5.3　利用 Simulink 动态结构图的时域响应仿真

利用系统的 Simulink 动态结构图模型仿真有两种：一是利用 Simulink 动态结构图模型指令方式即程序方式下的仿真；二是在 Simulink 窗口里菜单方式下的仿真。

已经指出过，利用作者开发的函数 perf. m，能够简单方便地计算出任何高阶（包括一阶与二阶）系统的阶跃响应超调量、峰值时间与调节时间等指标。利用 MATLAB 系统函数 step() 即可绘制其阶跃响应曲线。当然，也可利用示波器模块显示其阶跃响应曲线。

5.3.1　解算系统闭环传递函数的两种方法

求解系统闭环传递函数有两种方法，一是利用 MATLAB 系统函数 tf()、feedback() 命令求解，另一种是 MATLAB 符号运算法。

前一种方法中，由多个模块构成的前向通道与反馈通道的传递函数，其分子与分母多项式是用 MATLAB 数组格式提供的确定数据，再配合使用函数 tf()、feedback() 而求得。闭环传递函数也是以数组提供的，方法简洁、高效，但只适用于确定数字系统，传递函数里不能出现文字符号，而且若还要对闭环传递函数进行数学运算，就有困难。

后一种 MATLAB 符号运算法，将闭环传递函数中使用的所有字符都定义为符号对象，按自动控制原理进行规定的运算而求得。方法稍显麻烦，但若还要对闭环传递函数进行数学运算则是可能的。请看示例。

【例 5-32】　有一控制系统动态结构如图 5-29 所示。已知图中 $K=12.4599$、$\tau_1=0.18\text{s}$，试求系统闭环传递函数。

解：1）MATLAB 函数法求系统闭环传递函数。

```
clear;n1 = [12.4599];d1 = conv([1 0],[1 1]);G = tf(n1,d1);
n2 = [0.18 1];d2 = [1];H = tf(n2,d2);phi = feedback(G,H),
```

程序运行后得到 $\Phi(s)=\dfrac{12.46}{s^2+3.243s+12.46}$

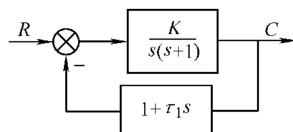


图 5-29　系统动态结构图

2）符号运算法求系统闭环传递函数。

```
clear;syms s K tau1 omegan G H phi;
G = K/(s * (s + 1));H = 1 + tau1 * s;phi = factor(G/(1 + G * H));
phi = vpa(subs(phi,[K,tau1],[12.4599,0.18]),4),
```

程序运行后得到与用 MATLAB 函数法计算相同的结果。

若题目不给出 K、τ_1 数值，第 1 种 MATLAB 函数解法无法进行，模型图画不出，下例计算也无法进行。

5.3.2　利用 Simulink 动态结构图模型程序方式下的时域响应仿真

根据系统的 Simulink 动态结构图模型，可用 linmod() 或 linmod2() 函数命令对结构图模型提取一个平衡工作点处的线性模型。有了线性模型，在函数指令方式下的时域仿真不会有任何问题。请注意，在动态结构图模型中，输入与输出环节必须采用“In”与“Out”模块，因为进行何种仿真是由命令确定的。

【例 5-33】 已知系统动态结构图仍如图 5-29 所示。要求系统阶跃响应 $\sigma\% = 20\%$ ，$t_p = 1s$ 。试确定系统参数 K 与 τ ，计算系统单位阶跃响应特征量 ζ 、ω_n 、t_p 、t_s 和振荡次数 N，并绘制单位阶跃响应曲线。

解： 1）求系统闭环传递函数。

```
clear;syms s K tau1 omegan G H phi;
G=K/(s*(s+1));H=1+tau1*s;phi=factor(G/(1+G*H)),
```

程序运行结果为 $\Phi(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \dfrac{K}{s^2 + (1 + K\tau_1)s + K}$ 。

2）求系统参数 ζ 、ω_n 与 K。

```
clear; sigma=0.2;tp=1; [zeta]=sitoze(sigma);
omegan=pi/(tp*sqrt(1-zeta^2)),K=omegan^2,b=2*zeta*omegan,
```

程序运行结果为 $\zeta = 0.4559$ 、$\omega_n = 3.5299\text{rad/s}$ 、$K = 12.4599$ 、$2\zeta\omega_n = 3.2189$ ，那么

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{12.4599}{s^2 + 3.2189s + 12.4599}$$

3）求系统参数 τ 与振荡次数 $N(5\%)$。

```
clear;zeta=0.4559;omegan=3.5299;delta=0.05; [N]=can(1,zeta,delta);
[tau1]=solve('2*0.4559*3.5299=1+12.4599*tau1'); tau1=vpa(tau1,2),
```

程序运行结果为 $\tau_1 = 0.18s$ 、振荡次数 $N(1.1417) = 1$ 、$\Delta = 0.05$ 。

4）绘制系统闭环传递函数对应的单位负反馈等效动态结构图模型，如图 5-30 所示。

5）验算系统单位阶跃响应特征量 t_p 、t_s 、$\sigma\%$ ，并绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod2('sx2L0533');
sys=ss(a,b,c,d);t1=0:0.001:4;step(sys,t1),grid;
[y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行结果为 $\sigma\% = 19.9436\%$ 、$t_p = 0.9876s$ 、$t_s(2\%) = 1.5143s$ ，并绘制出系统单位阶跃响应曲线如图 5-31 所示。

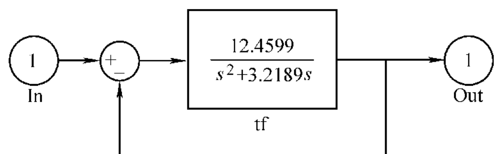


图 5-30 系统动态模型 sx2L0533. mdl

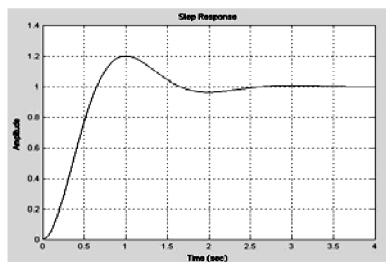


图 5-31 系统单位阶跃响应曲线

若将模型 sx2L0533. mdl 中的“In”与“Out”模块分别用单位阶跃信号“Step”与示波器“Scope”模块代替（参见 sx2L0533a. mdl），请读者绘制模型并仿真。

5.3.3 在 Simulink 模型窗口里菜单方式下的时域响应仿真

这种情况下的系统 Simulink 动态结构图模型中，要使用进行仿真的信号源模块与观察仿真输出模块。另外，菜单方式下的仿真，系统模块之间必须连接成完整的系统 Simulink 动态

结构图，并设置好各模块仿真参数及示波器参数。

【例 5-34】 已知系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{s^3+7s^2+24s+24}{s^4+25s^3+35s^2+50s+24}$，试计算系统单位阶跃响应特征量 $\sigma\%$ 、t_p 、t_s ，并绘制单位阶跃响应曲线。

解： 1）绘制系统动态结构图模型 sx2L0534. mdl，如图 5-32 所示。

2）按模型程序方式下计算系统的 t_p 、t_s 、$\sigma\%$ ，并绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[a,b,c,d] = linmod('sx2L0534');
sys = ss(a,b,c,d);step(sys),grid;
[y,t] = step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到 $\sigma\%=8.9672\%$ 、$t_p=2.9628\mathrm{s}$ 、$t_s(2\%)=3.8157\mathrm{s}$ ，并绘制单位阶跃响应曲线，如图 5-33 所示。

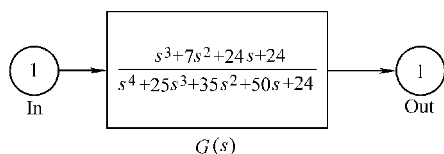


图 5-32　系统模型 sx2L0534. mdl

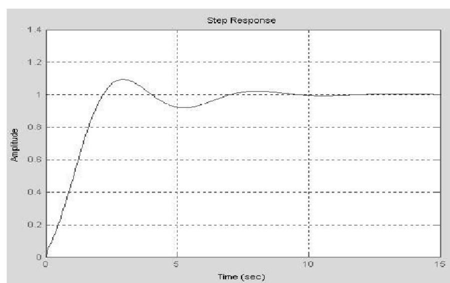


图 5-33　系统单位阶跃响应曲线

3）绘制系统菜单仿真动态模型 sx2L0534a. mdl，如图 5-34 所示。

在模型 sx2L0534a. mdl 中，首先按图 5-35 对单位阶跃信号 Step 模块进行参数设置。然后在示波器 Scope 里，选中菜单按钮 “ ”，即出现示波器属性对话框【'Scope' Properties】可按第 2 章示波器模块 Scope 进行参数设置。最后在 sx2L0534a. md 模型窗口主菜单里选择【Simulation】，再在其下拉菜单里选择【Start】，即可得到本系统在单位阶跃信号作用下的响应曲线。此响应曲线是在示波器 Scope 里显示出的且与图 5-33 相同。

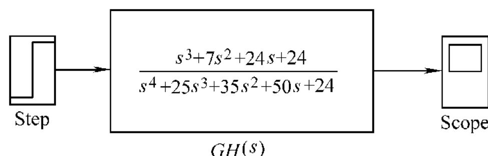


图 5-34　系统动态模型 sx2L0534a. mdl

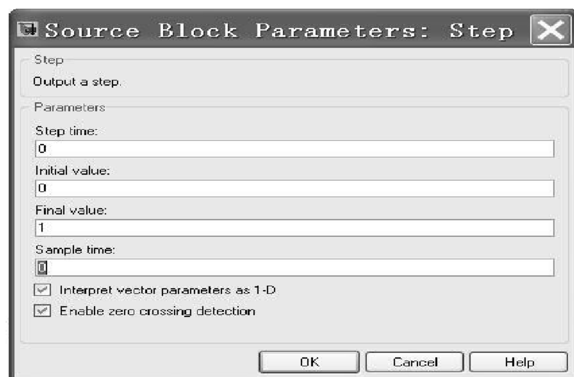


图 5-35　模块 Step 参数设置

习　题

【5-1】 求函数（1）$f(t)=\sin\omega t$ 与函数（2）$f(t)=\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$ 的 Laplace 变换 $F(s)$。

【5-2】 求函数（1）$f(t)=\dfrac{e^{-at}+at-1}{a^2}$ 与（2）$f(t)=e^{-at}\cos\omega t$ 的 Laplace 变换 $F(s)$。

【5-3】 求函数（1）$f(t)=\sin t\cdot\cos t$ 与函数（2）$f(t)=\sinh(kt)$ 的 Laplace 变换 $F(s)$。

【5-4】 求（1）$f(t)=ae^{at}-be^{bt}$ 与（2）$f(t)=\cos at-\cos bt$ 的 Laplace 变换 $F(s)$。

【5-5】 求图 5-36 所示正弦单相交流电（振幅 $A=1$）全波整流函数的 Laplace 变换。

【5-6】 对图 5-37 所示的特别折线波，求其 Laplace 变换。

【5-7】 对图 5-38 所示单个梯形波，求其 Laplace 变换。

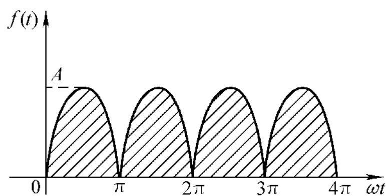


图 5-36　正弦整流全波函数

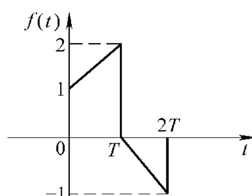


图 5-37　特别折线波

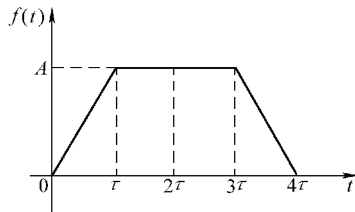


图 5-38　梯形波

【5-8】 求 Laplace 变换象函数 $F(s)$ 分别为：（1）$\dfrac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$；

（2）$\dfrac{3s^2+2s+8}{s(s+2)(s^2+2s+4)}$；（3）$\dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$；（4）$\dfrac{2s^2-5s+1}{s(s^2+1)}$ 时的原函数 $f(t)$。

【5-9】 计算（1）$f_1(t)=t$ 与 $f_2(t)=\sin t$；（2）$f_1(t)=t$ 与 $f_2(t)=\sinh(t)$ 的卷积。

【5-10】 在图 5-39 所示的 RC 网络中，开关 K 闭合前，电容器 C 上有初始电压 $U_C(0)=3\text{V}$。若串联直流电压 $U_s=5\text{V}$，试求开关 K 闭合后 $T=1\text{s}$ 时电容器 C 两端的电压 $u_c(t)$，并绘制 $u_c(t)$。

【5-11】 正弦对称三相交流电系统发生三相短路时，在保护装置动作之前，电源到短路点之间会流通短路电流，其单相的等效电路如图 5-40 所示。电源至短路点之间的电阻为 R，电源至短路点之间的电感为 L，若正弦相电压 $u_s(t)=U_m\sin(\omega t+\alpha)$，试计算 $R=0.1\Omega$、$L=0.007\text{H}$、相电压有效值 $U=10500/\sqrt{3}\text{V}$、$\alpha=\pi/6$、$T=1/50\text{s}$、$\omega=314.16\ \text{rad/s}$、$i(0)=0$ 时的短路电流并绘制短路电流变化曲线 $i(t)$。

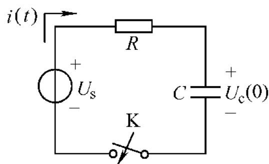


图 5-39　RC 网络

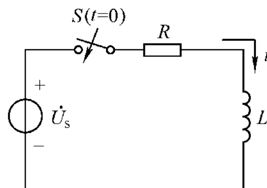


图 5-40　RL 网络

【5-12】 惯性环节的动态方程为 $T\dfrac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$。已知 $r(t)=1(t)$ 且 $c(0)=0$。（1）试求动态方程的解 $c(t)$；（2）试以 t/T 为自变量，取值 $t/T=0,1,2,3,4,5$ 时，计算函数值；（3）当 $T=1$ 时绘制 $c(t)$ 曲线。

【5-13】 在单位阶跃信号作用下，某惯性环节各时刻的输出值如表 5-1 所示。试以该表各点 $h(t)$ 对应的 T 平均值为准，计算该惯性环节的传递函数。

表 5-1　某惯性环节各时刻的输出值

t	0	1	2	3	4	5	6	7	∞
$h(t)$	0	1.61	2.79	3.72	4.38	4.81	5.10	5.36	6.00

【5-14】 一电磁线圈有参数：$R=200\ \Omega$，$L=1\text{H}$。取电压 u 为输入量，电流 i 为输出量，试计算线圈的过度时间 t_s。

【5-15】 已知自一阶系统单位脉冲响应 $k(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$，试计算响应曲线的起始斜率。

【5-16】 已知系统结构如图 5-41 所示。试确定 k 值，使阻尼比 $\zeta=0.5$，并计算此时的单位阶跃响应上升时间 t_r、峰值时间 t_p、超调量 $\sigma\%$、调节时间 t_s 与振荡次数 N。

【5-17】 一系统结构如图 5-42 所示。(1) 已知 $G_1(s)$ 的单位阶跃响应为 $c_1(t)=1-e^{-2t}$，求 $G_1(s)$；(2) 当 $G_1(s)=\frac{1}{s+2}$ 且 $r(t)=10\times 1(t)$ 时，试求：①系统的稳态输出 $c(\infty)$；②系统响应的峰值时间 t_p、超调量 $\sigma\%$、调节时间 t_s 与稳态误差 e_{ss} 并绘制 $e_{ss}(t)$ 曲线；③绘制系统阶跃响应曲线 $c(t)$。

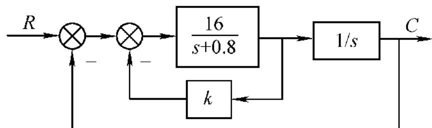


图 5-41　系统结构图

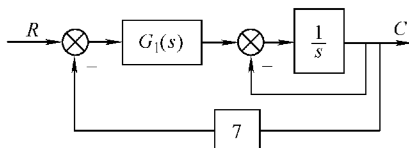


图 5-42　系统结构图

【5-18】 已知系统的结构如图 5-43 所示，其中 $G(s)=\frac{8}{s+2}$，求 $a=0$ 时的系统参数 ζ 与 ω_n；若 $\zeta=0.7$ 试计算 a。

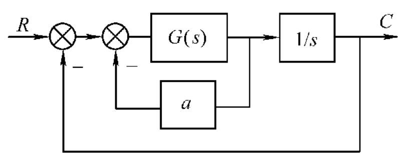


图 5-43　二阶系统结构图

【5-19】 已知单位负反馈系统开环传递函数 $G(s)=\frac{K}{s(\tau s+1)}$，当系统的超调量 $\sigma\%=25\%$、峰值时间 $t_p=1.5\text{s}$ 时，求 K 与 τ。

【5-20】 已知系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2.7}{s^3+5s^2+4s+2.7}$，试计算系统单位阶跃响应特征量 $\sigma\%$、t_p、t_s，并绘制单位阶跃响应曲线。

【5-21】 已知系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{0.9s+1}{(s+1)(0.01s^2+0.08s+1)}$，试计算系统单位阶跃响应特征量 $\sigma\%$、t_p、t_s，并用模型窗口的菜单命令绘制系统单位阶跃响应曲线。

第 6 章　连续系统稳定性分析的 MATLAB 实现

已经说明过，控制系统稳定性分析与稳态误差计算都是系统时域分析的范畴。系统稳定性是系统存在与运行的基础。控制系统稳定性分析是时域分析、稳态误差分析、根轨迹分析与频率分析的前提，只有稳定的系统，才有价值分析与研究系统自动控制的其他问题。

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已经复习了判定系统稳定性的代数稳定判据、根轨迹法与频率法。本章就以上三种判定系统稳定性方法的 MATLAB 实现举例说明。

为方便本章计算，作者编制了 4 个函数 pzmapp. m、rlocuss. m、bod. m、stepp. m，其源程序与用法参见附录。有关函数存储与运行方式，请参见参考文献［1］，后续自编函数同此。

6.1　代数稳定判据的 MATLAB 实现

根据自动控制原理，线性定常系统闭环特征方程的全部根，不论实根还是复根，若其实部均为负值，则闭环系统就是稳定的。由此可知，求解控制系统闭环特征方程的根并进而判断所有根的实部是否小于零，这种方法成为控制系统稳定性判别最基本的方法。这就是所谓的代数稳定判据。

6.1.1　用系统特征方程的根判定系统稳定性

系统稳定的必要充分条件是系统特征方程的全部根，或者系统闭环传递函数的全部极点都位于 s 左半平面。MATLAB 里的函数 roots()用来求闭环特征方程的根，其调用格式为

roots(P)

函数输入参数 $\boldsymbol{P}$ 是系统闭环特征多项式降幂排列多项式系数向量，输出即为求出的根，且存放在系统变量 *ans* 中。若系统闭环特征方程所有根的实部都小于零，则系统闭环是稳定的，只要有一个根的实部不小于零，则系统闭环就是不稳定的。只要有一个根的实部为零，则控制系统临界稳定，实际工程将临界稳定当做不稳定。

【例 6-1】　设系统特征方程为 $s^5+s^4+2s^3+2s^2+3s+5=0$，试计算特征根并判别系统稳定性。

解：

```
clear;P=[1 1 2 2 3 5];roots(P),
```

语句段执行结果

```
ans  =  0.7207  +  1.1656i
        0.7207  -  1.1656i
       -0.6018  +  1.3375i
       -0.6018  -  1.3375i
       -1.2378
```

计算数据表明，5 个特征根中有 2 个根的实部为正值，所以闭环系统不稳定。

6.1.2　用 Lienard – Chipard 稳定判据判定系统稳定性

可以用另一种判据——Lienard – Chipard 稳定判据判定系统稳定性。其判据是：对于线性定常系统的特征方程 $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0\ (a_0 > 0)$，系统稳定的必要且充分条件是：特征方程的各项系数均大于 0，且 Hurwitz 行列式中奇数阶子行列式（即 D_1，D_3，$D_5 \cdots$）或偶数阶子行列式（即 D_2，D_4，$D_6 \cdots$）大于 0。

需要指出的是，Hurwitz 行列式在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》Hurwitz 稳定判据中已经说明。

【例 6-2】　试确定图 6-1 所示系统参数 τ 取何值能使系统稳定。

解：1）求系统闭环特征式。

```
clear;syms s tau G1 G2 G D n d phi;
G1 = (tau * s + 1)/s;G2 = 10/(s * (s + 1));G = G1 * G2;
phi = factor(G/(1 + G)); [n,d] = numden(phi);D = d,
```

程序运行结果 D = s^3 + s^2 + 10 * tau * s + 10。

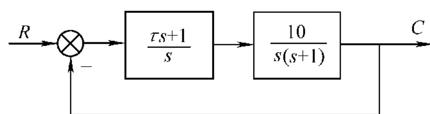


图 6-1　三阶系统结构图

2）用 Lienard – Chipard 判据判定系统稳定性。

要系统稳定，首先特征方程各项系数均应大于 0，系数 $a_0 = 1$、$a_1 = 1$、$a_2 = 10\tau$、$a_3 = 10$。所以 $a_2 = 10\tau > 0$，即 $\tau > 0$。

其次，因系统最高阶次 $n = 3$，则可计算 Hurwitz 行列式中偶数阶子行列式（即 D_2）应大于 0。用程序计算二阶子行列式。

```
clear;syms a1 a2 a3 a0 tau D2;a0 = 1;a1 = 1;
a2 = 10 * tau;a3 = 10;A = [a1 a3;a0 a2];D2 = det(A),
```

程序运行后得到 D2 = 10 * tau – 10，即要系统稳定，必须 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = 10\tau - 10 > 0$，所以 $\tau > 1$。综合结果为 $\tau > 1$。

【例 6-3】　设控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$，试确定使闭环系统稳定的 K 与 T 的取值范围。

解：1）求系统闭环特征式。

```
clear;syms s K T GH D n d phi;GH = K * (s + 1)/(s * (T * s + 1) * (2 * s + 1));
phi = factor(GH/(1 + GH));[n,d] = numden(phi);D = d;D = collect(D,s^2),
```

程序运行结果 D = 2 * T * s^3 + (2 + T) * s^2 + (K + 1) * s + K。

2）用 Lienard – Chipard 稳定判据判定系统稳定性。

因 $a_0 = 2T$、$a_1 = 2 + T$、$a_2 = K + 1$、$a_3 = K$，故 $a_0 = 2T > 0$，$T > 0$；$a_1 = 2 + T > 0$，$T > -2$；$a_2 = K + 1 > 0$，$K > -1$；$a_3 = K > 0$，$K > 0$。

用程序计算二阶子行列式：

```
clear;syms a1 a2 a3 a0 K T D2;a0 = 2 * T; a1 = 2 + T;a2 = K + 1; a3 = K;
A = [a1 a3;a0 a2];D2 = det(A);D2 = collect(D2,K),
```

程序运行结果 D2 = (2 - T) * K + 2 + T，系统要稳定，需 $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=(2-T)K+2+T>0$，所以 $2+T>(T-2)K$，即 $0<K<\dfrac{T+2}{T-2}$，同时还要 $T>0$。

【例 6-4】 三阶系统结构图如图 6-2 所示，要求闭环系统特征根全位于 $s=-1$ 垂线之左，试确定参数 K 与 ζ 的稳定域。

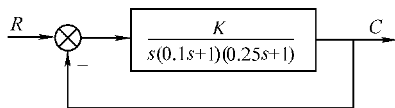


图 6-2　三阶系统结构图

解： 1）求系统闭环特征式。

```
clear;syms s K G H D n d phi;G = K/(s * (0.1 * s + 1) * (0.25 * s + 1));H = 1;
phi = factor(G/(1 + G * H));[n,d] = numden(phi);D = d,
```

程序运行结果 D = s^3 + 14 * s^2 + 40 * s + 40 * K。

2）要求闭环系统特征根全位于 $s=-1$ 垂线之左，可令 $s=z-1$（即 s 平面的 0 是 z 平面的 1，或者 s 平面的 -1 是 z 平面的 0），再求解以 z 为变量的方程。

```
clear;syms z s K D;D = s^3 + 14 * s^2 + 40 * s + 40 * K;  D = factor(subs(D,[s],[z - 1])),
```

程序运行结果 D = z^3 + 11 * z^2 + 15 * z - 27 + 40 * K。

3）用 Lienard - Chipard 稳定判据判定系统稳定性。

要系统稳定，首先，特征方程的各项系数均应大于 0，有系数 $a_0=1$、$a_1=11$、$a_2=15$、$a_3=40K-27$。所以 $a_3=40K-27>0$，即 $K>\dfrac{27}{40}=0.675$。

其次，因系统最高阶次 $n=3$，则可计算 Hurwitz 行列式中偶数阶子行列式（即 D_2）应大于 0。用程序计算二阶子行列式。

```
clear;syms a1 a2 a3 a0 K D2;a0 = 1;a1 = 11;a2 = 15;a3 = 40 * K - 27;A = [a1 a3;a0 a2];D2 = det(A),
```

程序运行结果 D2 = 192 - 40 * K。

即要系统稳定必须 $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=192-40K>0$，故 $K<\dfrac{192}{40}=4.8$。综合两者为 $0.675<K<4.8$。

6.2　用根轨迹法判定系统稳定性的 MATLAB 实现

根轨迹是开环系统中某个参数变动（$0\rightarrow\infty$）时闭环特征根在 s 平面上移动的轨迹。只要根轨迹在 s 平面纵坐标的左侧，对应的系统闭环就是稳定的。一旦根轨迹与 s 平面纵坐标相交或穿越纵坐标到其右侧，对应系统闭环就不稳定。

根轨迹分析的 MATLAB 实现将随后复习，本节先用其中的一个绘制系统零极点图的函数 pzmap()。函数命令调用格式为

```
[p,z] = pzmap(sys)
pzmap(p,z)
```

第一种格式的输入变量 *sys* 是 LTI 对象。当不带输出变量引用时，pzmap() 函数可在当前图形窗口中绘出系统的零极点图。在图中，极点用“×”表示，零点用“○”表示。

当带有输出变量引用函数时，可返回系统零极点位置的数据，而不直接绘制零极点图。零点数据保存在变量 z 中，极点保存在变量 p 中。如果需要可以再用 pzmap(p,z)绘制零极点图。

需要说明的是，如果对象 *sys* 是系统开环传递函数，pzmap(p,z)绘制的就是系统开环的零极点图。如果对象 *sys* 是闭环传递函数，pzmap(p,z)绘制的就是闭环系统的零极点图。

另外，两个 MATLAB 函数是用来绘制根轨迹图的 rlocus()与计算给定一组根的系统根轨迹增益与其相应的极点的 rlocfind()（参见根轨迹分析的 MATLAB 实现），本章解题都要用到。

【例6-5】 设一系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{0.25s+1}{s(0.5s+1)}$。1）试绘制该系统闭环零极点图，并对系统判稳。2）当系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=K\dfrac{0.25s+1}{s(0.5s+1)}$ 时，试绘制该系统常规根轨迹图，并对系统判稳。

解： 1）绘制系统闭环零极点图并对系统判稳。

```
clear;num=[0.25 1];den=[0.5 1 0];[p,z]=pzmapp(num,den);
```

程序运行后绘制系统闭环零极点图如图6-3所示，在图上单击极点“×”与零点“○”，就会出现三个文本框，计算机直接标出该点的“Zero”(零点坐标)、该点的“Pole”(极点坐标)、对应系统的“Dmping”(阻尼系数)、“Overshoot”(超调量)、“Frequency”(无阻尼自然振荡角频率)等参数。还计算出系统闭环极点 $p_1=-1.25+j0.6614$、$p_2=-1.25-j0.6614$，闭环零点 $z=-4$，计算数据与图示数据两者一致，都表明闭环系统是稳定的。

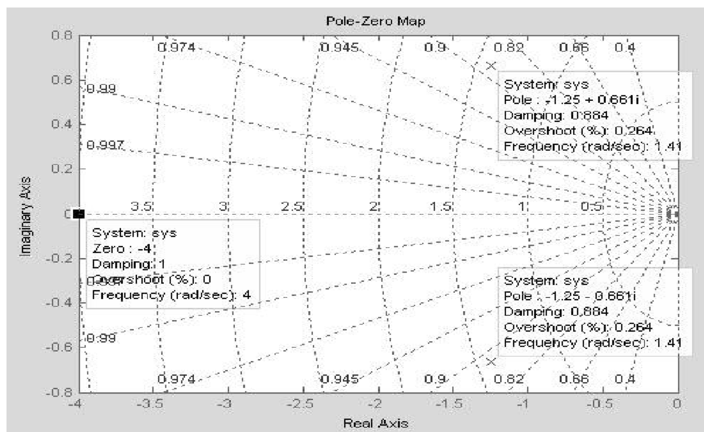


图6-3　系统闭环零极点图

2）当系统的 $G(s)H(s)=K\dfrac{0.25s+1}{s(0.5s+1)}$，绘制该系统根轨迹图并对系统判稳。

```
clear; num=[0.25 1];den=conv([1 0],[0.5 1]);key=1;rlocuss(key,num,den);
```

程序运行后绘制系统根轨迹图，如图6-4所示。单击根轨迹图上某一点，也会出现一个文本框，计算机直接标出该点的“Gain”（K 值）、该点“Pole”（坐标）、对应系统的“Dmping”（阻尼系数）、“Overshoot”（超调量）、“Frequency”（无阻尼自然振荡角频率）等参数（见图6-4）。而且在同一根轨迹图上，可用光标多次单击图上的不同点，显示不同

点的参数。由于光标指点的不确定性，显示器显示的数据有误差。

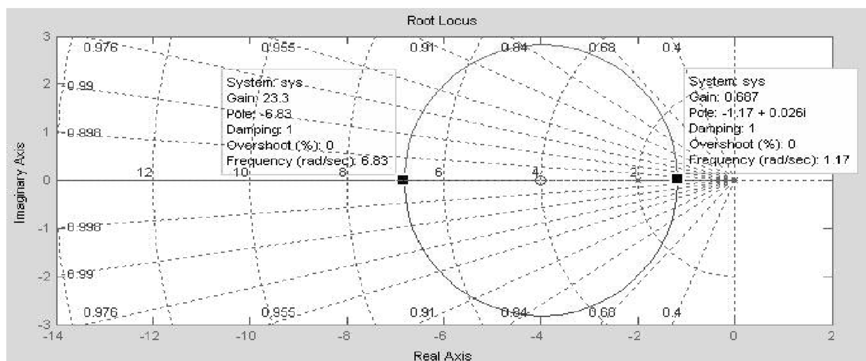


图 6-4　系统根轨迹图

该系统根轨迹起始于两个开环极点：$p_1=0$ 与 $p_2=-2$，在横轴上根轨迹相对而行，经汇合点 $d_1=-1.172$ 又分离成两半圆，在横轴上汇合点 $d_2=-6.828$ 又分离，一支根轨迹指向开环零点 $z_1=-4$，另一支指向 $-\infty$。当参数 $K(0\to\infty)$ 变动时，根轨迹均在 s 平面纵坐标的左侧，对应的系统闭环总是稳定的。

读者还可以运行以上 $key=2$ 时的程序，程序中有一条带鼠标操作的函数命令 rlocfind()。带左端输出的函数命令执行后，可在图形窗口根轨迹图中显示十字形光标，当选择根轨迹上某一点（即十字形光标指向根轨迹上该点）时，其相应的增益由变量 k 记录，与此增益相关的所有极点记录在变量 *polse* 中。从显示所有极点的数值（即位置），就可判断系统的稳定性。

按以上叙述对根轨迹图进行两次操作（可多次操作），得两个分离点：$d_1=-1.172$、$d_2=-6.828$，对应着开环增益 $K_1=0.686$、$K_2=23.31$。

当在根轨迹实轴上第一区段即自系统开环极点 $p_1=0$、$p_2=-2$ 指向分离点 $d_1=-1.172$ 的区段时，对应的 $0\leqslant K\leqslant 0.686$；当在实轴上第二区段即自分离点 $d_2=-6.828$ 指向开环零点 $z_1=-4$ 与无穷远时，对应的 $23.31\leqslant K\leqslant\infty$。这都对应着系统闭环阶跃响应无超调。

当在根轨迹圆上时，系统闭环特征方程出现共轭复根，意味着系统闭环阶跃响应有超调，但系统闭环还是稳定的。

【例 6-6】　设一系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$，1）试绘制该系统闭环零极点图，并对系统判稳。2）当系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$ 时，试绘制该系统的常规根轨迹图，再对系统判稳并用阶跃响应曲线验证。

解：本题解法同上题。

1）绘制系统闭环零极点图并对系统判稳。

```
clear;num=[1];den=conv(conv([1 0],[1 1]),[0.5 1]);[p,z]=pzmapp(num,den);
```

程序运行后得到系统闭环极点为 $p_1=-2.5214$、$p_{2.3}=-0.2393\pm0.8579\mathrm{j}$，闭环零点为空即没有闭环零点。程序运行后绘制该系统闭环的零极点图，如图 6-5 所示，计算数据与图示两者一致，即闭环极点都在 s 平面纵坐标的左侧，表明闭环系统是稳定的。

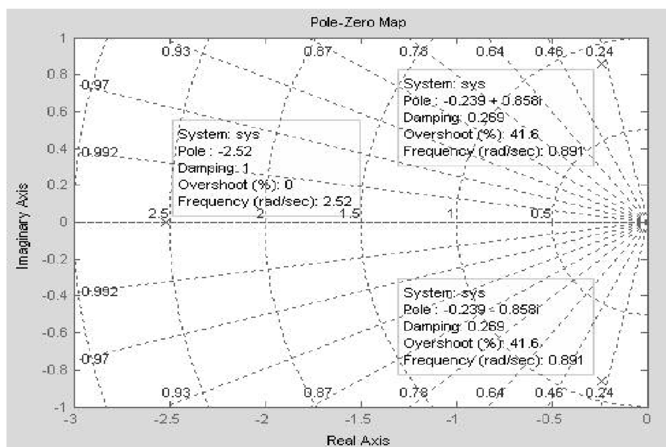


图 6-5　系统闭环零极点图

2）系统的 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$ 绘制该系统根轨迹图并对系统判稳。

```
clear;num=[1];den=conv([1 1 0],[0.5 1]);key=1;rlocuss(key,num,den);
```

程序运行后绘制系统根轨迹图，如图 6-6 所示。再单击根轨迹图上的 4 个点，出现 4 个文本框（见图 6-6）。由于光标指点的不确定性，显示器显示的数据有误差。

读者也可以运行以上 $key=2$ 时的程序，当选择根轨迹图上的点为（−6）时，实际鼠标指点为（−6.0296 −0.0155i），对应的 $k=61.1035$，此时系统 3 个极点为 $p_1=-6.0296$、$p_{2,3}=1.5148\pm j4.2395$ 。

在此提一个问题：如何验证以上数据对本系统是正确的？

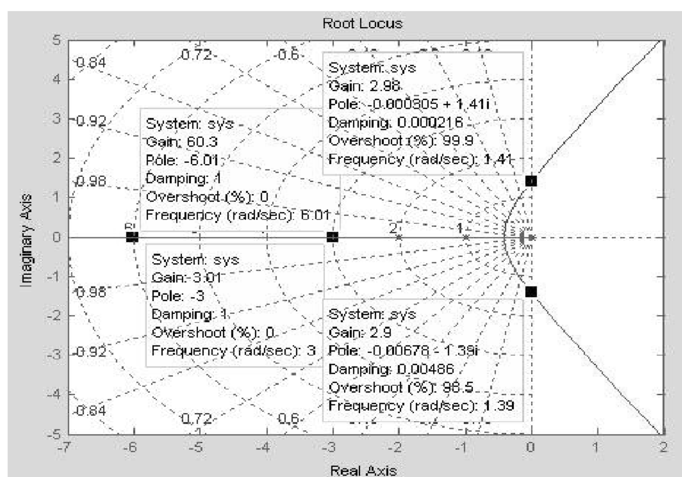


图 6-6　系统根轨迹图

当参数 $K(0\rightarrow3)$ 变动时，根轨迹均在 s 平面纵坐标的左侧，对应的系统闭环是稳定的。一旦根轨迹穿越纵坐标到达其右侧，对应的 $K>3$，那么系统闭环就不稳定。

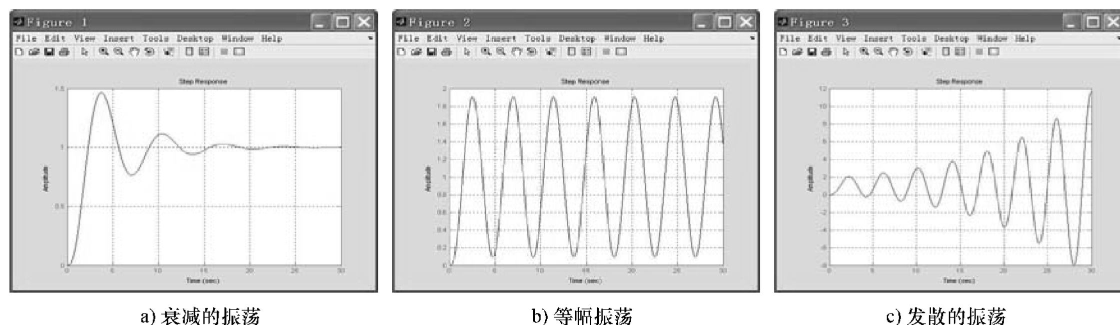
当在根轨迹实轴上的区段时，对应着系统闭环阶跃响应无超调，系统闭环稳定。当不在

根轨迹实轴上的区段时，系统闭环特征方程出现了共轭复根，意味着系统闭环阶跃响应有超调，但系统闭环还是稳定的。

3）当系统的 $K=1.2$、$K=3$ 与 $K=4$ 时，用程序绘制系统闭环单位阶跃响应曲线。

```
clear;t=0:0.01:30;
n1=[1];d1=conv(conv([1 0],[1 1]),[0.5 1]);
n=1.2*n1;s1=tf(n,d1);sys=feedback(s1,1);
figure(1);step(sys,t);grid;pause;
n=3*n1;s1=tf(n,d1);sys=feedback(s1,1);
figure(2);step(sys,t);grid;pause;
n=4*n1;s1=tf(n,d1);sys=feedback(s1,1);
figure(3);step(sys,t);grid;
```

程序运行后，绘制出系统的 $K=1.2$、$K=3$ 与 $K=4$ 时，单位阶跃响应曲线如图 6-7 所示。由图 6-7a 可见，当 $K=1.2$ 时，系统单位阶跃响应曲线为衰减的振荡；当 $K=3$ 时即图 6-7b，系统的单位阶跃响应曲线为等幅振荡，对应着系统临界稳定；当 $K=4$ 时即图 6-7c，系统的单位阶跃响应曲线为发散的振荡，对应着系统不稳定。这完全验证了以上运算的结论。



a) 衰减的振荡　　b) 等幅振荡　　c) 发散的振荡

图 6-7　系统单位阶跃响应曲线

在此再提一个问题：如何分别绘制系统 $K=1.2$、$K=3$ 与 $K=4$ 时的系统仿真模型（sx2L0606a.mdl、sx2L0606b.mdl、sx2L0606c.mdl）并借助仿真模型验证以上单位阶跃响应是正确的？

6.3　用频率法判定系统稳定性的 MATLAB 实现

本书第 9 章是控制系统频域分析。本节也先用系统频域分析的对数频率稳定判据与 Nyquist 稳定判据两个对系统判稳的法则，前者就是 Bode 图法，后者则是 Nyquist 曲线法。

6.3.1　用 Bode 图法判断系统稳定性

有了系统的 Bode 图，就可以计算频域性能指标。从控制原理上说，当计算出的相角稳定裕度 $\gamma>0$ 时，系统闭环稳定，否则不稳定。

在第 9 章中将要介绍的求系统模值裕度与相角裕度的 MATLAB 函数 margin()，既可绘制系统 Bode 图，又能够计算频域性能指标。函数命令调用格式为

margin(sys)

[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys)

当不带输出参数引用函数时，margin() 函数可在当前图形窗口中绘制出带有稳定裕度的 Bode 图。输入参数 *sys* 一般是用系统开环传递函数描述的系统模型，输出参数返回的 *Gm* 或 L_h 是系统模值裕度及其对应的 $-\pi$ 穿越角频率 *Wcg* 或 ω_g 、*Pm* 或 γ 是相角裕度及其对应的剪切角频率 *Wcp* 或 ω_c 。对于开环 SISO 系统，既可以是连续时间系统，也可以是离散时间系统。请看示例。

【例 6-7】　已知某系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{75(0.2s+1)}{s(s^2+16s+100)}$，试用 Bode 图法判断闭环系统的稳定性，并绘制阶跃响应曲线予以验证。

解： 1）用 Bode 图对闭环系统判稳。

```
clear; num =75 * [0 0 0.2 1]; den = conv([1 0],[1 16 100]);[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = bod(num,den);
```

程序运行后绘制系统 Bode 图，如图 6-8 所示，并计算出频域指标：模值稳定裕度 *Gm* 或 $L_h=\infty$ dB ; $-\pi$ 穿越频率 *Wcg* 或 $\omega_g=\infty$ rad/s ；相角稳定裕度 *Pm* 或 γ=91.6644° ；剪切频率 *Wcp* 或 $\omega_c=0.7573$rad/s 。这些数据说明系统闭环不仅稳定，而且有很好的稳定裕度。

2）绘制系统单位阶跃响应曲线验证系统的稳定性。

```
clear; num =75 * [0 0 0.2 1];den = conv([1 0],[1 16 100]);key =1;stepp(key,num,den);
```

程序运行后，绘制出系统的单位阶跃响应曲线，如图 6-9 所示。闭环系统的响应曲线表明，系统不仅稳定，而且单位阶跃响应不超调，并有良好的性能指标。

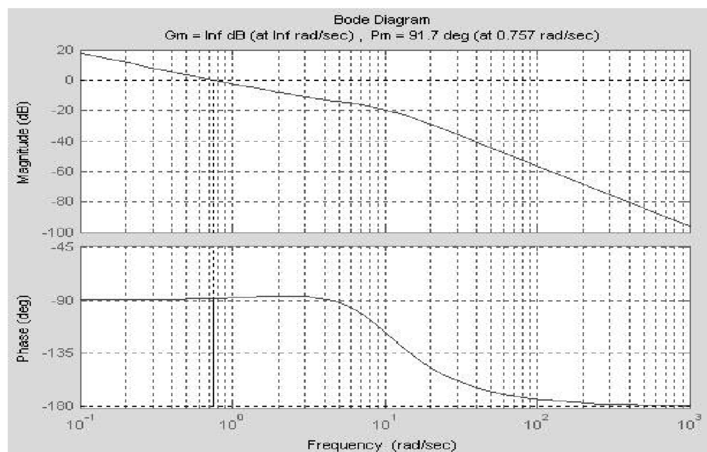


图 6-8　系统 Bode 图

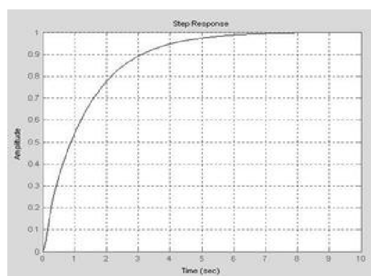


图 6-9　系统单位阶跃响应曲线

还可绘制系统仿真模型并借助模型（sx2L0607.mdl）验证以上单位阶跃响应是正确的。

【例 6-8】　已知某系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$，试用 Bode 图法判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

解： 1）用 Bode 图对闭环系统判稳。

```
clear;num=[0 0 10];den=conv(conv([1 0],[2 1]),[1 0.5 1]);[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=bod(num,den);
```

程序运行后绘制出系统的 Bode 图，如图 6-10 所示，并计算出系统频域性能指标：模值稳定裕度 $L_h = 20\log 0.075 = -22.4988\text{dB}$；相角稳定裕度 $\gamma = -136.3866°$；$-\pi$ 穿越频率 $\omega_g = 0.7067\text{rad/s}$；剪切频率 $\omega_c = 1.6210\text{rad/s}$。指标模值稳定裕度与相角稳定裕度均为负值，数据说明系统闭环是不稳定的。

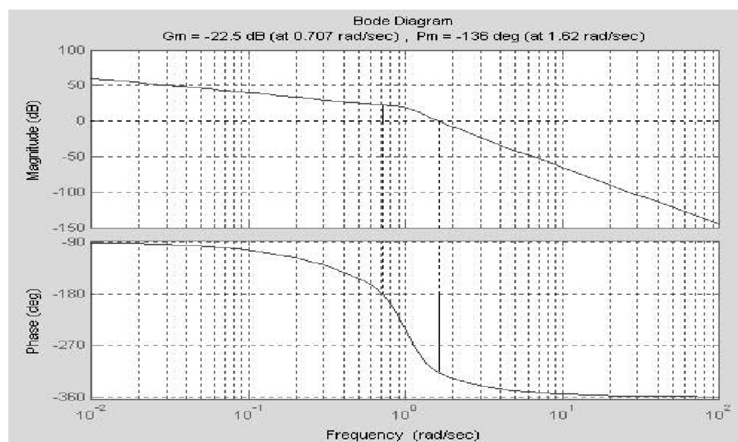


图 6-10　系统 Bode 图

2）绘制系统仿真模型 sx2L0608.mdl（见图 6-11）与单位阶跃响应曲线验证系统的稳定性。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod2('sx2L0608');sys=ss(a,b,c,d);t1=0:0.001:10;step(sys,t1),grid;
```

程序运行后，绘制出系统的单位阶跃响应曲线，如图 6-12 所示，闭环系统的单位阶跃响应是发散的振荡，表明系统不稳定，验证了用 Bode 图判定系统不稳定的结论。

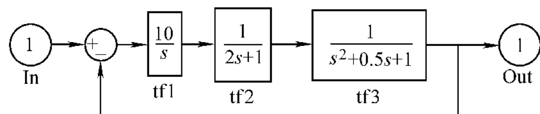


图 6-11　系统仿真模型 sx2L0608.mdl

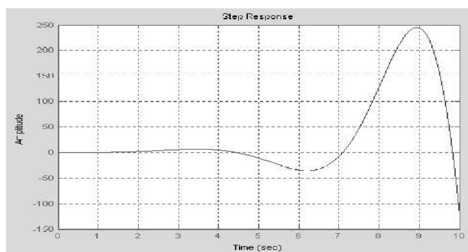


图 6-12　系统的单位阶跃响应曲线

6.3.2　用 Nyquist 曲线法判断系统稳定性

根据自动控制原理[7]，Nyquist 稳定判据是：当系统开环 $G(s)$ 的 Nyquist 曲线不穿过复平面（-1,j0）点且逆时针包围临界点（-1,j0）的圈数 R 等于系统开环传递函数的正实部极点数 P 时，则闭环系统 $\Phi(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)}$ 稳定；否则，就不稳定。应用 Nyquist 稳定判据必须先绘制出 Nyquist 曲线。

MATLAB 系统绘制连续系统 Nyquist 曲线的函数为 nyquist()，其调用格式为

nyquist(sys)

[re,im,w] = nyquist(sys)

nyquist(sys) 函数用来计算并绘制系统 Nyquist 曲线，可用于 SISO 或者 MIMO 的连续时间系统。LTI 对象 *sys* 可以是由函数 tf()、zpk()、ss() 中任何一个函数建立的开环系统模型。当函数命令为无等号左边输出变量格式时，函数在当前图形窗口中直接绘制出系统的 Nyquist 曲线。

需要特别注意，此时绘制的 Nyquist 曲线默认角频率 ω 范围为 $(-\infty, +\infty)$。由自动控制理论知道，若令点 $s = j\omega$ 及 $-\infty \leqslant \omega \leqslant 0$，即当点 s 沿虚轴从 $-j\infty$ 向 j0 运动时，求得轨线为

$$G(s)H(s)_{s=-j\omega} = |G(j\omega)H(j\omega)|e^{-j\angle G(j\omega)H(j\omega)}$$

当点 $s = j\omega$ 及 $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 时，即当点 s 沿虚轴从 j0 向 $j\infty$ 运动时，则得轨线为

$$G(s)H(s)_{s=j\omega} = |G(j\omega)H(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)}$$

这两部分轨线构成闭环系统在 $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 时的完整开环频率响应 $G(j\omega)H(j\omega)$，其中范围 $-\infty \leqslant \omega \leqslant 0$ 的 $G(-j\omega)H(-j\omega)$ 部分曲线与范围 $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 的部分曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 对称于 $G(s)H(s)$ 复平面的实轴。在自动控制原理的教科书中，一般只绘制 $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 时的幅相特性曲线，这仅是 MATLAB 中的函数命令 nyquist() 执行后绘制的对于横轴对称的幅相特性曲线关于 $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 范围的部分。

[re,im,w] = nyquist(sys) 或者 [re,im,w] = nyquist(sys,w) 函数为带输出变量引用的函数，可计算系统在频率 ω 处的频率响应输出数据，而不绘制出曲线。其中，输出变量 Re 为频率响应的实部，Im 为频率响应的虚部，ω 是频率点。

【例 6-9】 已知某系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \dfrac{600}{0.0005s^3 + 0.3s^2 + 15s + 200}$，试用 Nyquist 稳定判据判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

解：1）计算系统开环特征方程的根。

```
clear;P=[0.0005 0.3 15 200];roots(P),
```

程序运行结果

```
ans =1.0e+002 *
    -5.4644
    -0.2678 + 0.0385i
    -0.2678 - 0.0385i
```

即三个根均有负实部，都为稳定根。故系统开环特征方程的不稳定根的个数 $p = 0$。

2）绘制系统的开环 Nyquist 曲线，并用来判断闭环系统的稳定性。

```
clear;n=600;d=[0.0005 0.3 15 200];GH=tf(n,d);nyquist(GH),grid;
```

程序运行后，绘制出系统的开环 Nyquist 曲线，如图 6-13 所示。由图可以看出，系统的 Nyquist 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点。而 $p = 0$，根据 Nyquist 稳定判据，其闭环系统是稳定的。这还可以用系统的阶跃响应曲线来验证。

3）用阶跃响应曲线验证。

```
clear;num=600;den=[0.0005 0.3 15 200];key=2;stepp(key,num,den);
```

程序运行后计算出时域性能指标：超调量 $\sigma\% = 19.0185\%$、峰值时间 $t_p = 0.0673s$、调节时间 $t_s = 0.1020s$。并绘制系统单位阶跃响应曲线，如图 6-14 所示。由图可知，曲线

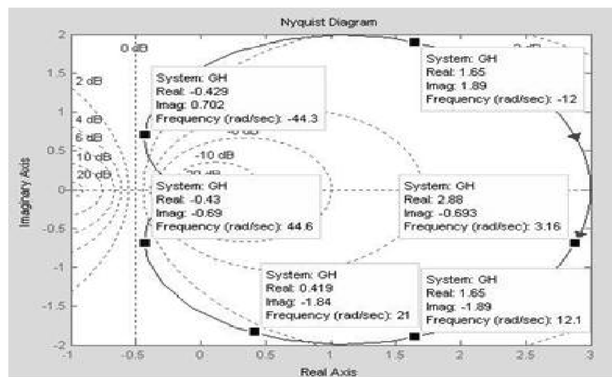


图 6-13　系统开环 Nyquist 曲线

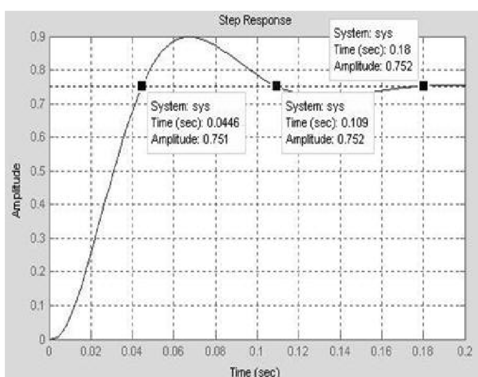


图 6-14　系统单位阶跃响应曲线

略微超调后迅速衰减到响应终了值，对应的系统闭环不仅稳定，而且具有优良的性能指标，这就验证了 Nyquist 稳定判据判断结论的正确性。

【例 6-10】　已知某系统结构图如图 6-15 所示，试用 Nyquist 稳定判据判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

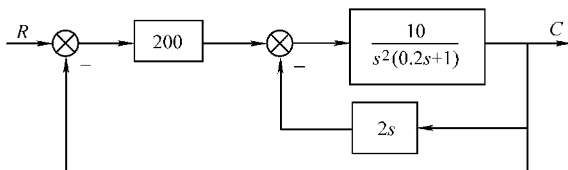


图 6-15　系统结构图

解： 1）求系统的开环传递函数。

```
clear;syms s;G1 = 10/(s^2 * (0.2 * s + 1));H1 = 2 * s;phi1 = G1/(1 + G1 * H1);
G2 = 200;GH = factor(G2 * phi1);[n,d] = numden(GH);GH = n/d,
```

程序运行后得到 $G(s)H(s) = \dfrac{10000}{s(s^2 + 5s + 100)}$。

2）计算系统开环特征方程的根。

```
clear; P = [1 5 100 0];roots(P),
```

程序运行结果

```
ans = 0
   -2.5000  +  9.6825i
   -2.5000  -  9.6825i
```

即三个根均为稳定根，两个根有负实部。根据自动控制原理，零根当做稳定根，故系统开环特征方程的不稳定根的个数 $p = 0$。

3）绘制系统的开环 Nyquist 曲线，并用来判断闭环系统的稳定性。

```
clear;n = [10000];d = [1 5 100 0];GH = tf(n,d);nyquist(GH),grid;
```

程序运行后，绘制出系统的开环 Nyquist 曲线，如图 6-16 所示。由图可以看出，系统的 Nyquist 曲线顺时针方向包围（-1,j0）点一圈即-2π 。而 $p = 0$ ，根据 Nyquist 稳定判据，其

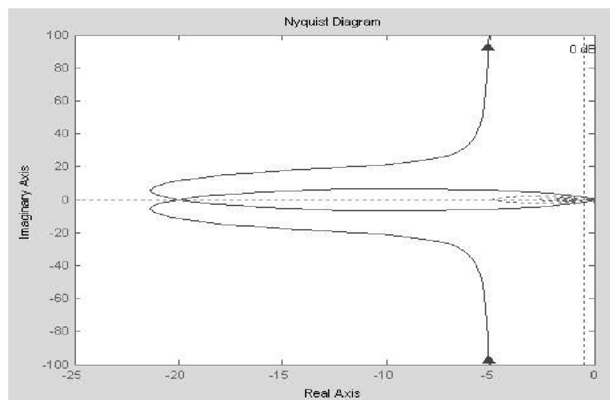


图 6-16　系统的开环 Nyquist 曲线

闭环系统是不稳定的。这还可以用系统的阶跃响应曲线来验证。

4）绘制系统仿真模型 sx2L0610. mdl（见图 6-17）与单位阶跃响应曲线验证系统的稳定性。

```
clear;[a,b,c,d] = linmod2('sx2L0610');sys = ss(a,b,c,d);t1 =0:0.001:0.6;step(sys,t1),grid;
```

程序运行后，绘制出系统单位阶跃响应曲线，如图 6-18 所示。由图可知，曲线呈现为发散的振荡，对应系统闭环是不稳定的，这验证了 Nyquist 稳定判据判断结论正确。

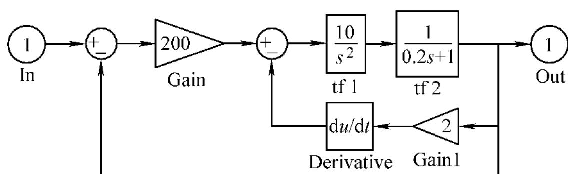


图 6-17　系统仿真模型 sx2L0610. mdl

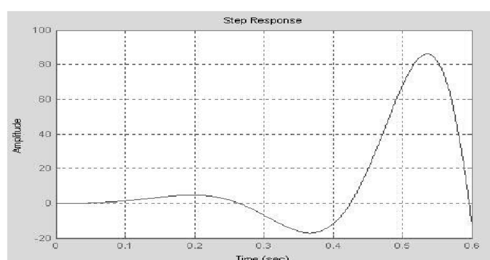


图 6-18　系统的单位阶跃响应曲线

习　题

【6-1】　设系统特征方程为 $s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$，试计算特征根并判别该系统的稳定性。

【6-2】　试确定图 6-19 所示系统的稳定性。

【6-3】　试确定图 6-20 所示系统参数 K 与 ζ 的稳定域。

【6-4】　设一系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \dfrac{s+5}{s(s+1)(s+10)}$，（1）试绘制该系统闭环零极点图并对系

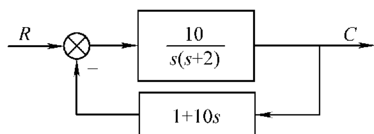


图 6-19　二阶系统结构图

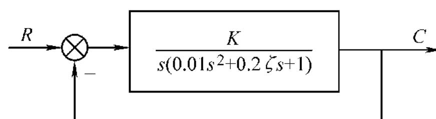


图 6-20　二阶系统结构图

统判稳。（2）当系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+5)}{s(s+1)(s+10)}$ 时，试绘制该系统的常规根轨迹图，并对系统判稳。

【6-5】 已知一系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{1}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$，（1）试绘制该系统闭环零极点图并对系统判稳。（2）当系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$ 时，试绘制该系统常规根轨迹图，并对系统判稳。

【6-6】 已知某系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{19}{s(s+1)(0.1s+1)}$，试用 Bode 图法判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

【6-7】 当系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(0.1s+1)}$ 时，试用 Bode 图法判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

【6-8】 已知某系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{s+2}{s^2+s+1}$，试用 Nyquist 稳定判据判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

【6-9】 已知某反馈系统结构如图 6-21 所示，其中 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$，$H(s)=\dfrac{s^3}{(s+1)^2}$。试用 Bode 图法判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

【6-10】 已知某系统结构如图 6-22 所示，试用 Nyquist 稳定判据判断闭环系统的稳定性，并用阶跃响应曲线验证。

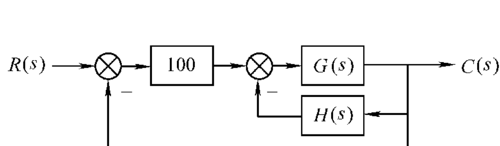


图 6-21　某反馈系统结构图

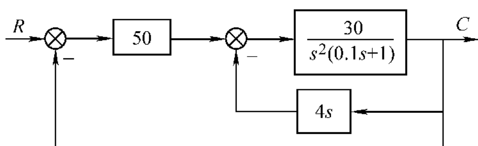


图 6-22　系统结构图

第 7 章　连续系统稳态误差计算的 MATLAB 实现

稳态误差计算对控制系统至关重要。为了熟练掌握采用 MATLAB 程序计算控制系统稳态误差，需要仔细、认真复习《控制系统 MATLAB 计算及仿真》或“自动控制原理”课程相关内容。首先，必须掌握自动控制关于控制系统误差传递函数、误差、稳态误差等的定义与公式；其次，必须熟练运用 Laplace 变换的终值定理计算稳态误差 e_{ss}；再者，必须掌握系统静态误差系数、动态误差系数概念及计算稳态误差的相关公式；还有，要掌握采用 MATLAB 程序绘制三种典型外作用信号下给定输入响应与其稳态误差曲线的方法；最后，掌握从输出端定义的非单位负反馈系统误差的计算方法。稳态误差计算里，使用的最重要 MATLAB 函数命令有 laplace()、numden()、roots()、solve()、step()、limit()、taylor()等。

为方便本章计算，作者编制了 5 个函数 Kpva. m、dyerr. m、insteerr. m、osteerr. m、plottt. m。

7.1　控制系统的静态误差系数与动态误差系数

计算控制系统静态误差系数与动态误差系数是系统稳态误差计算的基础，用 MATLAB 程序解算会简捷、高效而精准。

【例 7-1】　已知两个单位负反馈系统的闭环传递函数分别为 1）$\Phi_a(s)=\dfrac{s+1}{s^3+2s^2+3s+7}$ 与 2）$\Phi_b(s)=\dfrac{3s+10}{5s^2+2s+10}$。试求两系统的稳态位置、速度与加速度误差系数 K_p、K_v 与 K_a。

解：1）对系统 a 判稳。

```
clear;P=[1 2 3 7];roots(P),
```

语句执行结果

```
ans = -2.1325
       0.0662 + 1.8106i
       0.0662 - 1.8106i
```

根据代数判据，有一对共轭复根实部为正，系统 a 不稳定，故不能定义稳态误差系数。

2）系统 b 的计算。

① 对系统 b 判稳。

```
clear;P=[5 2 10];roots(P),
```

语句执行结果

```
ans = -0.2000 + 1.4000i
      -0.2000 - 1.4000i
```

即系统的特征根均有负实部，根据代数稳定判据，系统 b 稳定。

② 计算系统 b 的开环传递函数。

```
clear;syms s G;
```

```
[G] = solve('(1 + G) * (3 * s + 10) = G * (5 * s^2 + 2 * s + 10)',G);
G = factor(G);G = collect(G,s),
```

程序运行后得到开环传递函数 $G(s)=\dfrac{3s+10}{s(5s-1)}$。

③ 计算系统 b 的稳态位置、速度与加速度误差系数。

```
clear;syms s;G = (3 * s + 10)/s/( -1 + 5 * s);
H = 1;[Kp,Kv,Ka] = Kpva(G,H);
```

程序执行后得到系统 b 的静态位置误差系数 $K_p=\infty$ 、静态速度误差系数 $K_v=-10$ 与静态加速度误差系数 $K_a=0$ 。

【例 7-2】 已知系统结构图如图 7-1 所示。试求局部反馈加入前后系统的静态位置、速度与加速度误差系数 K_p 、K_v 与 K_a 。

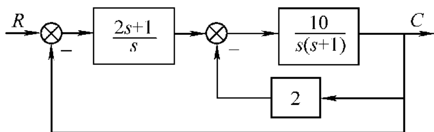


图 7-1　系统结构图

解： 1）局部反馈加入前。

① 求系统传递函数。

```
clear;syms s G1 G2 H2 G phi1 phi;
G1 = (2 * s + 1)/s;G2 = 10/(s * (s + 1));H2 = 0;
phi1 = G2/(1 + G2 * H2);G = factor(G1 * phi1),
phi = factor(G/(1 + G)),
```

程序执行后得到 $G(s)=\dfrac{20s+10}{s^2(s+1)}$、$\Phi(s)=\dfrac{20s+10}{s^3+s^2+20s+10}$。

② 对系统判稳。

```
clear;P = [1 1 20 10];roots(P),
```

程序执行后得到 3 个根的实部全是负的，根据代数稳定判据，系统稳定。

③ 计算系统的稳态位置、速度与加速度误差系数。

```
clear;syms s;G = 10 * (2 * s + 1)/s^2/(s + 1);H = 1;[Kp,Kv,Ka] = Kpva(G,H);
```

程序执行后得到系统静态位置误差系数 $K_p=\infty$ 、静态速度误差系数 $K_v=\infty$ 与静态加速度误差系数 $K_a=10$ 。

必须说明，求 $s\to0$ 极限的 Kpva. m 中，必须指明' right '即从右趋向于 0，否则计算出错。

2）局部反馈加入后。

① 求系统的传递函数。

```
clear;syms s G1 G2 H2 G phi1 phi;
G1 = (2 * s + 1)/s;G2 = 10/(s * (s + 1));H2 = 2;
phi1 = G2/(1 + G2 * H2);G = factor(G1 * phi1),
phi = factor(G/(1 + G)),
```

程序执行后得到 $G(s)=\dfrac{10}{s(2s+1)(s^2+s+20)}$、$\Phi(s)=\dfrac{20s+10}{s^3+s^2+40s+10}$。

② 对系统判稳。

```
clear;P = [1 1 40 10];roots(P),
```

程序执行后得到 3 个根的实部全是负的，根据代数稳定判据，系统稳定。

③ 计算系统的稳态位置、速度与加速度误差系数。

```
clear;syms s;G = 10/s * (2 * s + 1)/(s^2 + s + 20);H = 1;
[Kp,Kv,Ka] = Kpva(G,H);
```

程序执行后得到系统静态位置误差系数 $K_p = \infty$ 、静态速度误差系数 $K_v = 1/2$ 与静态加速度误差系数 $K_a = 0$ 。

【例7-3】 设单位负反馈系统前向通道传递函数为 $G(s) = \dfrac{100}{s(0.1s+1)}$，已知输入信号为 $r(t) = \sin(\omega_0 t)$ ，试求系统的动态误差系数 $C_0 \sim C_5$ ，并用动态误差系数求稳态误差 e_{ss} 。

解：1）求系统的动态误差系数 $C_0 \sim C_5$ 。

```
clear;syms s;G=100/(s*(0.1*s+1));H=1;dyerr(G,H);
```

语句执行结果

```
ans=1/100*s+9/10000*s^2-19/1000000*s^3-71/100000000*s^4+261/10000000000*s^5
```

即 $C_0 = 0$ ，$C_1 = 1\times10^{-2}$ ，$C_2 = 9\times10^{-4}$ ，$C_3 = -19\times10^{-6}$ ，$C_4 = -71\times10^{-8}$ ，$C_5 = 261\times10^{-10}$ 。

2）求系统的稳态误差 e_{ss} 。

```
clear;syms w0 t r ess C1 C2 C3 C4 C5;
r=sin(w0*t);r1=diff(r,'t');r2=diff(r,'t',2);
r3=diff(r,'t',3);r4=diff(r,'t',4);r5=diff(r,'t',5);
C0=0;C1=1/100;C2=9/10000;C3=-19/1000000;C4=-71/100000000;
C5=261/10000000000;es=vpa(C0*r+C1*r1+C2*r2+C3*r3+C4*r4+C5*r5,4);
ess=collect(collect(es,cos(w0*t)),sin(w0*t)),
```

程序执行结果

```
ess=
(-.9000e-3*w0^2-.7100e-6*w0^4)*sin(w0*t)+(.1000e-1*w0+.1900e-4*w0^3+.2610e-7*
w0^5)*cos(w0*t)
```

即

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= (-C_2\omega_0^2 + C_4\omega_0^4 + \cdots)\sin(\omega_0 t) + (C_1\omega_0 - C_3\omega_0^3 + C_5\omega_0^5)\cos(\omega_0 t) \\
&= (-9\times10^{-4}\omega_0^2 - 7.1\times10^{-7}\omega_0^4)\sin(\omega_0 t) + (10^{-2}\omega_0 + 1.9\times10^{-5}\omega_0^3 + 2.61\times10^{-8}\omega_0^5)\cos(\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

【例7-4】 两系统结构分别如图7-2与图7-3所示。当输入信号为 $r(t) = 2t + \dfrac{1}{4}t^2$ 时，若要求4min内系统的稳态误差不超过6m，应选用哪个系统？

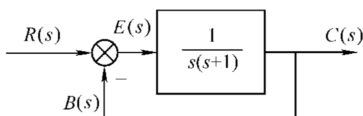


图7-2　控制系统 a

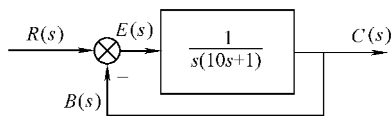


图7-3　控制系统 b

解：1）若采用静态误差系数法，图7-2与图7-3均为Ⅰ型系统，在 $r(t) = 2t + \dfrac{1}{4}t^2$ 作用下稳态误差均为 ∞ 。为求得系统静态误差随时间的变化规律，需要用动态误差系数法。

2）求图7-2所示系统的动态误差系数 $C_0 \sim C_5$。

```
clear;syms s;G=1/s/(s+1);H=1; dyerr(G,H);
```

程序运行结果 ans=s-s^3+s^4，即 $C_0 = 0$ 、$C_1 = 1$ 、$C_2 = 0$ 、$C_3 = -1$ 、$C_4 = 1$ 、$C_5 = 0$ 。

3）求图 7-2 所示系统 a 的稳态误差 e_{ssa} 。

```
clear;syms C0 C1 C2 C3 t s r rp rpp rppp ess;
C0=0;C1=1;C2=0;C3=-1;r=2*t+t^2/4;rp=diff(r,'t');
rpp=diff(r,'t',2);rppp=diff(r,'t',3);
ess=C0*r+C1*rp+C2*rpp+C3*rppp;
essa=subs(ess,t,4),
```

程序运行后得到当 $t=4$min 时，$e_{ssa}=4$m。

4）求图 7-3 所示系统 b 的动态误差系数 C_0 ～ C_5 。

```
clear;syms s;G=1/s/(10*s+1);H=1; dyerr(G,H);
```

程序运行结果 ans = s +9 * s^2 -19 * s^3 -71 * s^4 +261 * s^5，即 $C_0=0$ 、$C_1=1$ 、$C_2=9$、$C_3=-19$ 、$C_4=-71$ 、$C_5=261$ 。

5）求图 7-3 所示系统的稳态误差 e_{ssb} 。

```
clear;syms C0 C1 C2 C3 t s r rp rpp rppp ess;C0=0;C1=1;C2=9;C3=-19;
r=2*t+t^2/4;rp=diff(r,'t');rpp=diff(r,'t',2);rppp=diff(r,'t',3);
ess=C0*r+C1*rp+C2*rpp+C3*rppp;essb=subs(ess,t,4),
```

程序运行结果是当 $t=4$min 时，$e_{ssb}=8.5$ m。

6）结论：当 $t=4$min 时，$e_{ssa}=4$ m <6m，所以应该选用系统 a 。

7.2　三种典型信号给定输入作用下的稳态误差

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已对三种典型给定输入信号作用下的稳态误差进行了充分复习。需要特别强调，定义系统误差 $e(t)=r(t)-b(t)$ ，只有当 $H(s)=1$ 时，$e(t)=r(t)-c(t)$ ，《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中的相关公式才适用。还要强调单位加速信号是 $\frac{1}{2}t^2$ 。在解算有关加速信号的题目时，要特别关注 t^2 前的系数。

【例 7-5】 对图 7-4 所示系统：1）当 $K=8$、$a=0$ 时，确定系统的阻尼比 ζ 、无阻尼自然振荡角频率 ω_n 与在 $r(t)=t$ 作用下系统的稳态误差 e_{ss} ；2）当 $K=8$ 、$\zeta=0.7$ 时，确定参数 a 与在 $r(t)=t$ 作用下系统的稳态误差 e_{ss} ；3）在保证 $\zeta=0.7$ 与在 $r(t)=t$ 作用时 $e_{ss}=0.25$ 的条件下，确定参数 a 与 K。

解：1）当 $K=8$ 、$a=0$ 时，确定 ζ 、ω_n 与 e_{ss} 。

① 当 $a=0$ 时，求 $\Phi(s)$ 。

```
clear;syms s G H a zeta omegan; G=8/(s*(s+2));a=0;H=1;
[n,d]=numden(G/(1+G*H)); phi=simple(n/d),
```

程序运行后得到 $\Phi(s)=\dfrac{8}{s^2+2s+8}$ 。

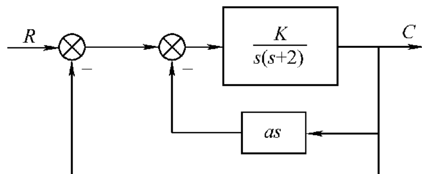


图 7-4　双闭环系统

② 求 ζ 、ω_n 。

```
clear;syms s zeta omegan;
[zeta,omegan]=solve('omegan^2=8','2*zeta*omegan=2');
zeta=vpa(zeta,4),omegan=vpa(omegan,4),
```

程序运行后得到 $\zeta=0.3535$ 、$\omega_n=2.828$ 。

③ 对系统判稳。

```
clear;P=[1 2 8];roots(P),
```

程序运行结果是系统的特征根均有负实部，根据代数稳定判据，系统稳定。

④ 求 e_{ss} 。

在 $r(t)$ 作用下，闭环系统误差（象函数）$E_r(s)=\Phi_{er}(s)\cdot R(s)=\dfrac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$ 。

```
clear;syms s;G=8/(s*(s+2));H=1;xb=1;r0=0;v0=1;
a0=0;[essrr0,essrv0,essra0]=insteerr(G,H,xb,[r0,v0,a0]);
```

程序运行后得到 $e_{ssv}=1/4$ 。

2）当 $K=8$、$\zeta=0.7$ 时，确定参数 a 与在 $r(t)=t$ 作用下系统的稳态误差 e_{ss} 。

① 当 $\zeta=0.7$ 时（$a\neq 0$），求 $\Phi(s)$ 。

```
clear;syms a G H1 H phi1 phi s;G=8/(s*(s+2));H1=a*s;H=1;
phi1=simple(G/(1+G*H1)),phi=simple(phi1/(1+phi1*H)),
```

程序运行后得到 $\Phi_1(s)=\dfrac{8}{s(s+2+8a)}$、$\Phi(s)=\dfrac{8}{s^2+(2+8a)s+8}$ 。

② 求 a、ω_n 。

```
clear;syms a s zeta omegan;zeta=0.7;
[a,omegan]=solve('omegan^2=8','2*0.7*omegan=2+8*a');
a=vpa(a,4), omegan=vpa(omegan,4),
```

程序运行后得到 $a=0.245$、$\omega_n=2.828$ 。

③ 对系统判稳。

```
clear;a=0.245;P=[1 2+8*a 8];roots(P),
```

程序运行后得知系统的特征根均有负实部，根据代数稳定判据，系统稳定。

④ 求 e_{ss} 。

```
clear;syms s; G=8/(s*(s+2+8*0.245)); H=1;xb=1;r0=0;v0=1;a0=0;
[essr,essrv,essra]=insteerr(G,H,xb,[r0,v0,a0]);essrv=vpa(essrv,4),
```

程序运行后得到 $e_{ssrv}=0.495$ 。

3）在保证 $\zeta=0.7$ 与在 $r(t)=t$ 作用时 $e_{ss}=0.25$ 的条件下，确定参数 a 与 K。

① 求 e_{ss} 的数学表达式。

```
clear;syms a K G H1 H phi1 phi s;G=K/(s*(s+2));H1=a*s;H=1;R=1/s^2;
phi1=simple(G/(1+G*H1));Er=simple(R/(1+phi1*H)); essr=limit(s*Er,s,0,'right'),
```

程序运行结果 essr=(2+K*a)/K。

② 求参数 a 与 K。

```
clear;syms a K omegan;
[K,a,omegan]=solve('(2+a*K)/K=0.25','1.4*omegan=2+a*K','omegan^2=K');
K=vpa(K,4),a=vpa(a,4),
```

程序运行后得到 $K=31.36$ ，$a=0.1862$ 。

4）验证确定参数 a 与 K 后，在 $r(t)=t$ 作用下的稳态误差 $e_{ss}=0.25$ 。

① 求局部反馈内环传递函数。

```
clear;syms a K G H1 H phi1 phi s;G=31.36/(s*(s+2));
```

```
H1 = 0.1862 * s; phi1 = simple(G/(1 + G * H1)),
```

程序运行结果 phi1 = 490000/(15625 * s + 122488)/s。

② 验证确定参数 a 与 K 后 $e_{ss} = 0.25$ 。

```
clear; syms s; G = 490000/(15625 * s + 122488)/s; H = 1; xb = 1; r0 = 0; v0 = 1; a0 = 0;
[essrr, essrv, essra] = insteerr(G, H, xb, [r0, v0, a0]); essrv = vpa(essrv, 4),
```

程序运行后得到 $e_{ssrv0} = 0.25$ ，说明以上参数计算正确。

需要说明的是，多元联立方程求解时，按未知变量的英语字母顺序列出其解，先列大写字母的，后列小写字母的。故等号左端方括号内需按此规则顺序输入未知变量。有困难时，可验算其根来解决。

【例 7-6】 对图 7-5 所示系统，指定 $e(t) = r(t) - c(t)$ 。1）当 $K_2 = 1$ 时，试问系统对 $r(t)$ 是几型的？2）若使系统对 $r(t)$ 为 I 型的，试计算选择 K_2 的值。

解： 1）当 $K_2 = 1$ 时，容易看出系统对 $r(t)$ 是 0 型的。

2）求系统闭环传递函数。

```
clear; syms K1 K2 T1 T2 s R C B E G H1 G1phi;
G = K1/((T1 * s + 1) * (T2 * s + 1)); H = K2;
phi = factor(G/(1 + G * H)),
```

程序运行结果 phi = K1/(T1 * s^2 * T2 + T1 * s + T2 * s + 1 + K1 * K2)。

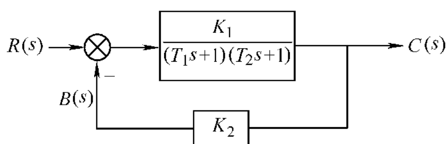


图 7-5　负反馈控制系统

求等效单位反馈系统的前向通道传递函数。

```
clear; syms K1 K2 T1 T2 s R C B E G H1 G1phi;
[G] = solve('K1 * (1 + G) = G * (T1 * s^2 * T2 + T1 * s + T2 * s + 1 + K1 * K2)', G);
G = factor(G); G = collect(G, s),
```

程序运行结果 G = K1/(T1 * s^2 * T2 + (T1 + T2) * s - K1 + K1 * K2 + 1)。

分析前向通道传递函数表达式，当系统为 I 型系统时，其 $G(s)$ 应有一个积分环节，那么，表达式分母的一部分值 $K_1K_2 - K_1 + 1$ 应为 0。

计算选择 K_2 的值。

```
clear; syms K1 K2; [K2] = solve('(1 + K1 * K2 - K1) = 0', [K2]),
```

程序运行后得到 $K_2 = 1 - \dfrac{1}{K_1}$ 。

【例 7-7】 设复合控制系统框图如图 7-6a 所示。已知 $G_1(s) = \dfrac{K_1}{T_1 s + 1}$、$G_2(s) = \dfrac{K_2}{s(T_2 s + 1)}$、$G_3(s) = \dfrac{K_3}{K_2}$。系统在扰动输入 $n(t) = 1(t)$ 作用下，要求系统稳态误差为零，试确定顺馈通道的传递函数参数 $G_n(s)$ 。

解： 1）将控制系统框图 7-6a 等效变换，如图 7-6b 所示。

2）关系式。根据自动控制原理，对系统等效结构图有以下关系式，即

$$C_n(s) = \Phi_{cn}(s) \times N(s)\text{ 、}\Phi_{cn}(s) = [G_3(s) + G_n(s) \times G_1(s)] \times \left[\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)}\right]$$

还有 $e(t) = r(t) - c(t)$ ，当 $r(t) = 0$ 时，$e_n(t) = -c_n(t)$ 或 $E_n(s) = -C_n(s)$ 。

3）计算系统的 $E_n(s)$ 。

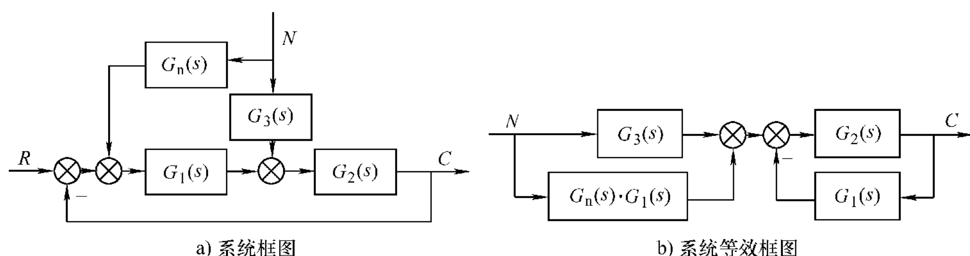


图 7-6　复合控制系统

```
clear;syms s G1 G2 G3 Gn K1 K2 K3 T1 T2 N n  phien Cn En;
G1 = K1/(T1 * s + 1);G2 = K2/(s * (T2 * s + 1));G3 = K3/K2;
phien = (G3 + Gn * G1) * (G2/(1 + G2 * G1));
n = sym('1(t)');N = laplace(n); Cn = phien * N;En = factor( - Cn),
```

程序运行结果

```
En = -1/s * (K3 * T1 * s + K3 + Gn * K1 * K2)/(T2 * s^3 * T1 + T2 * s^2 + T1 * s^2 + s + K1 * K2)
```

4）分析关系 $E_n(s)$ 的表达式。

只要 $E_n(s)$ 表达式分子为 0，在扰动输入 $n(t)=1(t)$ 作用下，系统稳态误差就能为零。也就是当 $K_3T_1s+K_3+G_nK_1K_2=0$ 时，$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=0$。

```
clear;syms s K1 K2 T1 T2 En ess;
En = -1/s * 0/(T2 * s^3 * T1 + T2 * s^2 + T1 * s^2 + s + K1 * K2);
ess = limit(s * En,s,0,'right'),
```

程序运行结果 ess = 0。

5）计算顺馈通道的传递函数参数 $G_n(s)$。

```
clear;syms Gn s K1 K2 K3 T1 T2 Gn;
[Gn] = solve('K3 * T1 * s + K3 + Gn * K1 * K2 = 0',Gn),
```

程序运行后得到 $G_n(s)=-\dfrac{K_3}{K_1K_2}(T_1s+1)$。

7.3　从输出端定义的非单位负反馈系统的误差的计算

在系统输出端定义误差，即误差 = 系统输出量的希望值 − 输出量实际值。必须对《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中的相关概念与关系式认真复习与深入理解。

【例 7-8】　一反馈系统前向通道传递函数 $G(s)=\dfrac{10}{s+2}$ 与反馈通道传递函数 $H(s)=1$，系统输入 $r(t)=1(t)$ 时，试计算系统输出端的稳态位置误差 e'_{ss}。当 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)}$ 而 $H(s)=1+10s$ 与 $r(t)=t\times 1(t)$ 时，再计算系统输出端的稳态位置误差 e'_{ss}。

解： 1）对系统判稳。

① $G(s)=\dfrac{10}{(s+2)}$ 与 $H(s)=1$ 时。

```
clear;syms s G H GH R C phier essrp;G=10/(s+2);H=1;GH=G*H;
phier=1/(1+GH);[n,d]=numden(phier),
```

程序运行结果 n = s + 2、d = s + 12，即闭环特征根为 − 12，故系统闭环稳定。

② $G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)}$ 与 $H(s)=1+10s$ 时。

```
clear;syms s G H GH R C phier essrp;G=10/(s*(s+2));
H=1+10*s;GH=G*H;phier=1/(1+GH);[n,d]=numden(phier),
```

程序运行结果 n = s * (s + 2)、d = s^2 + 102 * s + 10。

检查闭环特征根的正负。

```
clear;p=[1 102 10];roots(p),
```

程序运行后得知两个特征根均为负，故系统闭环稳定。

2）当 $G(s)=\dfrac{10}{s+2}$ 与 $H(s)=1$ 以及输入 $r(t)=1(t)$，计算控制系统输出端稳态误差。

```
clear;syms s;G=10/(s+2);H=1;r=sym('1*1(t)');[essrp]=osteerr(G,H,r);
```

程序运行后得到系统输出端的稳态位置误差 $e'_{ss}=\dfrac{1}{6}$。

3）当 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)}$ 与 $H(s)=1+10s$ 以及输入 $r(t)=t\times 1(t)$，计算系统输出端稳态误差。

```
clear;syms s;G=10/(s*(s+2));H=1+10*s;;r=sym('t*1(t)');[essrp]=osteerr(G,H,r);
```

程序运行后得到系统输出端的稳态位置误差 $e'_{ss}=\dfrac{1}{5}$。

7.4 扰动输入作用下的稳态误差计算

控制系统在扰动输入作用下的稳态误差计算只能使用 Laplace 变换的终值定理。

【例 7-9】 已知 $r(t)=1(t)$，$n(t)=0.1\cdot 1(t)$ 且指定 $e(t)=r(t)-c(t)$。试求图 7-7 所示系统总的稳态误差。

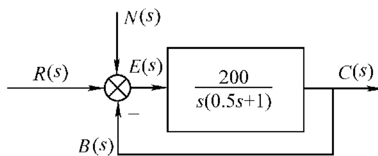


图 7-7 负反馈控制系统

解： 1）对系统判稳。

系统闭环特征方程：$D(s)=0.5s^2+s+200=0$。有 $a_i>0$，有 $D_2=a_1a_2-a_0a_3=1\times 200-0.5\times 0=200>0$，根据 Lienard－Chipard 判据，系统闭环稳定。

2）仅在 $r(t)$ 作用下（$n(t)=0$），求 e_{ssr} 的公式。

对本系统有 $\dfrac{C_r(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$，$E_r(s)=R(s)-C_r(s)$，其稳态误差为 $e_{ssr}=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot E_r(s)$。

3）仅在 $r(t)=1(t)$ 作用下求 e_{ssr}。

```
clear;syms G1 G2 H r R Cr Er t s essr;G2=200/(s*(0.5*s+1));G1=1;H=1;
r=sym('Heaviside(t)');R=laplace(r);
[n,d]=numden(G1*G2/(1+G1*G2*H));phi=n/d;
```

```
Cr = phi * R;Er = simple(R - Cr);essr = limit(s * Er,s,0,'right'),
```

程序运行后得到 $e_{ssr} = 0$ 。

4）仅在 $n(t)$ 作用下（$r(t) = 0$），求 e_{ssn} 的公式。

对本系统有 $\dfrac{C_n(s)}{-N(s)} = \dfrac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$，$E_n(s) = R(s) - C_n(s)$，其稳态误差为 $e_{ssn} = \lim\limits_{s\to 0} s \cdot E_n(s)$。

5）仅在 $n(t) = 0.1 \cdot 1(t)$ 作用下，求 e_{ssn} 。

```
clear;syms G1 G2 H r R n N Cr Er t s essn;
G1 = 1;G2 = 200/(s * (0.5 * s + 1));H = 1;R = 0;
n = sym('-0.1 * Heaviside(t)');N = laplace(n);
[num,den] = numden(G2/(1 + G1 * G2 * H));phin = num/den;
Cn = phin * ( - N); En = simple(R - Cn);
essn = limit(s * En,s,0,'right');essn = vpa(essn,2),
```

程序运行后得到 $e_{ssn} = -0.1$ 。那么 $e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = 0 - 0.1 = -0.1$。

7.5　绘制误差响应曲线

必须仔细、认真复习《控制系统 MATLAB 计算及仿真》里有关绘制误差响应曲线的思路与各种考虑，并特别关注绘制曲线时，横坐标在绘图与计算误差值两种情况不同的选择。

【例 7-10】　已知一个单位负反馈系统开环零极点增益模型为 $G(s) = 3\dfrac{(2s+1)}{s(s+2)(s-1)}$，1）试绘制出该系统的单位阶跃响应曲线、误差响应曲线，并求单位阶跃响应稳态误差；2）试绘制出该系统的单位斜坡响应曲线、误差响应曲线，并求单位斜坡响应稳态误差。

解：1）计算系统闭环传递函数，再依据闭环特征根对系统判稳。

```
clear;k = 6;z = -0.5;p = [-2 1 0];[n1,d1] = zp2tf(z,p,k);
s = tf(n1,d1);sys = feedback(s,1);roots(sys.den{1}),
```

程序运行后所得系统闭环全部特征根的实部都是负值，说明闭环系统稳定。以下进行稳态误差的计算确实是有意义的。

2）求系统单位阶跃给定响应与稳态误差。请特别关注时间的设置。

```
clear;numg = [6 3];deng = conv(conv([1 0],[1 2]),[1 -1]);
G = tf(numg,deng);numh = [1];denh = [1];H = tf(numh,denh);
key = 1;t = [0:0.1:30]';[esst] = plottt(key,G,H,t);
```

程序运行后，可得如图 7-8 所示系统单位阶跃给定响应曲线及其误差响应曲线，图中横坐标取 30s。根据自动控制原理得知，原系统为Ⅰ型系统，其单位阶跃响应的稳态误差应为 $e_{ss} = 0$，当时间取 300s 时，ess300 = -4.2188e-015（实际为 0）。

3）求系统单位斜坡给定响应与稳态误差。根据《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中计算斜坡响应稳态误差的思考与题目要求，调用函数命令 step() 的程序如下。请特别关注时间长短的设置。

```
clear;numg = [6 3];deng = conv(conv([1 0],[1 2]),[1 -1]);
G = tf(numg,deng);numh = [1];denh = [1];H = tf(numh,denh);
```

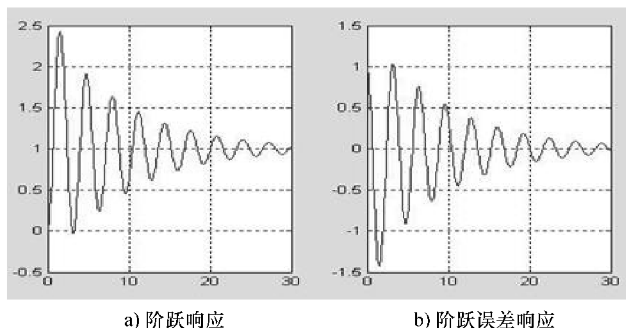


图 7-8　系统阶跃响应与阶跃误差响应曲线

```
key =2;t =[0:0.1:20]';[esst] =plottt(key,G,H,t);
```

执行程序后，可得系统单位斜坡响应曲线如图 7-9 所示。其时间设置为 t =[0:0.1:20]'。

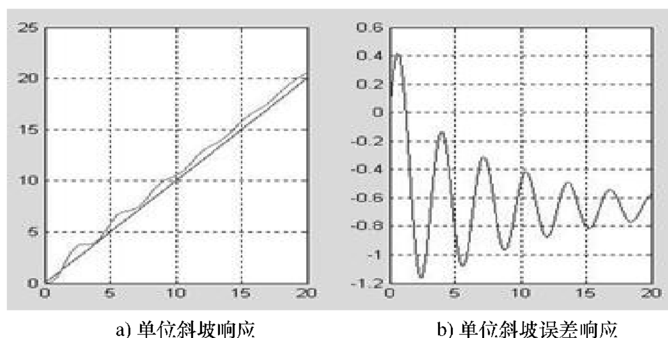


图 7-9　单位斜坡响应与单位斜坡误差响应曲线

根据自动控制原理得知，原单位负反馈系统为Ⅰ型系统，其单位斜坡响应的稳态误差应为 $e_{ss}=\dfrac{u_0}{K}=\dfrac{1}{1.5}=0.6667$，当取时间 $t\geqslant 100$s，即程序中取 t =[0:0.001:100]'，运行计算结果：$e_{ss}=-0.6667$。

【例 7-11】　已知一个单位负反馈系统前向通道传递函数为 $G(s)=\dfrac{24s^2+18s+3}{s^4+2s^3+10s^2}$，试绘制出该系统的单位加速信号输入响应及其稳态误差响应曲线，并计算其响应的稳态误差。

解：1）对系统判稳。

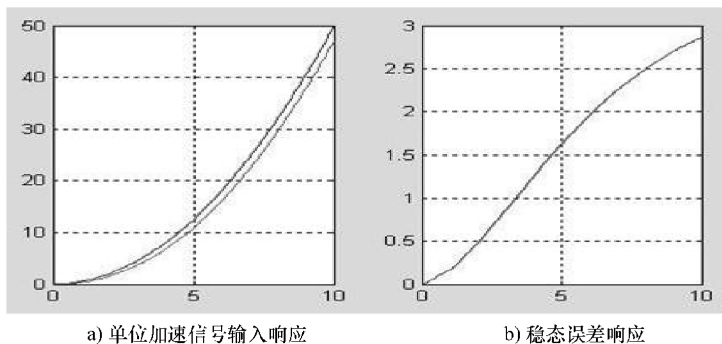
```
clear;n1 =[24 18 3];d1 =[1 2 10 0 0];
s1 = tf(n1,d1);sys = feedback(s1,1);roots(sys.den{1}),
```

程序运行后所得系统闭环全部特征根的实部都是负值，说明闭环系统稳定。

2）绘制系统单位加速信号输入响应与稳态误差响应曲线并计算其响应的稳态误差。

```
clear;numg =[24 18 3];deng =[1 2 10 0 0];G = tf(numg,deng);
numh =[1];denh =[1];H = tf(numh,denh);key =3;t =[0:0.1:10]';[esst] =plottt(key,G,H,t);
```

执行程序后，可得系统单位加速输入信号的响应曲线如图 7-10 所示。为了清晰显示曲线，横坐标取了 10s。



a) 单位加速信号输入响应　　b) 稳态误差响应

图 7-10　单位加速信号输入响应及其稳态误差响应曲线

根据自动控制原理得知，由题目给定的系统为Ⅱ型系统，其单位加速输入信号响应的稳态误差应为 $e_{ss}=\dfrac{a_0}{K}=\dfrac{1}{0.3}=3.3333$，当时间取为 100s 时，程序运行结果 ess = 3.3333。

习　题

【7-1】 已知单位负反馈系统前向通道传递函数为（1）$G(s)=\dfrac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$ 与（2）$G(s)=\dfrac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$，试求系统稳态位置、速度与加速度误差系数 K_p、K_v 与 K_a。

【7-2】 已知调速系统结构图如图 7-11 所示。其中 $G_1(s)=\dfrac{10}{0.7s+1}$、$G_2(s)=\dfrac{2}{0.24s+1}$、$\alpha=0.1$、$K_s=0.05\text{V/(r/min)}$。试求从输入端定义稳态误差的系统动态误差系数 $C_0\sim C_5$。

【7-3】 已知单位负反馈系统前向通道传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_oK_fK_cK_i}{s(T_cs+1)(T_fs+1)}$，若输入信号 $r(t)=a\cdot 1(t)+b\cdot t$（$a$ 与 b 为正常数)，欲使稳态误差 $e_{ss}<\varepsilon_0$，求系统各参数应满足的条件。

【7-4】 对图 7-12 所示系统规定误差 $e(t)=r(t)-c(t)$，（1）试对系统闭环判稳；（2）试分别计算跟踪给定阶跃输入 $r(t)=r_0\times 1(t)$、斜坡输入 $r(t)=v_0\times t$ 与加速度输入 $r(t)=\dfrac{1}{2}a_0t^2$ 时的稳态误差。

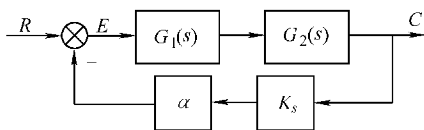


图 7-11　调速系统

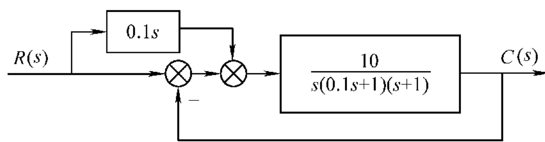


图 7-12　复合控制系统结构图

【7-5】 已知 $r(t)=t\cdot 1(t)$，$n(t)=1(t)$，且指定 $e(t)=r(t)-c(t)$。试求图 7-13 所示系统总的稳态误差。

【7-6】 欲使图 7-14 所示系统对输入 $r(t)$ 为Ⅱ型，试选择前馈参数 τ 与 b 的值，且指定 $e(t)=r(t)-c(t)$。

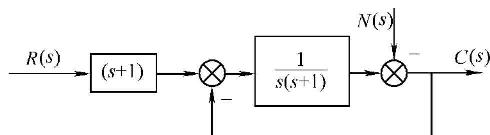


图 7-13　前馈控制系统结构图

【7-7】 某系统的结构如图 7-15 所示，且指定 $e(t)=r(t)-c(t)$。系统输入 $r(t)=1(t)$，试计算（1）$H(s)=1$ 与（2）$H(s)=5$ 时系统的稳态误差。

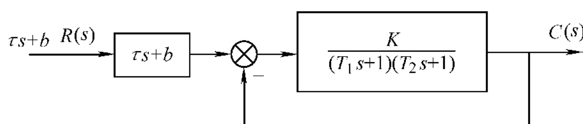


图 7-14 系统结构图

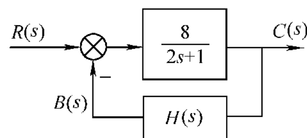


图 7-15 某系统的结构图

【7-8】 已知一个单位负反馈系统前向通道传递函数为 $G(s)=\dfrac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$，（1）试绘制出该系统的单位阶跃响应曲线并求单位阶跃响应稳态误差；（2）试绘制出该系统的单位斜坡响应曲线并求单位斜坡响应稳态误差；（3）试绘制出该系统的单位加速信号输入响应及其稳态误差响应曲线，并计算其响应的稳态误差。

【7-9】 设单位负反馈系统前向通道传递函数为 $G(s)=\dfrac{100}{s(0.1s+1)}$，（1）试绘制出该系统单位阶跃响应曲线并求单位阶跃响应稳态误差；（2）试绘制出该系统单位斜坡响应曲线并求单位斜坡响应稳态误差。

【7-10】 已知一个单位负反馈系统前向通道的传递函数为 $G(s)=\dfrac{8(0.5s+1)}{s^2(0.1s+1)}$，试绘制出该系统单位加速信号输入响应及其稳态误差响应曲线，并计算其响应的稳态误差。

【7-11】 设电动机转速自动控制系统如图 7-16 所示。其中传递函数框 $G_1(s)=\dfrac{K_0}{T_b s+1}$，$G_2(s)=\dfrac{K_1}{T_m s+1}$，$H(s)=K_c$。若输入信号 $r(t)=0$，负载扰动 $n(t)=-t$，试计算该系统的稳态误差 e_{ssrn}。

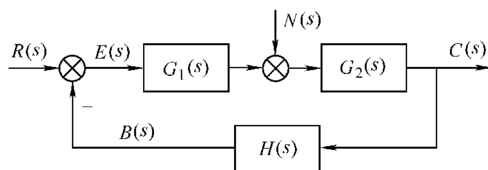


图 7-16 调速系统

【7-12】 对图 7-17 所示液面无差控制系统，已知电位计比例系数 $K_1=0.4\text{V/cm}$，放大器放大倍数 $K_2=100$，$K_3=2830\text{cm}^3/\text{V}\cdot\text{s}$，电动机传递函数为 $G_1(s)=\dfrac{K_3}{s(0.1s+1)}$，水箱传递函数为 $G_2(s)=\dfrac{K_4}{10s+1}$，式中 $K_4=0.449\times10^{-4}\text{s/cm}^2$。当 $r(t)=1(t)$ 与 $n(t)=t$ 时，试求系统稳态误差 e_{ss}。

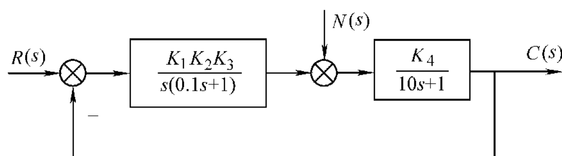


图 7-17 液面无差控制系统

【7-13】　对图 7-18 所示系统：（1）当 $K_f = 0$ 时，确定系统阻尼比 ζ 、无阻尼自然振荡角频率 ω_n 与在 $r(t) = t$ 作用下系统的稳态误差 e_{ss} ；（2）当 $\zeta = 0.6$ 时，确定系统参数 K_f 与在 $r(t) = t$ 作用下系统稳态误差 e_{ss} ；（3）当 $r(t) = t$ 时，欲保持 $\zeta = 0.6$ 与 $e_{ss} = 0.2$ ，试确定参数 K_f 与放大器系数 K_a 。

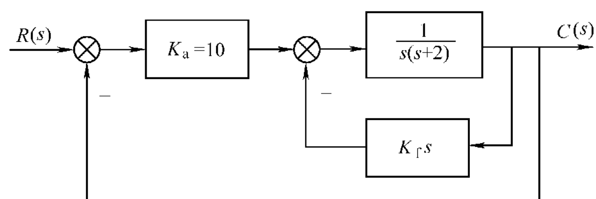


图 7-18　双环控制系统

第 8 章　连续系统根轨迹分析的 MATLAB 实现

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已经复习了有关根轨迹的一些基本概念：根轨迹、根轨迹方程、根轨迹法则、系统零极点图、主导极点、偶极子等。人工绘制符合根轨迹法则的根轨迹图现在已很少被采用，没有必要解算根轨迹相关问题。在 MATLAB 中，提供了系统函数：rlocus() 用来绘制系统根轨迹并用鼠标选点来确定对应的系统参数与性能指标，rlocfind() 用来计算给定根的根轨迹增益，pzmap() 用来绘制系统零极点图等，这些函数都能够方便、简单而快捷地绘制根轨迹或者进行有关根轨迹的计算。

应用 MATLAB 提供的函数与其他命令，编制成 MATLAB 程序，这种指令方式下进行计算与仿真是最常用的实现方法。

MATLAB 控制系统工具箱里还有一个系统根轨迹分析与设计的工具 Rltool，而在 MATLAB 7.5 版本里，工具名称改为“SISO Design for SISO Design Task”，即单输入单输出设计工具。在这个工具中，既可以分析系统根轨迹也能对系统进行设计。特别是能够对于被控对象在其前向通道中以配置零点、极点的方法来设计控制器，用以提高系统控制性能。除此之外，还能在补偿校正器设计过程中，及时观察系统响应曲线，看是否满足控制性能要求，以便立即修改设计数据。

8.1　控制系统根轨迹分析的 MATLAB 实现

根据自动控制原理，当根轨迹在复平面纵坐标以左时，对应系统闭环特征方程的根（即闭环极点）全是稳定根，那么系统是稳定的。若二阶系统的特征根全是实稳定根，则系统阶跃响应无超调。要提高系统的平稳性，应使闭环极点尽量靠近实轴，复数极点最好设置在最佳阻尼线（即复平面中与负实轴成 $\pm 45^\circ$ 的夹角线）附近。要提高系统快速性，系统闭环特征方程根需在虚轴以左且远离虚轴。要求系统动态过程尽快结束，其闭环极点应远离原点，且极点之间距离要拉大（即分布要松散）。

若系统特征方程出现共轭复根，那么系统阶跃响应将超调并振荡；当根轨迹与复平面的纵坐标相交时，对应的系统闭环特征方程有纯虚根，系统处于临界稳定。

当根轨迹穿越复平面纵坐标到达右边时，则对应系统闭环特征方程有不稳定根，系统是不稳定的。

8.1.1　根轨迹分析 MATLAB 实现的函数指令格式

1. 求系统根轨迹的函数 rlocus()

函数命令调用格式为

```
rlocus(sys)
rlocus(sys,k)
[r,k] = rlocus(sys)
```

rlocus(sys)函数命令用来绘制 SISO 的 LTI 对象的根轨迹图。输入参数 *sys* 为闭环系统开环传递函数 $G(s)$ 。当不带输出变量时，函数可在当前图形窗口中绘制出闭环系统特征方程 $1+kG(s)=0$ 的根轨迹图。函数既可适用于连续时间系统，也适用于离散时间系统。

rlocus(sys，k)可以用指定的反馈增益向量 *k* 来绘制系统 *sys* 的根轨迹图。

[r,k] = rlocus(sys)这种带有输出变量的函数，返回系统闭环极点位置的复数矩阵 *r* 及其相应的增益向量 *k*，而不直接绘制出零极点图。

2. 计算给定一组根的系统根轨迹增益函数 rlocfind()

函数命令调用格式为

[k,poles] = rlocfind(sys)

[k,poles] = rlocfind(sys,p)

[k,poles] = rlocfind(sys)函数输入变量 *sys* 可以是由函数 tf()、zpk()、ss()中任何一个建立的 LTI 对象模型，即开环传递函数 $G(s)$ 。函数命令执行后，可在根轨迹图形窗口中显示十字形光标，当用户选择根轨迹上某一点时，其相应的增益向量由 *k* 记录，与增益相对应的所有闭环极点记录在 *poles* 中。函数既适用于连续时间系统，也适用于离散时间系统。

[k,poles] = rlocfind(sys,p)函数可对给定根 *p* 计算对应的增益向量 *k* 与极点 *poles*。

8.1.2　根轨迹分析的 MATLAB 实现举例

联合使用根轨迹分析 MATLAB 函数的几个指令，会使解题更简单、方便。

【例 8-1】　设一负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+z)}{s^2(0.1s+1)}$，1）当开环零点 $z=-1.12$ 时，试绘制系统的根轨迹，并简单分析系统的稳定性；2）当 $z=-1$ 时，试概略确定闭环系统具有最佳阻尼比的极点、对应的开环增益 *K* 的大致范围及其超调量。

解：1）绘制 $z=-1.12$ 时系统的根轨迹。

```
clear;n=[1 1.12];d=conv([1 0 0],[0.1 1]);
sys=tf(n,d); rlocus(sys),grid;
```

程序运行后，绘制系统的根轨迹如图 8-1 所示。由图可见，①根轨迹即系统闭环特征根的变化全在复平面虚轴的左边，说明系统闭环总是稳定的；②在实轴上的根轨迹区段，起始

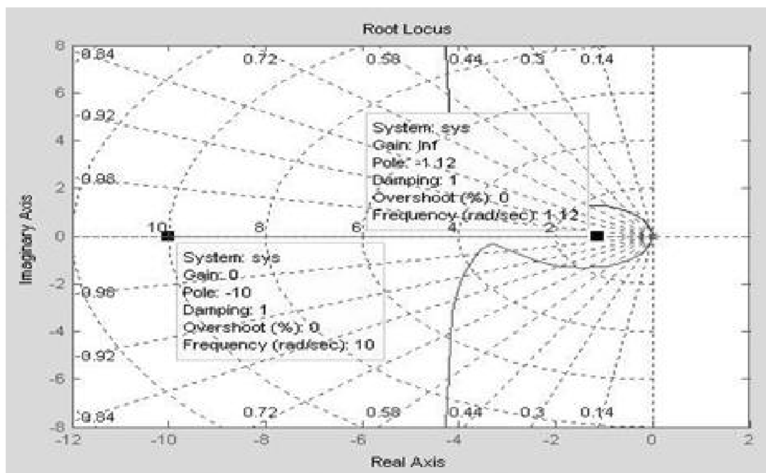


图 8-1　开环零点 $z=-1.12$ 时系统根轨迹

于开环极点 $p=-10$ ，对应开环增益 $K=0$ ，终止于开环零点 $z=-1.12$ ，对应开环增益 $K=\infty$（inf）。系统的超调量均为 0。图中的文字框信息有该点的“Gain”（ K 值）、“Pole”（零、极点坐标）、对应系统的“Dmping”（阻尼系数）、“Overshoot”（超调量）、“Frequency”（无阻尼自然振荡角频率） 等。2）绘制 $z=-1$ 时系统根轨迹。根据自动控制原理，当 $\zeta=0.707$ 时，$\sigma\%=4.33\%$ 。

绘制 $z=-1$ 时系统根轨迹的程序如下。

```
clear;n=[1 1]; d=conv([1 0 0],[0.1 1]);
sys=tf(n,d);rlocus(sys),grid;
```

程序运行后得到根轨迹图如图 8-2 所示。在复平面中，单击与负实轴成 45° 夹角线附近的一点，显示数据为阻尼比 $\zeta=0.705$ 、增益 $K=4.91$ 、极点 $poles=-4.32+4.39i$，超调量 $\sigma\%=4.4\%$ 。

当执行以下程序绘制系统根轨迹时，选择点 selected_ point = −4.32 +4.39i，系统计算出的数据与图 8-2 中的数据相差不大。

```
clear;n=[1 1]; d=conv([1 0 0],[0.1 1]);sys=tf(n,d);
rlocus(sys),grid;[k,poles]=rlocfind(sys,-4.32+4.39i),
```

程序运行后得到

```
k=4.9477
poles= -4.3525 + 4.3885i
       -4.3525 - 4.3885i
       -1.2951
```

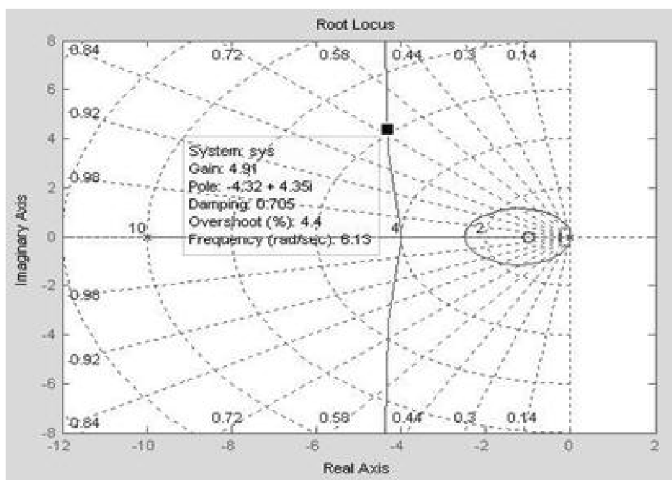


图 8-2　开环零点 $z=-1$ 时系统的根轨迹

2）结论。当 $z=-1$ 时，系统根轨迹与负实轴成 45° 夹角线附近的点都具有近似最佳阻尼比 ζ（0.705 ~ 0.709）与对应开环增益 K（4.8 ~ 5.0）及其相应超调量 $\sigma\%$（4.2% ~ 4.7%）。

【例 8-2】 设系统结构如图 8-3 所示。1）试绘制该系统的根轨迹；2）试绘制根轨迹在复平面左边、右边与纵坐标轴三种情况时对应系统的阶跃响应曲线并比较分析。

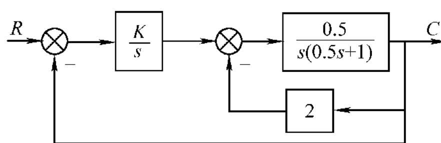


图 8-3　系统结构图

解：1）绘制系统的根轨迹。

① 求系统开环传递函数。

```
clear;syms s G2 H2 G1 G K phi1;G2 =0.5/(s * (0.5 * s +1));
H2 =2;phi1 = G2/(1 + G2 * H2);G1 = K/s;G = factor(G1 * phi1),
```

程序运行后得到 $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$。

② 用 $G(s)$ 绘制根轨迹。

```
clear;n =1;d = conv([1 0],[1 2 2]);
sys = tf(n,d);rlocus(sys),grid;
```

程序执行后，可得系统的根轨迹图如图 8-4 所示。当选择根轨迹与纵坐标轴的交点时，MATLAB 系统提示文本框显示开环增益 K=4 。此时对应系统为临界稳定。

2）绘制三种情况时对应系统阶跃响应曲线。

以开环增益 K=4 对应系统临界稳定为参考，选 K=2 相当于在复平面左边的根轨迹上取一点，再选 K=6 相当于复平面右边的根轨迹上取一点，分别绘制系统阶跃响应曲线。

```
clear;d = conv([1 0],[1 2 2]);i =0;
for k =2:2:6
i = i +1;n = k; G = tf(n,d);sys = feedback(G,1); figure(i);step(sys),grid;pause;
 if k = =6
    disp('按任一键退出！')
 end
end
```

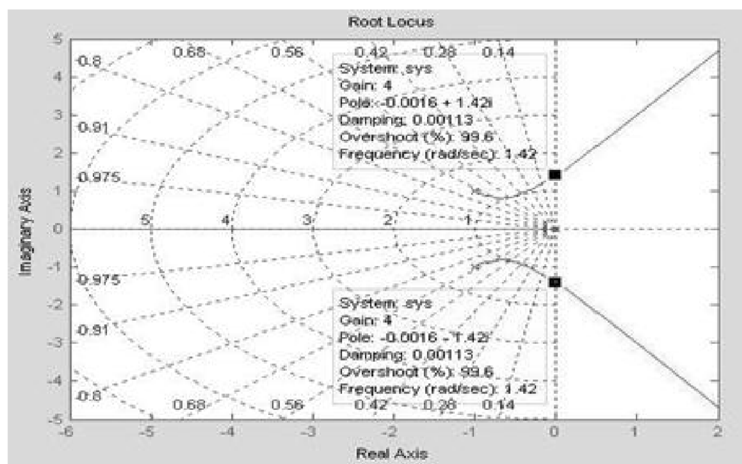
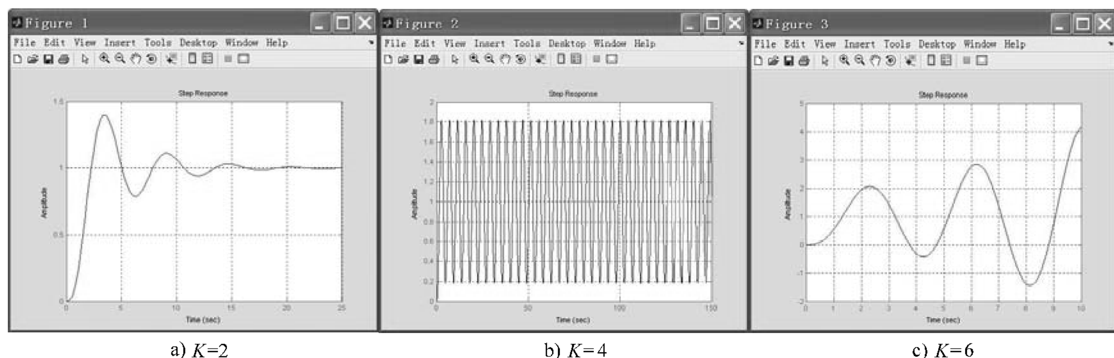


图 8-4　系统根轨迹图

程序运行后，绘制系统阶跃响应曲线如图 8-5 所示。程序运行当绘制出第 1 幅图后，按下键盘的任意键则绘制第 2 幅图，依此类推，待完全退出后才能进行其他操作。

3）三条系统阶跃响应曲线比较分析。

由图 8-5 所示曲线可看出，K=2 的曲线，其根轨迹在复平面纵轴的左边，对应系统闭环稳定，单位阶跃响应有超调，是衰减的振荡。K=4 时对应系统为临界稳定，阶跃响应为等幅振荡。K=6 的曲线，其根轨迹在复平面纵轴的右边，对应系统闭环不稳定，单位阶跃响应是发散的振荡。



a) K=2　　b) K=4　　c) K=6

图 8-5　系统阶跃响应曲线

【例 8-3】　设单位负反馈系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(0.5s+1)}$,1)试绘制该系统根轨迹;2)在根轨迹图上,计算设置在最佳阻尼线(即复平面中与负实轴成 ±45° 的夹角线)附近的闭环极点;3)绘制其对应系统阶跃响应曲线并分析。

解:1)绘制系统的根轨迹。

```
clear;n=1;d=conv([1 0],[0.5 1]);
sys=tf(n,d);rlocus(sys),grid;
[k,poles]=rlocfind(sys,-1.0000+1.0000i),
```

程序执行后，可得系统根轨迹图如图 8-6 所示。计算出当开环根轨迹增益 $K=1$ 时，系统闭环特征根（即闭环极点）$poles_{1,2}=-1\pm j1$ 。在最佳阻尼线即与负实轴成 ±45° 的夹角线附近的闭环极点就是 $poles_{1,2}=-1\pm j1$ 。

2）计算系统的闭环传递函数与阻尼比。

```
clear;syms s n d phi;n=1;
d=expand(s*(0.5*s+1)+1);phi=factor(n/d),
```

程序运行结果 $\Phi(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+2}$ 。

```
clear;syms s omegan zeta;omegan=vpa(sqrt(2),4),
[zeta]=solve('2*zeta*1.414=2');zeta=vpa(zeta,3),
```

程序运行结果 $\zeta=0.707$ 。

3）绘制系统的阶跃响应曲线。

```
clear;n=2;d=[1 2 2]; phi=tf(n,d); step(phi),grid;
[y,t]=step(phi);key=2; [sigma,tp,ts]=perf(key,y,t);
```

程序运行后，绘制系统阶跃响应曲线如图 8-7 所示。当 $K=1$ 时，系统的闭环极点正好在最佳阻尼线（即复平面中与负实轴成 45°的夹角线）上，其阻尼比 $\zeta=0.707$ 。由图 8-7 可看出，系统阶跃响应超调小(4.4565%)，调节时间短($t_s=4.2387$s)，正是二阶系统最佳响应。

【例 8-4】　已知一负反馈系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+3)}{s(s+2)}$ ，1）绘制系统的根轨迹并证明复平面上根轨迹是圆；2）试确定系统呈现欠阻尼状态时的开环增益的范围；3）试求系统最小阻尼比时的闭环极点。

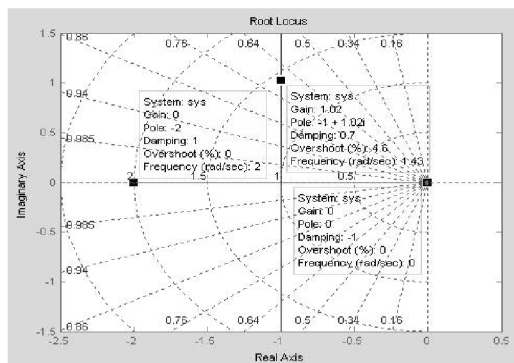


图 8-6　系统根轨迹图

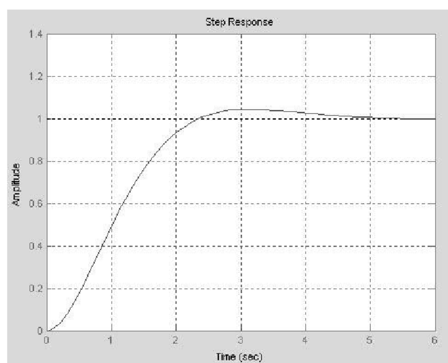


图 8-7　系统阶跃响应曲线

解：1）证明复平面上根轨迹是圆。

① 当 $s=\sigma+j\omega$ 时求系统闭环特征方程的实部与虚部。

```
clear;syms s D;syms K sigm omega real;
D=s*(s+2)+K*(s+3);D=subs(D,[s],[sigm+j*omega]);D=expand(D);
Re=collect(real(D),K),Im=expand(imag(D)),
```

程序运行结果 $\text{Re}[D]=\sigma^2+2\sigma+K(\sigma+3)-\omega^2$、$\text{Im}[D]=2\sigma\omega+2\omega+K\omega$。

② 系统闭环特征方程 $D(s)=0$ 是一复数方程，其实部与虚部均为 0。由 $\text{Re}[D]=0$ 求出 K。

```
clear;syms K sigm omega real;
[K]=solve('2*sigm*omega+2*omega+K*omega=0',K),
```

程序运行结果 K = −2 * sigm −2 。

③ 由系统闭环特征方程 $D(s)=0$ 的虚部 $\text{Im}[D]=0$ 求出 σ 与 ω 间的关系。

```
clear;syms K sigm omega real;
Re=subs('(sigm+3)*K+sigm^2+2*sigm-omega^2',[K],[-2*sigm-2]);
Re=expand(Re),
```

程序运行结果 $-\sigma^2-6\sigma-6-\omega^2=0$，那么 $(\sigma+3)^2+\omega^2=3=(\sqrt{3})^2$。由关系式可知，复平面的横坐标与纵坐标即 σ 与 ω 间的关系是一圆，圆心坐标为（−3,j0），半径为 $\sqrt{3}$。

2）确定系统呈现欠阻尼状态时的开环增益的范围。

当欠阻尼时，系统闭环有两个不相等的负实根，那么系统根轨迹应在实轴上的两分离点之间。先计算分离点。

```
clear;syms d;
[d]=solve('1/(d-0)+1/(d+2)=1/(d+3)',d); d=vpa(d,4),
```

程序运行结果

```
d = -1.268
    -4.732
```

① 对第一个分离点（在分离点处的特征方程为 $D(d_1)=0$）。

```
clear;syms s K;D=s*(s+2)+K*(s+3);
D=subs(D,[s],[-1.268]);D=vpa(D,4),
```

程序运行结果 D = −0.9282 + 1.732 * K。

② 解方程求 K。

```
clear;syms K;[K] = solve('-.9282 + 1.732 * K = 0 ',K);
K = vpa(K,4);K = vpa(K * 3/2,4),
```

程序运行结果 K = 0.8038。

③ 对第二个分离点（在分离点处的特征方程为 $D(d_2) = 0$）。

```
clear;syms s K;D = s * (s + 2) + K * (s + 3);
D = subs(D,[s],[ -4.732]);D = vpa(D,4),
```

程序运行结果 D = 12.93 − 1.732 * K。

④ 解方程求 K。

```
clear;syms K;[K] = solve('12.93 - 1.732 * K = 0 ',K);
K = vpa(K,4);K = vpa(K * 3/2,4),
```

程序运行结果 K = 11.20，即欠阻尼时的开环增益范围为 $0.8038 < K < 11.2$。

3）求系统最小阻尼比时的闭环极点。

二阶系统复数极点与负实轴夹角的余弦，即 $\cos\beta = \dfrac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$，当 ζ 即 $\cos\beta$ 为最小值时，β 有最大值，即复数极点对坐标原点连线与负实轴的夹角为最大值，此时复数极点应在坐标原点对于圆的切线上。

```
clear;n = [1 3];d = conv([1 0],[1 2]);
sys = tf(n,d);rlocus(sys),grid;
[k,poles] = rlocfind(sys, -2 + 1.4142i),
```

程序运行后得到图 8-8，单击圆右上方的最外侧处，则得到系统最小阻尼比时的闭环极点 $poles_{1,2} = -2 \pm j1.4142$。

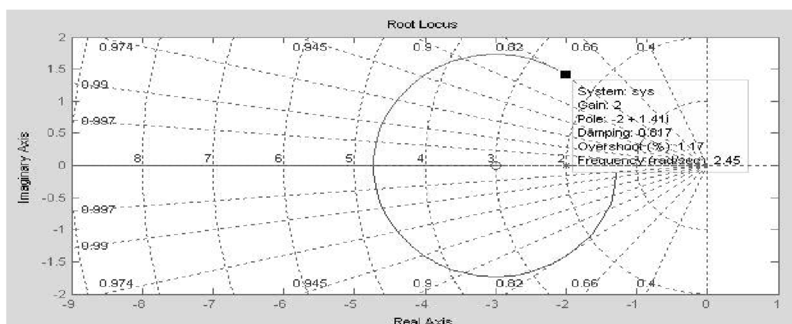


图 8-8　单击圆右上方的最外侧处

【例 8-5】 已知系统结构如图 8-9 所示，其中 $G_0(s) = \dfrac{1}{s(s+6)}$。1）试绘制 $H(s) = 0$ 与串联校正 $G_c(s) = 1 + \dfrac{0.5}{s} + 0.0625s$ 时系统根轨迹图，并在系统根轨迹图上找一点使其系统超调量 $\sigma\% \leqslant 10\%$，确定此时的 K；2）试绘制反馈校正 $H(s) = K_1 s$，$K = 50$ 与 $G_c(s) = 1$ 时系统根轨迹

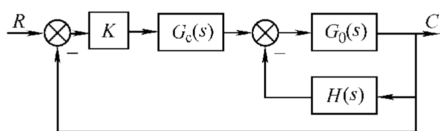


图 8-9　系统结构图

图，并确定系统阶跃响应超调 $\sigma\% = 4.3\%$ 闭环系统主导极点位置及计算相应的 K_1 值。

解：1）系统中串联校正 $G_c(s) = 1 + \frac{0.5}{s} + 0.0625s$ 与 $H(s) = 0$。

① 计算系统开环系统传递函数。

```
clear;syms s G0 H Gc K G phi1;
Gc = 1 +0.5/s +0.0625 * s;G0 = 1/(s * (s +6));H =0;
phi1 = G0/(1 +G0 * H);G = factor(K * Gc * phi1),
```

程序运行结果 $G(s) = \frac{K}{16} \cdot \frac{(s^2 + 16s + 8)}{s^2(s + 6)}$。

② 绘制系统根轨迹图。

```
clear;n =[1 16 8];d =16 * conv([1 0 0],[1 6]);
sys = tf(n,d);rlocus(sys),
```

程序运行后得到根轨迹图如图 8-10 所示。

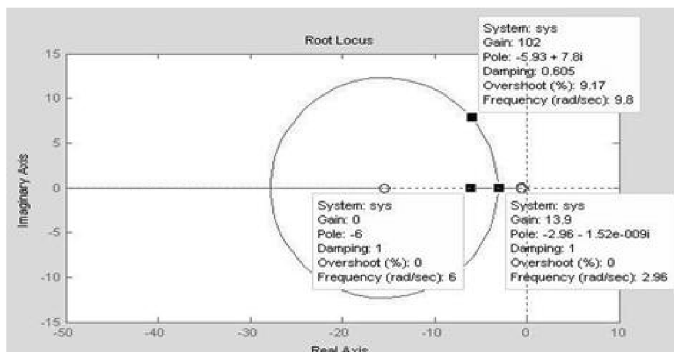


图 8-10　系统根轨迹图

由图 8-10 可知，根轨迹起始开环极点 −6 处，增益 $K = 0$。分离点（−2.96 −1.52e −9i）处增益 $K \approx 13.9$。当选择点（−5.93 +7.8i）处时，增益 $K = 102$，超调量 $\sigma\% = 9.17\% < 10\%$。

再运行以下程序

```
clear;n =[1 16 8];d =16 * conv([1 0 0],[1 6]);
sys = tf(n,d);rlocus(sys),
[k,poles] = rlocfind(sys, -5.93 +7.8 i),
```

程序运行后得到根轨迹图如图 8-11 所示。选择同图 8-10 中增益 $K = 102$ 附近的点，得到类似图 8-10 所示的结果。

2）当 $H(s) = K_1 s$，$K = 50$ 与 $G_c(s) = 1$ 时，系统如图 8-12 所示。

① 求系统开环系统传递函数与闭环传递函数。

```
clear;syms s G0 H Gc K K1 G phi1;
K =50;Gc =1;G0 =1/(s * (s +6));H =K1 * s;
phi1 = G0/(1 +G0 * H);G = factor(K * Gc * phi1),
phi = simple(G/(1 +G)),
```

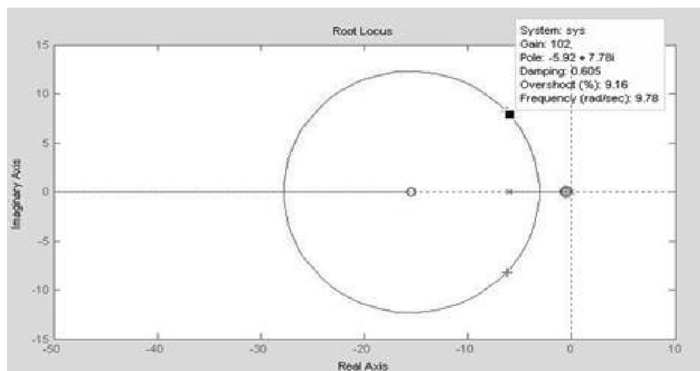


图 8-11　选择程序绘制的系统根轨迹图

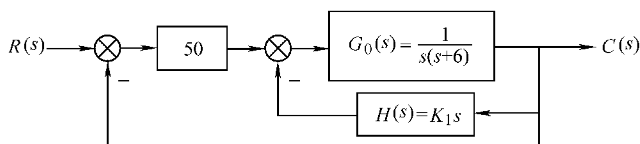


图 8-12　当 $H(s)=K_1s$ 、$K=50$ 、$G_c(s)=1$ 时系统

程序运行结果 $G(s)=\dfrac{50}{s(s+6+K_1)}$ 、$\Phi(s)=\dfrac{50}{s^2+6s+K_1s+50}$ ，对应系统闭环特征方程为 $D(s)=s^2+6s+K_1s+50=s^2+6s+50+K_1s=0$ ，使具有相同闭环特征方程，可构造新的单位负反馈系统：$G'(s)=\dfrac{K_1s}{s^2+6s+50}$ 。

② 对系统等效开环传递函数绘制系统根轨迹图，并确定系统阶跃响应超调 $\sigma\%=4.3\%$ 闭环系统主导极点的位置及计算相应的 K_1 值。

```
clear;n=[1 0];d=[1 6 50];sys=tf(n,d);rlocus(sys),
[k1,poles]=rlocfind(sys,-5.0000 + 5.0000i),
```

程序运行后绘制系统根轨迹图，如图 8-13 所示。图 8-13 中显示数据与计算数据一致：当增益 $K_1=4$ ，闭环系统极点 $poles_{1,2}=-5\pm j5$ ，阻尼比 $\zeta=0.707$ 、$\sigma\%=4.32\%$ 。

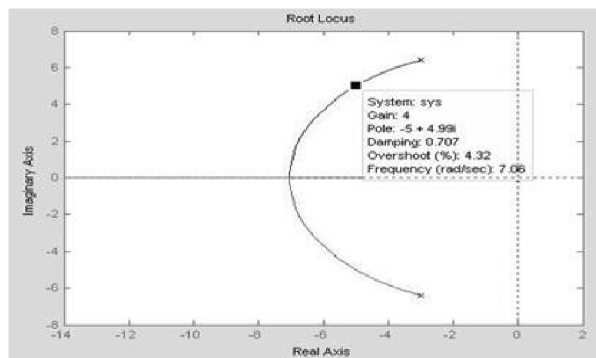


图 8-13　等效开环传递函数的系统根轨迹图

③ 根据闭环特征方程根 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$，现 $\zeta\omega_n = 5$、$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 5$。

```
clear;syms zeta omegan;
[zeta] = solve('zeta * omegan = omegan * sqrt(1 - zeta^2)');
zeta = vpa(zeta,4),
```

程序运行后结果说明图 8-13 中显示数据正确。

3）由系统闭环特征式验证 K_1。由等效开环传递函数 $G'(s) = \dfrac{K_1 s}{s^2 + 6s + 50}$ 与系统闭环特征式 $D(s) = s + (6 + K_1)s + 50$，可验证 K_1。

```
clear;syms s zeta omegan K1;omegan = sqrt(50);
[K1] = solve('2 * 0.7077 * sqrt(50) = 6 + K1 ',K1);K1 = vpa(K1,2),
```

程序运行结果 $K_1 = 4$。

8.2　基于根轨迹的设计工具

低于 MATLAB 7.5 版本的系统，其工具箱里有一个系统根轨迹分析与设计工具 Rltool，只要在 MATLAB 命令窗口里输入“rltool”然后按 Enter 键，就得到一个系统根轨迹分析的图形界面。升级到 MATLAB 7.5 版本，这个工具有很大改进，增加了许多功能。虽然进入工具的操作仍然是在 MATLAB 命令窗口里输入“rltool”然后按 Enter 键，但此后操作情况与老版本的就很不同。工具的名称改为“SISO Design for SISO Design Task”，即单输入单输出设计工具。

需要说明的是，MATLAB 7.5 版本的这个设计工具，界面多、功能多，但互相重复，给人有条理欠清晰之感。建议读者先看懂以下示例，并学会按下例自己解题即可。在此基础上，读者可再对其中其他功能逐步接触、深入了解并掌握。

【例 8-6】 已知系统开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$，试用根轨迹设计器查看在 $K = 31$ 时闭环系统单位阶跃给定响应曲线、Bode 图、给定单位冲激响应曲线；要求系统单位阶跃给定响应一次微弱超调 $\sigma\% < 20\%$ 后即衰减，试设计零极点校正器。

解：1）绘制未处理系统开环根轨迹图。

```
clear; n = [1 1];d = conv(conv([1 0],[1 -1]),[1 4 16]);
    sys = tf(n,d);rlocus(sys),
```

程序运行后得到未处理系统根轨迹图，如图 8-14 所示。图 8-14 中显示了 5 个点的相关数据，从中可以看出，随着开环增益的增加，根轨迹变化趋势符合根轨迹法则。

2）绘制未处理系统闭环阶跃响应曲线。

```
clear; n1 = [1 1];d1 = conv(conv([1 0],[1 -1]),[1 4 16]);
s1 = tf(n1,d1);sys = feedback(s1,1);step(sys),grid;
```

程序运行后得到未处理系统阶跃响应曲线如图 8-15 所示，曲线发散、系统不稳定。

3）在程序文件方式下执行程序，即必须编写以下调用 rltool() 函数的程序并且命名，在 MATLAB 命令窗口里输入该程序名后按 Enter 键。若在 Notebook 方式下执行，无法进入设计工具。

```
% MATLAB PROGRAM sx2L0806.m
clear;n1 = [1 1];d1 = conv(conv([1 0],[1 -1]),[1 4 16]);
s1 = tf(n1,d1);rltool(s1),
```

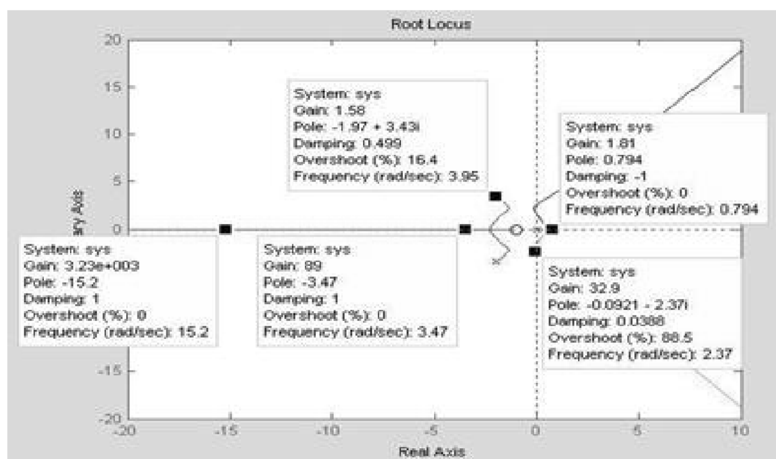


图 8-14　未处理系统开环根轨迹图

程序运行后，首先给出图 8-16 所示的设计工具加载提示。

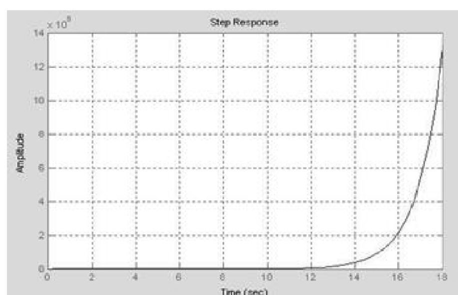


图 8-15　未处理系统闭环阶跃响应曲线



图 8-16　设计工具加载提示

加载完后，计算机显示器同时弹出已有本系统信息的“SISO Design for SISO Design Task”单输入单输出设计工具（见图 8-17）与“Control and Estimation Tools Manager”控制与估计工具管理器（其系统结构卡“Architecture”处于打开状态，见图 8-18）。

4）验证是否含有本系统信息的“SISO Design for SISO Design Task”设计工具。

在图 8-17 所示设计工具中，选择菜单【Analysis】中的【Response to Step Command】命令，执行后得到与图 8-15 所示同样的原系统单位阶跃响应。由图可知，阶跃响应发散，系统不能工作，必须对系统进行处理。

5）控制与估计工具管理器（Control and Estimation Tools Manager）简介。

在图 8-18 右边上方，有 5 张重叠卡：“Architecture”系统结构卡、“Compensator Editor”补偿器编辑卡、“Graphical Tuning”图形调试卡、“Analysis Plots”图形分析卡、“Automated Tuning”自动调试卡。

在 5 张卡下是“Current Architecture”系统通用结构图。

在通用结构图下是 4 个按钮：控制结构图按钮“Control Architecture”、回环型式按钮“Loop Configuration”、系统数据按钮“System Data”、采样时间转换按钮“Sample Time Conversion”。

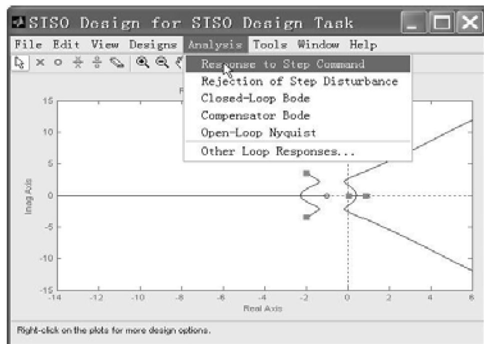


图 8-17　单输入单输出设计工具中的根轨迹

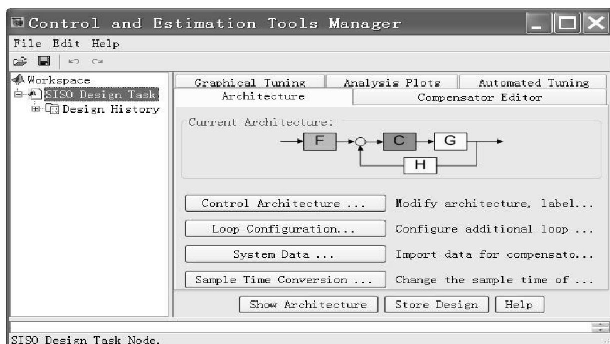


图 8-18　控制与估计工具管理器

最下部还有 3 个按钮："Show Architecture" 显示结构图按钮、"Store Design" 存储设计按钮、"Help" 帮助按钮。

6）进入控制与估计工具管理器进行设计。

当选择 "Compensator Editor" 补偿器编辑卡时，即会弹出补偿校正器编辑器对话框，如图 8-19 所示。在 "Pole/Zero" 卡下的 "Dynamics" 区内任何地方单击鼠标右键，即弹出【Add Pole/Zero】菜单，选择【Complex Zero】，在右部 "Edit Selected Dynamics" 区域下方的 "Real Part" 右边空白框内输入零点实部（-3）、在 "Imaginary Part" 右边空白框内输入零点虚部（3.6），再在 "Dynamics" 下的数据区内单击确认数据输入，即得到一对共轭复数零点（$-3\pm3.6i$），如图 8-20 所示。不需设计极点，还需要输入控制器 C 的增益 *Gain* $=296$ 后，最后单击按钮【Store Design】存储设计（见图 8-20）并且确认（见图 8-21）。

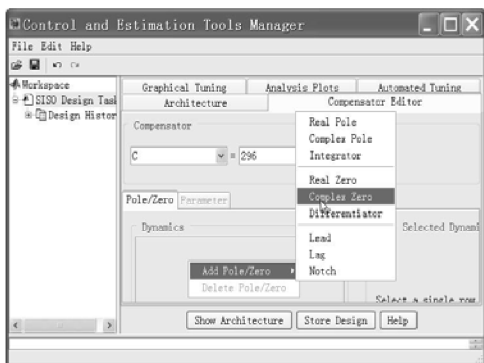


图 8-19　补偿校正器编辑器对话框

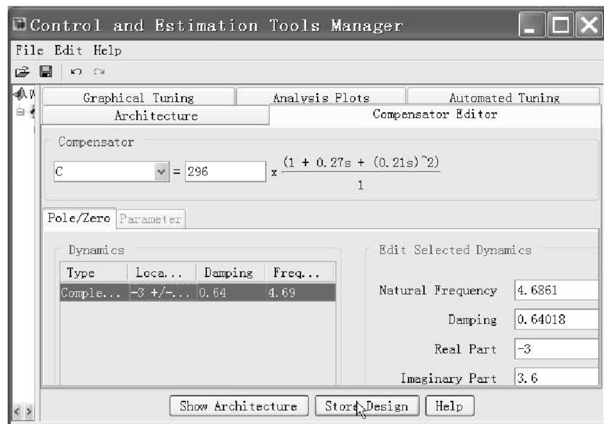


图 8-20　输入数据后的补偿校正器编辑器对话框



图 8-21　确认存储设计

此时图 8-17 变成图 8-22。再在图 8-22 中选择菜单【Analysis】中的【Response to Step Command】命令，原系统发散的阶跃响应则变为图 8-23 所示曲线。由图可知，系统不仅稳定，曲线非常理想，调节时间短（0.6s 左右），超调小（17% 左右），并且超调后一次衰减至终了值不振荡，即阶跃响应有优良的性能指标。

运行以下 MATLAB 程序，也可绘制同图 8-23 所示的单位阶跃响应曲线。

```
clear; gn=[1 1];gd=conv(conv([1 0],[1 -1]),[1 4 16]);G=tf(gn,gd);
cn=296*[0.21*0.21 0.27 1];cd=[1];C=tf(cn,cd);CG=C*G;F=1;
sys=feedback(CG,F);t1=0:0.0001:4;step(sys,t1),grid;key=1;
   [y,t]=step(sys);[sigma,tp,ts]=perf(key,y,t);
```

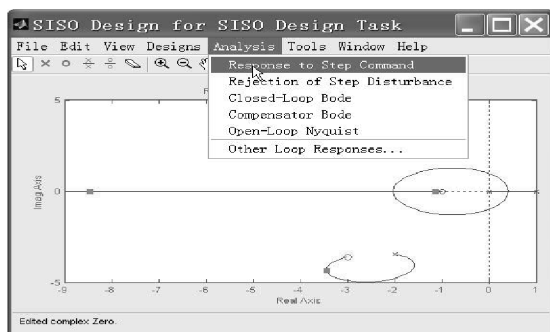


图 8-22 设计后系统根轨迹图

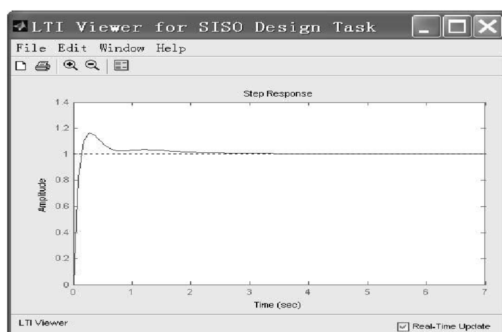


图 8-23 性能指标优良的单位阶跃响应曲线

习 题

【8-1】 已知一系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$，试用 MATLAB 函数命令绘制系统的根轨迹并计算系统临界稳定时闭环极点的位置。

【8-2】 已知一系统 $G(s)=\dfrac{K(s-1)}{s^2+4s+4}$，$H(s)=\dfrac{5}{s+5}$。(1) 试绘制系统的根轨迹图并确定使闭环系统稳定的 K 的范围；(2) 若系统闭环极点 $s_1=-1$，试计算此时系统闭环传递函数。

【8-3】 已知一系统 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s-3)}$，(1) 试绘制系统的根轨迹图并求 $K=10$ 时系统的闭环极点；(2) 绘制此时系统的单位阶跃响应曲线，并说明响应有无超调。

【8-4】 已知一系统 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s^2-2s+5)}{(s+2)(s-0.5)}$。(1) 试绘制系统的根轨迹图并确定闭环系统稳定的 K 的范围；(2) 确定使系统阶跃响应不出现超调的 K 的最大取值。

【8-5】 已知系统开环的传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s^2(s+1)}$，系统在 K^* 取任何值时均不稳定。试用根轨迹设计工具对系统进行补偿设计，说明在负实轴上设置一合适的开环零点即可使系统稳定。

【8-6】 已知带有延迟因子的系统开环传递函数为 $G(s)=K\dfrac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}e^{-\tau s}$，(1) 试绘制 $\tau=1$ 时系统根轨迹图；(2) 求系统有一稳定根 -0.358 时的根轨迹增益 K；(3) 求系统 $K=0.3$ 时的给定阶跃响应曲线。

第 9 章　连续系统频域分析的 MATLAB 实现

频率特性是自动控制系统又一种数学模型。《控制系统 MATLAB 计算及仿真》详细复习了有关频域分析的一些基本概念：频率响应、频率特性(幅频特性与相频特性)、Bode 图、频率特性的极坐标图、Nichols 曲线(图)、剪切频率、$-\pi$ 穿越频率、相角稳定裕度与幅(或模)值稳定裕度等都是非常重要且必须复习的内容，有关频率特性的诸多计算，都与这些基本概念直接相关。

频域分析里要绘制三种曲线(或叫图)：Bode 图、Nyquist 曲线图、Nichols 图。Bode 图在频域分析中占有特殊的重要地位，Nyquist 与 Nichols 曲线图在频域分析里也很有用。

9.1　控制系统的频率特性

当正弦信号作用于线性系统时，系统稳定后输出的稳态分量仍然是同频率正弦信号，这种过程叫做系统的频率响应。

系统频率响应即系统输出稳态分量与输入正弦信号的复数比叫做系统频率特性，记作：$G(\mathrm{j}\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ 。系统频率特性与系统的传递函数之间有着简单而直接的对应关系：$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}$ 。

【例 9-1】　已知系统结构如图 9-1 所示，$G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$、$H(s)=1$ 、系统输入 $r(t)=\sin(t)$ ，试用 MATLAB 程序求：1）闭环系统(C/R)频率特性；2）稳态误差(E/R)频率特性；3）稳态输出 $c(t)$ 与稳态误差 $e_{\mathrm{ser}}(t)$ 表达式并绘制 $c(t)$ 与 $e_{\mathrm{ser}}(t)$ 曲线图。

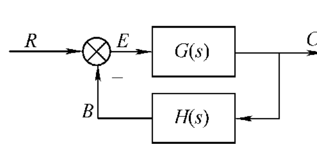


图 9-1　反馈系统结构

解：1）计算闭环系统(C/R)频率特性与稳态输出 $c(t)$ 并绘制 $c(t)$ 曲线图。

```
clear;syms t s omega;G=1/s/(s+1);H=1;phi=simple(G/(1+G*H));phif=subs(phi,s,j*omega),
r=sin(t);R=laplace(r);C=phi*R;c=ilaplace(C),ezplot(c,[0,10*pi]),grid;
```

程序运行后得到闭环系统(C/R)频率特性 $\Phi(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{-\omega^2+\mathrm{j}\omega+1}$ 与稳态输出表达式 $c(t)=-\cos t+\dfrac{1}{3}\left[3\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ ，并绘制 $c(t)$ 曲线，如图 9-2 所示。

2）计算系统稳态误差(E/R)频率特性与稳态误差 $e_{\mathrm{ser}}(t)$ 并绘制 $e_{\mathrm{ser}}(t)$ 曲线图。

```
clear;syms t s omega;G=1/s/(s+1);H=1;[n,d]=numden(1/(1+G*H));phier=n/d;
phierf=simple(subs(phier,s,j*omega)),r=sin(t);R=laplace(r);
Essr=phier*R;essr=ilaplace(Essr),ezplot(essr,[0,13*pi]),grid;
```

程序运行后得到稳态误差(E/R)频率特性 $\Phi_{\mathrm{er}}(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\omega^2-\mathrm{j}\omega}{\omega^2-\mathrm{j}\omega-1}$ 与稳态误差表达式

$e_{ser}(t) = \cos t + \sin t - \frac{1}{3}\left[3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]e^{-\frac{1}{2}t}$ 并绘制 $e_{ser}(t)$ 曲线，如图 9-3 所示。需要提请读者注意的是，本题解算程序采用符号运算，与此相对应要采用符号运算的绘图函数命令 ezplot()。

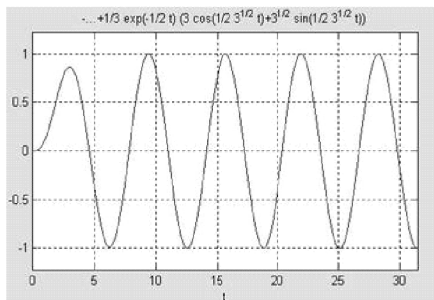


图 9-2　系统稳态输出 $c(t)$ 曲线

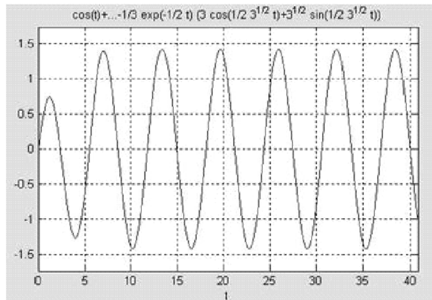


图 9-3　系统稳态误差 $e_{ser}(t)$ 曲线

【例 9-2】 设二阶系统具有以下开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$。试求 1）系统开环频率特性；2）相角裕度 γ 与阻尼比 ζ 之间的关系式。

解：1）求开环频率特性的模。

```
clear;syms s GH GHabs zet omega omegan real;
GH = omegan^2/(s * (s +2 * zet * omegan));
GH = subs(GH,s,j * omega),GHabs = abs(GH),
```

程序运行结果 $|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\zeta\omega_n)^2}}$，还有系统开环频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-j\omega_n^2}{\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2+j\omega2\zeta\omega_n}$$
$$= \frac{\omega_n^2}{(-\omega^2+j\omega2\zeta\omega_n)} \times \frac{(-\omega^2-j\omega2\zeta\omega_n)}{(-\omega^2-j\omega2\zeta\omega_n)}$$
$$= \frac{\omega_n^2(-\omega^2-j\omega2\zeta\omega_n)}{\omega^4+(2\zeta\omega\omega_n)^2} = \frac{-\omega^2\omega_n^2-j2\zeta\omega\omega_n^3}{\omega^4+(2\zeta\omega\omega_n)^2}$$

演算结果说明频率响应复数的实部与虚部都是负值，幅角在第 3 象限，如图 9-4 所示。

2）当 $\omega=\omega_c$ 时 $|G(j\omega_c)|=1$，求 $\omega_c = f(\zeta,\omega_n)$。

```
clear;syms zet omegac omegan real;
[omegac] = solve('omegan^2/(4 * zet^2 * omegan^2 + omegac^2)^(1/2)/omegac = 1',omegac),
```

程序运行结果

```
omegac =
  ( -2 * zet^2 + (4 * zet^4 +1)^(1/2))^(1/2) * omegan
  -( -2 * zet^2 + (4 * zet^4 +1)^(1/2))^(1/2) * omegan
  i * (2 * zet^2 + (4 * zet^4 +1)^(1/2))^(1/2) * omegan
 -i * (2 * zet^2 + (4 * zet^4 +1)^(1/2))^(1/2) * omegan
```

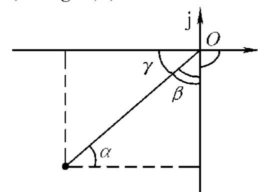


图 9-4　复数表达式的图示

取 $\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$ 。

3）频率响应复数表达式图 9-4 的角度关系。

$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90° - \beta = -90° - \arctan\dfrac{\omega^2\omega_n^2}{2\zeta\omega\omega_n^3} = -90° - \arctan\dfrac{\omega}{2\zeta\omega_n}$ 。

当 $\omega=\omega_c$ 时，$\varphi(\omega_c) = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -90° - \arctan\dfrac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$ 。

根据自动控制原理，相角裕度的定义 $\gamma = \varphi(\omega_c) - (-\pi)$，图 9-4 中 γ 为相角裕度，由图可知 $\gamma = 180° - \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$ 。

4）求相角裕度 γ 与阻尼比 ζ 之间的关系式。

已经求得 $\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$ 、$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -90° - \arctan\dfrac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$ 。

```
clear;syms s GH GHang gama;syms zet omegac omegan real;
omegac = ( -2 * zet^2 + (4 * zet^4 + 1)^(1/2))^(1/2) * omegan;
GHangc = -pi/2 - atan(omegac/(2 * zet * omegan)),
```

程序运行结果 $\varphi(\omega_c) = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -90° - \beta$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta}$$

即 $\beta=\arctan\dfrac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta}$，根据直角三角形里两锐角的关系 $\tan\beta=\cot\alpha$，由图 9-4 可知 $\alpha=\gamma$，故得到 $\gamma=\arctan\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}$ 。

【例 9-3】 已知单位负反馈系统开环传递函数 $G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s^2+20s+625)}$，试计算剪切频率 ω_c 分别为 1）15rad/s 、2）50rad/s 时的相位角 $\angle G(j\omega_c)$ 与相角裕度 γ 。

解： 1）振荡环节的频率特性与相频特性。

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2) - j\omega_n^2 2\zeta\omega\omega_n}{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2}$$

当 $\omega_n > \omega$ 时，频率特性 $G(j\omega)$ 实部为正、虚部为负，相角在第 4 象限，即

$$\angle G(j\omega) = -\arctan\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2} = -\arctan\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-(\dfrac{\omega}{\omega_n})^2}$$

当 $\omega_n < \omega$ 时，频率特性 $G(j\omega)$ 实部为负、虚部也为负，相角在第 3 象限，即

$$\angle G(j\omega) = \pi + \arctan\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2} = \pi + \arctan\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

2）系统相频特性与增益无关。

$$G(s)=\frac{K(s+3)}{s(s^2+20s+625)}=\frac{3K(\frac{1}{3}s+1)}{s(s^2+20s+625)}$$

3）计算 ω_n 与 ζ 。

```
clear;syms omeqan zeta;
[zeta,omegan]=solve('omegan^2=625','2*zeta*omegan=20'),
```

程序运行后得到 $\omega_n=25\text{rad/s}$ 、$\zeta=2/5$ 。

4）当 $\omega_c=15\text{rad/s}$ 时求 $\angle G(\mathrm{j}\omega_c)$ 与 γ 。

```
clear;syms w wn; T1=1/3;wn=25;zeta=2/5;wc=15;
angG=atan(T1*w)-pi/2-atan((2*zeta*w/wn)/(1-w*w/wn/wn));
angG=subs(angG,w,wc)*180/pi,gama=(180+angG),
```

程序运行后得到 $\angle G(\mathrm{j}\omega_c)=-48.1798°$ 、$\gamma=131.8202°$ 。

5）当 $\omega_c=50\text{rad/s}$ 时求 $\angle G(\mathrm{j}\omega_c)$ 与 γ 。

```
clear;syms w wn; T1=1/3;wn=25;zeta=2/5;wc=50;
angG=atan(T1*w)-pi/2-atan((2*zeta*w/wn)/(1-w*w/wn/wn))-pi;
angG=subs(angG,w,wc)*180/pi,gama=(180+angG),
```

程序运行后得到 $\angle G(\mathrm{j}\omega_c)=-155.3611°$ 、$\gamma=24.6389°$ 。

9.2 控制系统 Bode 图及其模值裕度与相位裕度

对数频率特性曲线即 Bode 图的两条曲线分别是对数幅频特性与对数相频特性。横坐标均为角频率 ω ，是按常用对数刻度的，即 $\log\omega$ ，其单位是 rad/s。对数幅频特性的纵坐标是 $L(\omega)=20\log A(\omega)$ ，是等分刻度的，其单位为 dB（即分贝）；而对数相频特性的纵坐标是 $\varphi(\omega)$ ，也是等分刻度的，其单位为角度的（°）或弧度（rad）。

幅（或模）值稳定裕度是开环幅相特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与负实轴交点(ω_{cg})模值 $G(\omega_{cg})$ 的倒数，即 $h=\frac{1}{|G(\omega_{cg})|}$ ；或者是其交点模值倒数的分贝值，即 $L_h=20\log h$ 。

相角稳定裕度是系统开环幅相特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$ 上模值等于 1 的矢量与负实轴的夹角，即 $\gamma=\varphi(\omega_c)-(-\pi)$。

提请读者特别关注，MATLAB 系统提供的函数命令 margin()，不仅能绘制系统开环 Bode 图，还在 Bode 图上同时给出计算的系统频域性能指标（剪切频率 ω_c 、相角稳定裕度 γ 与 $-\pi$ 穿越频率 ω_g 、幅值稳定裕度 L_h ）。请看示例。

【例 9-4】 单位反馈系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\frac{6.25}{(s+1)(s+1.25)(s+5)}$ ，1）试求系统的剪切频率 ω_c 与相角裕度 γ ；2）若要求系统具有 $\gamma=30°$ 的相角裕度，试计算开环放大倍数应增大的倍数。

解： 1）试求系统的剪切频率 ω_c 与相角裕度 γ 。

① 求系统的开环传递函数与开环增益 k 。

```
clear;syms s phi G;phi=6.25/((s+1)*(s+1.25)*(s+5));
```

```
G = factor( phi/( 1 - phi) ) ;[ n,d] = numden( G) ;
n = vpa( n/4,3) ;d = vpa( factor( vpa( d/4,4) ) ,4) ;G = n/d,
```

程序运行结果 $G(s) = \dfrac{6.25}{s(s+4.425)(s+2.825)} = \dfrac{0.5}{s(\frac{1}{4.425}s+1)(\frac{1}{2.825}s+1)}$

系统开环增益为 $k = 0.5$。

② 按系统开环传递函数绘制 Bode 图。

```
clear;n = 0. 5;d = conv( conv( [1  0],[1/4. 425  1]) ,[1/2. 825  1]) ;
s = tf( n,d) ;margin( s) ,
```

程序运行后绘制系统开环 Bode 图，如图 9-5 所示，并算得系统剪切频率 $\omega_c = 0.49\text{rad/s}$、相角裕度 $\gamma = 73.9°$。

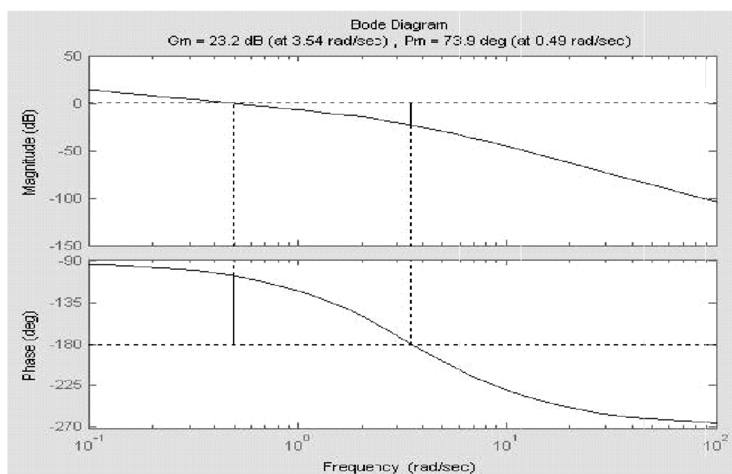


图 9-5　系统 Bode 图

2）若要求系统具有 $\gamma = 30°$ 的相角裕度，计算开环放大倍数应增大的倍数。由于系统的 $\varphi(\omega_c)$ 与系统开环增益无关，即开环放大倍数的变化不影响系统相角裕度，只使开环对数幅频特性曲线 $20\log|G|$ 上下移动，与横坐标的交点产生变化即 ω_c 改变。

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180°) = 180° + \varphi(\omega_c)$$

要 $\gamma = 30°$，则 $\varphi(\omega_c) = -180° + 30° = -150°$

$$\varphi(\omega_c) = -90° - \arctan(T_1\omega_c) - \arctan(T_2\omega_c)$$

```
clear;syms  T1  T2  omegac;T1 = 1/2. 825;T2 = 1/4. 425;
[ omegac] = solve( '- pi/2 - atan( 1/2. 825 * omegac) - atan( 1/4. 425 * omegac) = - 5/6 * pi ',omegac) ;
omegac = vpa( omegac,4) ,
```

程序运行结果 omegac = 2. 016，即对应系统 $\gamma = 30°$ 的相角裕度，求得系统剪切频率 $\omega_{c2} = 2.016\text{rad/s}$。当系统剪切频率 $\omega_{c1} = 0.49\text{rad/s}$ 时相角裕度 $\gamma = 73.9°$。

将系统原 $20\log|G|$ 曲线向上移动 $20\log(K)$ 时，其剪切频率由 $\omega_{c1} = 0.49\text{rad/s}$ 向右移到 $\omega_{c2} = 2.016\text{rad/s}$，有 $20\log(K) = 20\log\left(\dfrac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}}\right)$、$K = \dfrac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}} = \dfrac{2.016}{0.49} = 4.1143$。

即系统开环放大倍数应增大 $K = 4.1143$ 倍。

3）验算 $\gamma = 30°$ 的相角裕度。

```
clear;syms xphic gama;T1 = 1/2.825;T2 = 1/4.425;wc = 2.016;
xphic = ( - pi/2 - atan(T1 * wc) - atan(T2 * wc)) * 180/pi,gama = (180 + xphic),
```

程序运行得到 $\gamma = 29.9936° \approx 30°$。

【例 9-5】 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K}{(0.01s+1)^3}$。试确定使系统的相角稳定裕度 $\gamma = +45°$ 时的 K 值。

解：1）确定系统的幅频特性与相频特性。

```
clear;syms s G phi;syms K omega omegac real;G = K/((0.01 * s + 1)^3);
G = subs(G,s,j * omega);Gabs = abs(G),phi = -3 * atan(0.01 * omega),
```

程序运行结果

```
Gabs = 1000000/(10000 + omega^2)^(3/2) * abs(K)
phi = -3 * atan(1/100 * omega)
```

2）确定使系统的相角稳定裕度 $\gamma = +45°$ 时的 ω_c。

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180°)$$

```
clear;syms omegac gama;gama = pi - 3 * atan(0.01 * omegac);
[omegac] = solve('pi - 3 * atan(0.01 * omegac) = pi/4',omegac);
omegac = vpa(omegac,4),
```

程序运行结果 omegac = 100。

3）将 $\omega_c = 100$ 代入求系统幅频特性 $|G(j\omega_c)|$。

```
clear;syms tau omegac Gabs K;
Gabs = 1000000/(10000 + omegac^2)^(3/2) * abs(K);
Gabs = subs(Gabs,omegac,100),
```

程序运行结果 Gabs = 1/400 * 20000^(1/2) * abs(K)。

4）计算 K（当 $\omega = \omega_c$ 时系统的幅频特性 $|G(j\omega_c)| = 1$ 或 $20\log|G(j\omega_c)| = 0\text{dB}$）

```
clear;syms K omegac real;[K] = solve('1/400 * 20000^(1/2) * K = 1',K);K = vpa(K,5),
```

程序运行结果 $K = 2.8284$。

【例 9-6】 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{k}{s(s^2+s+100)}$。试确定使系统的模稳定裕度 $L_h = 20\text{dB}$ 时的 k 值。系统的开环增益又应取多少？

解：1）确定系统幅频特性与相频特性。

```
clear;syms s G phi;syms k omega omegac real;
G = k/(s * (s^2 + s + 100));G = subs(G,s,j * omega);
Gabs = abs(G),phi = - pi/2 - atan(omega/(100 - omega^2)),
```

程序运行结果

```
Gabs = 1/(omega^4 - 199 * omega^2 + 10000)^(1/2) * abs(k/omega)
phi = -1/2 * pi - atan(omega/(100 - omega^2))
```

2）确定 ω_g。当 $\omega = \omega_g$ 时 $\varphi(\omega_g) = -180°$，对应系统模稳定裕度。

$$-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_g}{100-\omega_g^2}\right) = -\pi\,,\quad \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{\omega_g}{100-\omega_g^2}\right),$$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\omega_g}{100-\omega_g^2}\right)=\infty$ ，$100-\omega_g^2=0$ ，$\omega_g=\pm 10\mathrm{rad/s}$ ，取 $\omega_g=10\mathrm{rad/s}$ 。

3）将 $\omega_g=10\mathrm{rad/s}$ 代入系统幅频特性 $|G(\mathrm{j}\omega_c)|$ 确定 $|G(\mathrm{j}\omega_c)|$ 。

```
clear;syms k omegag Gabs;
Gabs  =1/(omegag^4 -199 * omegag^2 +10000)^(1/2) * abs(k/omegag);
Gabs =subs(Gabs,omegag,10),
```

程序运行结果 Gabs =1/1000 * 100^(1/2) * abs(k)。

4）根据题目要求，当 $\omega=\omega_g$ 时系统幅频特性 $20\log\frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|}=20\mathrm{dB}$ ，计算 k 。

```
clear;syms k omegag real;
[k] =solve('20 * log10(1/(1/1000 * 100^(1/2) * k)) =20 ',k);k =vpa(k,5),
```

程序运行后得到 $k=10$ 。

5）计算系统开环增益 K 。

$$G(s)=\frac{k}{s(s^2+s+100)}=\frac{k/100}{s(0.01s^2+0.01s+1)}=\frac{K}{s(0.01s^2+0.01s+1)}$$

即 $K=k/100=0.1\mathrm{rad/s}$ 。

【例 9-7】 某控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{3(s+1)}{s^2(0.2s+1)}$ ，试求系统的频域性能指标 ω_c 、γ 与时域性能指标 $\sigma\%$ 、t_s 。

解：1）求系统的频域性能指标 ω_c 、γ 。

```
clear;n =3 * [1 1];;d =conv([1 0 0],[0.2 1]);GH =tf(n,d);margin(GH),
```

运行该程序可得系统的 Bode 图，如图 9-6 所示，系统的性能指标如下。

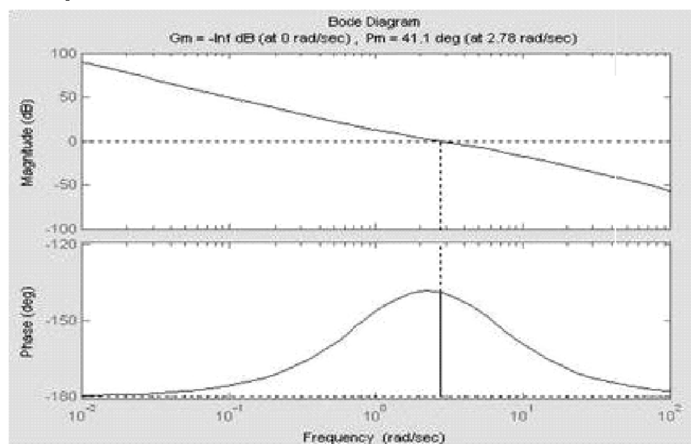


图 9-6　系统 Bode 图

幅值稳定裕度：$L_h=\infty$ dB　　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=\infty$ rad/s

相角稳定裕度：$\gamma=41.1°$　　　剪切频率：$\omega_c=2.78\mathrm{rad/s}$

2）求系统的闭环传递函数。

```
clear;syms s n d GH phi;n =3 * (s +1);d =s^2 * (0.2 * s +1);GH =n/d;phi =factor(GH/(1 +GH)),
```

程序运行结果 $\Phi(s)=\dfrac{15(s+1)}{s^3+5s^2+15s+15}$。

3）求系统的阶跃响应与时域性能指标 $\sigma\%$、t_s。

```
clear;n=15*[1 1];d=[1 5 15 15];phi=tf(n,d);
step(phi),grid;[y,t]=step(phi);perf(1,y,t);
```

程序运行后，绘制系统单位阶跃响应曲线，如图 9-7 所示，并计算出系统时域性能指标 $\sigma\%=37.2013\%$，$t_s(5\%)=1.9071\text{s}$。

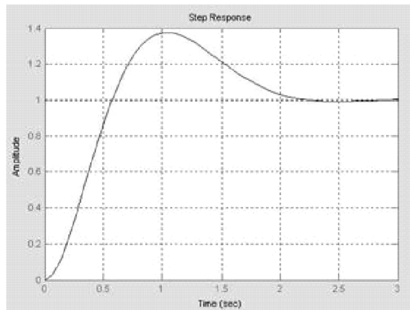


图 9-7　系统单位阶跃响应曲线

9.3　控制系统 Nyquist 曲线

频率特性 $G(j\omega)$ 是 ω 的复变函数，在 $G(j\omega)$ 复平面上对于某一 ω 可以用一矢量或其端点（坐标）来表示。当 ω 从 $0\to\infty$ 时，$G(j\omega)$ 端点的极坐标轨迹即是频率特性的极坐标图，叫做幅相特性曲线或 Nyquist 曲线（图）。

在介绍用 Nyquist 曲线法判断系统稳定性时，已经介绍了 nyquist() 函数的调用格式，并已说明函数命令执行后绘制的 Nyquist 曲线默认角频率 ω 范围为 $(-\infty,+\infty)$。系统在 $-\infty\leqslant\omega\leqslant+\infty$ 时的完整开环频率响应 $G(j\omega)H(j\omega)$，其中，范围 $-\infty\leqslant\omega\leqslant 0$ 的 $G(-j\omega)H(-j\omega)$ 曲线部分与范围 $0\leqslant\omega\leqslant+\infty$ 的曲线部分 $G(j\omega)H(j\omega)$ 对称于 $G(s)H(s)$ 平面的实轴。在自动控制原理的各种教科书中，一般只绘制 $0\leqslant\omega\leqslant+\infty$ 时的幅相特性曲线，这仅是 MATLAB 中的函数命令 nyquist() 执行后，绘制的对于横轴对称的幅相特性曲线的关于 $0\leqslant\omega\leqslant+\infty$ 范围的部分。在此提醒读者看 Nyquist 曲线时注意。

【例 9-8】　已知单位负反馈系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{100(s+2)}{s(s+1)(s+20)}$，1）用频率特性法判别闭环系统稳定性；2）用 Nyquist 曲线法再判别闭环稳定性；3）再用阶跃响应验证上述判断。

解：1）绘制 Bode 图判别闭环系统稳定性。

```
clear;n=100*[1 2];d=conv([1 1 0],[1 20]); s=tf(n,d); margin(s), grid;
```

程序运行后绘制系统开环 Bode 图，如图 9-8 所示，并计算出系统性能指标如下。

幅值稳定裕度：$L_h=\infty$ dB　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=\infty$ rad/s

相角稳定裕度：$\gamma=65.4°$　　剪切频率：$\omega_c=5.11$rad/s

以上指标说明，系统不仅稳定，而且性能非常优良。

2）复习增补开环频率响应。

根据自动控制原理[9]，当系统开环传递函数含有积分环节时，即 s 平面原点处有开环极点，为有效应用 Nyquist 判据，需要对频率响应加以修正，即有所谓增补频率响应。

在绘制 Nyquist 曲线时，当系统开环传递函数含有 ν 个积分环节（$\dfrac{1}{s^\nu}$）时，在 $\omega=0$ 处给特性曲线补充一个半径为无穷大、负转 $\nu\times\dfrac{\pi}{2}$ 的大圆弧，随后再随 ω 的增加绘制原特性曲线。这样绘制的曲线就叫做增补 Nyquist 曲线。

3）绘制 Nyquist 曲线判别闭环系统稳定性。

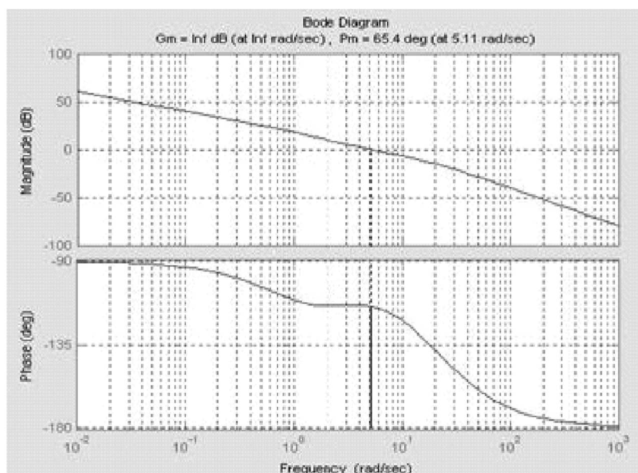


图 9-8　系统开环 Bode 图

```
clear;n = 100 * [1 2];d = conv([1 1 0],[1 20]); s = tf(n,d); nyquist(s),
```

程序运行后绘制 Nyquist 曲线，如图 9-9 所示。经增补后可知，关键点 (–1、j0) 在 Nyquist 曲线外。根据自动控制原理，系统开环特征方程零根视为稳定根，本题开环不稳定根的个数 $p = 0$ ，而 Nyquist 曲线完全不包围 (–1、j0) 点，或 Nyquist 曲线按逆时针方向包围(–1、j0) 点的次数 $p = 0$ ，根据 Nyquist 稳定判据，闭环系统稳定，与 Bode 图法判定结果相同。

4) 用阶跃响应曲线验证上述判断。

```
clear;n = 100 * [1 2];d = conv([1 1 0],[1 20]);
s = tf(n,d); sys = feedback(s,1); step(sys), grid;
```

程序运行后绘制阶跃响应曲线，如图 9-10 所示。曲线图显示，闭环系统不仅稳定，而且时域性能非常优良，均说明上述两法判断正确。

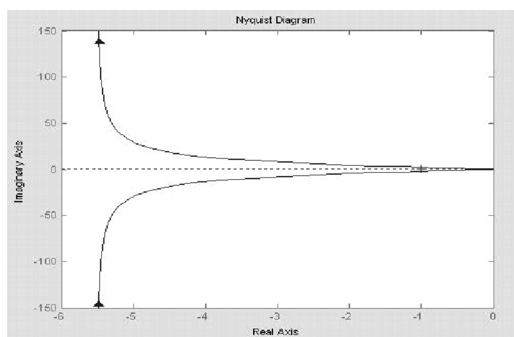


图 9-9　系统 Nyquist 曲线

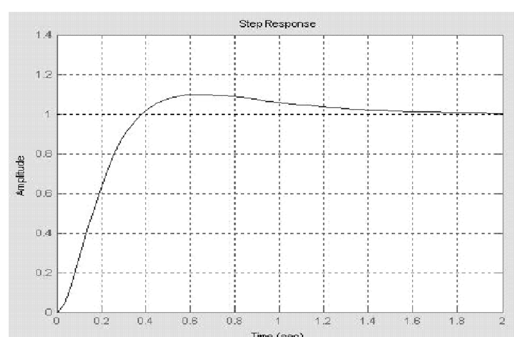


图 9-10　单位阶跃响应曲线

【例 9-9】　已知单位负反馈系统前向通道传递函数：① $G(s) = \dfrac{8s + 1}{4s + 1}$ 、② $G(s) = \dfrac{8s + 1}{4s - 1}$ 、③ $G(s) = \dfrac{-8s + 1}{4s + 1}$ 。1) 试绘制 $G(s)$ 的 Nyquist 曲线并对系统闭环判稳；2) 试分别绘制系统闭环的阶跃响应曲线并验证以上判稳结论。

解：1）绘制三个系统 $G(s)$ 的 Nyquist 曲线并对系统闭环判稳。

```
clear;n1 =[8 1];d1 =[4 1];G1 = tf(n1,d1);nyquist(G1),grid;hold on;
n2 =[8 1];d2 =[4 -1];G2 = tf(n2,d2);nyquist(G2),grid;hold on;
n3 =[ -8 1];d3 =[4 1];G3 = tf(n3,d3);nyquist(G3),grid;
```

程序运行后绘制三个系统 $G(s)$ 的 Nyquist 曲线，如图 9-11 所示。系统 1 的 $p=0$，其 Nyquist 曲线为图中的右边小圆，远离（-1、j0）点，故系统闭环稳定。系统 2 的 Nyquist 曲线为图中的中部大圆，其 Nyquist 曲线虽不包围（-1、j0）点，但 $p=1$，故系统闭环不稳定。系统 3 的 Nyquist 曲线为图中的左边大圆，其 Nyquist 曲线顺时针包围（-1、j0）点，但 $p=1$，故系统闭环不稳定。

2）绘制系统闭环的阶跃响应曲线并验证以上判稳结论。

① 系统 1。

```
clear;n1 =[8 1];d1 =[4 1];G1 = tf(n1,d1);sys1 = feedback(G1,1);step(sys1),grid;
```

程序运行后绘制系统闭环阶跃响应曲线，如图 9-12 所示。曲线显示系统闭环稳定，与以上判稳结论一致。

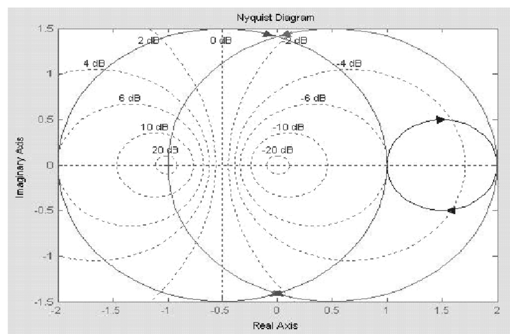


图 9-11　三个系统 $G(s)$ 的 Nyquist 曲线

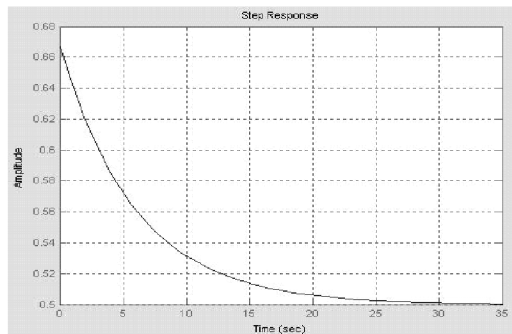


图 9-12　闭环系统 1 阶跃响应曲线

② 系统 2。同系统 1，绘制系统闭环阶跃响应曲线，如图 9-13 所示。曲线显示系统正向发散，闭环不稳定，与以上判稳结论一致。

③ 系统 3。同系统 1，绘制系统闭环阶跃响应曲线，如图 9-14 所示。曲线显示系统正向发散，闭环不稳定，与以上判稳结论一致。

【例 9-10】　某具有延迟环节的非最小相位系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{e^{-0.8s}}{2s+1}$。1）试绘

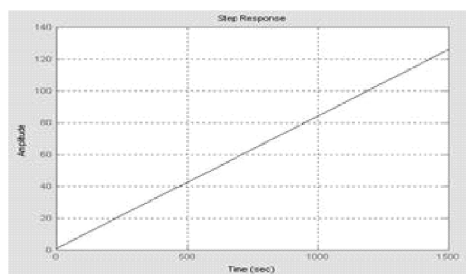


图 9-13　闭环系统 2 阶跃响应曲线

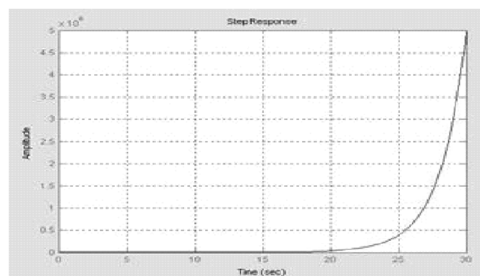


图 9-14　闭环系统 3 阶跃响应曲线

制系统 Nyquist 曲线并判别系统稳定性。2）绘制系统阶跃响应曲线验证以上判别。

解：1）复习最小相位与非最小相位环节（或系统）。

传递函数中有右极点、右零点的环节（或系统）叫做非最小相位环节（或系统）；而传递函数中没有右极点、右零点的环节（或系统）叫做最小相位环节（或系统）。例如，$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ 即惯性环节是最小相位环节、一阶不稳定环节 $G(s)=\dfrac{1}{Ts-1}$ 是非最小相位环节等。

2）绘制系统 Nyquist 曲线。

```
clear;n1 = [1];d1 = [2 1];G1 = tf(n1,d1);tau = 0.8;
[np,dp] = pade(tau,2); Gp = tf(np,dp); G = G1 * Gp; nyquist(G),
```

程序运行后，绘制系统的 Nyquist 曲线，如图 9-15 所示。由于该系统的滞后相移随 $\omega\to\infty$ 而无限增大，以及幅频特性衰减到零，其 Nyquist 曲线在趋向坐标原点的过程中，将多次包围坐标原点。关键点（−1、j0）在 Nyquist 曲线外。根据自动控制原理，本题开环不稳定极点个数 $p=0$，而 Nyquist 曲线完全不包围（−1、j0）点，根据 Nyquist 稳定判据，闭环系统稳定。

3）绘制系统闭环阶跃响应曲线。

```
clear;n1 = [1];d1 = [2 1];G1 = tf(n1,d1);tau = 0.8;[np,dp] = pade(tau,2);
Gp = tf(np,dp);G = G1 * Gp;sys = feedback(G,1);step(sys),grid;
```

程序运行后，绘制系统闭环阶跃响应曲线，如图 9-16 所示。由图可知，系统闭环稳定，与 Nyquist 稳定判据判断结论一致，而且系统时域性能优良。

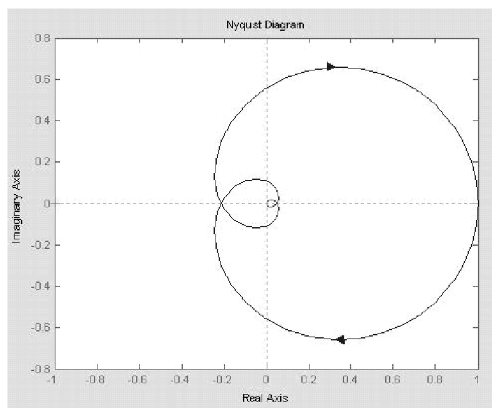


图 9-15　系统的 Nyquist 曲线

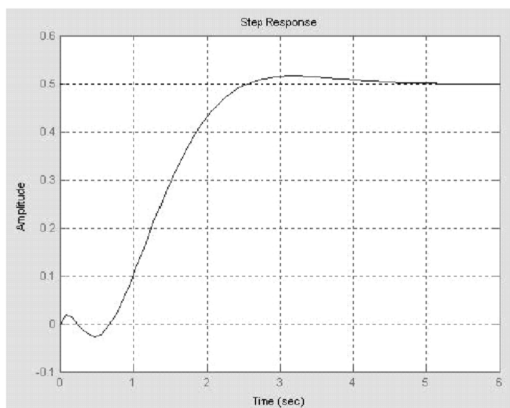


图 9-16　系统闭环阶跃响应曲线

习　题

【9-1】　已知系统结构如图 9-17 所示，$G(s)=\dfrac{10}{s+2}$、$H(s)=1$、系统输入 $r(t)=A_r\sin(2\pi ft)$，式中 $A_r=10$、$f=10\text{Hz}$。试用 MATLAB 程序求：（1）闭环系统（C/R）频率特性；（2）稳态误差（E/R）频率特性；（3）稳态输出 $c(t)$ 与稳态误差 $e_{ser}(t)$。

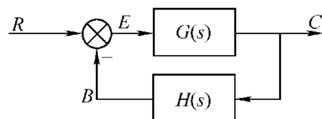


图 9-17　反馈系统结构

【9-2】　已知控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{20(s+0.08)(s+0.2)}{(s+0.0775)(s+0.275)(s+8.32)(s^2+2\times 0.81\times 1.383s+1.383^2)}$$

试求系统的时域性能指标 $\sigma\%$ 、t_s 。

【9-3】 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\frac{K}{(s+1)(0.1s+1)(0.5s+1)}$。试确定闭环系统稳定时参数 K 的临界值。

【9-4】 已知控制系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{10(s+1)}{s^2(0.01s+1)}$，试用对数频率判据判别系统闭环的稳定性并计算系统频域性能指标 ω_c 、γ 。

【9-5】 已知控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{9}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$，试求系统的时域性能指标 ω_c 、γ 与时域性能指标 $\sigma\%$ 、t_s 。

【9-6】 已知单位负反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{100}{s(0.25s+1)(0.0625s+1)}\cdot\frac{0.2s^2}{(0.8s+1)}$$

试分别用 Bode 图、单位阶跃响应曲线与根轨迹图对闭环系统判稳。

【9-7】 已知单位负反馈系统开环传递函数 $G(s)=\frac{K(20s+1)}{s(400s+1)(s+1)(0.1s+1)}$，试计算剪切频率 ω_c 分别为（1）0.5rad/s 、（2）5rad/s 、（3）15rad/s 时的相角裕度 γ 。

【9-8】 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{s+58}{1-s^2}$。（1）试用 Nyquist 判据对闭环系统判稳；（2）绘制系统闭环的阶跃响应曲线并验证以上判稳结论。

【9-9】 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{30(4s+50)}{s^2(0.1s+1)}$。（1）试用对数频率稳定判据对闭环系统判稳；（2）绘制系统闭环的阶跃响应曲线并验证以上判稳结论。

第 10 章　描述函数法分析非线性系统的 MATLAB 实现

工程实际控制系统，严格地说都不是线性的，总会有一些非线性因素。不能用小偏差线性化方法进行处理的非线性特性通常称为典型非线性特性，如死区特性、饱和特性、摩擦特性、间隙特性与继电特性等。

10.1　非线性系统特性简述

线性系统动态过程的形式与起始偏差或外作用无关，而非线性系统动态过程除了与系统的结构、参数有关外，还与系统起始偏离的大小密切相关。小偏离时单调变化，大偏离时很可能振荡，还有非线性系统动态响应不服从叠加原理。非线性系统内部，产生的一种无须外界振荡源的常驻周期运动，它既能观测到，也能长期保持，这就是非线性系统的自振。

非线性特性输入正弦函数时，当动态过程结束后，输出为同频率非正弦周期函数。此非正弦周期函数可以展开成 Fourier 级数，用其基波分量近似代替整个输出，这就是谐波线性化。

非线性特性经谐波线性化处理后，可按线性系统幅相频率特性的概念，建立非线性特性的等效幅相特性，即将输出基波分量与输入正弦量的复数比定义为非线性特性的描述函数。

10.2　非线性系统自振

本节再复习一下非线性系统的典型结构与常见的典型非线性特性，以方便稍后的计算。

10.2.1　非线性系统的典型结构

非线性特性经谐波线性化处理后可用其描述函数代替，即有如图 10-1 所示非线性系统的典型结构。

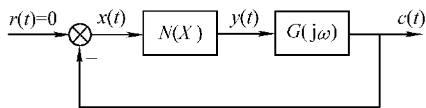


图 10-1　非线性系统的典型结构

当非线性系统自振时，系统各部分的输入、输出都是基波频率的正弦量在起作用，那么可将线性理论中的 Nyquist 稳定判据推广应用于非线性系统。根据 Nyquist 稳定判据，如果闭环系统处于临界稳定的等幅振荡状态，则其开环幅相特性应穿过（-1, j0）点，即在这一点上开环幅相特性等于 -1。仿此条件，得非线性系统具有等幅振荡的条件应为等效的开环幅相特性等于 -1，即 $N(X)G(\mathrm{j}\omega)=-1$ 或者 $G(\mathrm{j}\omega)=-\dfrac{1}{N(X)}$。

$-\dfrac{1}{N(X)}$ 叫做非线性特性的负倒描述函数。与线性系统相比，$-\dfrac{1}{N(X)}$ 相当于线性系统中开环幅相平面的（-1, j0）点。对线性系统而言，最小相位系统的开环幅相特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$

不包围（－1，j0）点，闭环系统就稳定。将此推广至非线性系统，则当系统线性部分的开环幅相特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$ 不包围负倒描述函数 $-\dfrac{1}{N(X)}$，非线性系统就稳定；$G(\mathrm{j}\omega)$ 包围 $-\dfrac{1}{N(X)}$，非线性系统就不稳定。若 $G(\mathrm{j}\omega)=-\dfrac{1}{N(X)}$，则非线性系统自振。

10.2.2 自动控制系统中典型非线性特性

自动控制系统中常见的典型非线性特性列于表 10-1 中，请特别关注静特性曲线、描述函数。这些内容在以下的描述函数法分析非线性系统自振的 MATLAB 计算里会反复使用。

表 10-1 常见典型非线性的描述函数

非线性特性	静特性曲线	描述函数 $N(X)$
理想继电特性		$\dfrac{4M}{\pi X}$
有死区的继电特性		$\dfrac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{X}\right)^2},X\geqslant h$
有滞环的继电特性		$\dfrac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{X}\right)^2}-\mathrm{j}\dfrac{4Mh}{\pi X^2}$，$X\geqslant h$
有死区与滞环的继电特性		$\dfrac{2M}{\pi X}\left[\sqrt{1-\left(\dfrac{mh}{X}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{X}\right)^2}\right]+\mathrm{j}\dfrac{2Mh}{\pi X^2}(m-1)$ $X\geqslant h$
饱和特性		$\dfrac{2K}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{a}{X}+\dfrac{a}{X}\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{X}\right)^2}\right],X\geqslant a$
死区特性		$\dfrac{2K}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{\Delta}{X}-\dfrac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\dfrac{\Delta}{X}\right)^2}\right]$，$X\geqslant\Delta$

（续）

非线性特性	静特性曲线	描述函数 $N(X)$
有死区的饱和特性		$\frac{2K}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{X}-\arcsin\frac{\Delta}{X}+\frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right]-\frac{2K}{\pi}\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2},\ X\geqslant a$
间隙特性		$\frac{K}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2b}{X}\right)+2\left(1-\frac{2b}{X}\right)\sqrt{\frac{b}{X}\left(1-\frac{b}{X}\right)}\right]+\mathrm{j}\frac{4Kb}{\pi X}\left(\frac{b}{X}-1\right),\ X\geqslant b$
摩擦特性		$K+\frac{4M}{\pi X}$

10.3　非线性系统自振分析

根据线性理论的 Nyquist 稳定判据推广应用于非线性系统，当系统线性部分的开环幅相特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)$ 不包围负倒描述曲线 $-1/N(X)$ 时，非线性系统就稳定。图 10-2 a 所示的是非线性系统稳定时的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-1/N(X)$ 相互位置关系。图 10-2 b 所示的则是非线性系统不稳定时的情况。

若满足公式 $G(\mathrm{j}\omega)=-\frac{1}{N(X)}$，则非线性系统存在一组参数$(X,\omega)$，系统处于等幅振荡，称之为在一次近似下的周期运动。如果在同一复平面上做出 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-1/N(X)$ 曲线，两曲线相交，则式 $G(\mathrm{j}\omega)=-\frac{1}{N(X)}$ 成立，系统存在周期运动。而参数 X（振荡振幅）及 ω（振荡角频率）就是交点处 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-1/N(X)$ 的自变量。

若两曲线如图 10-3 所示有两个交点，则系统存在两个周期运动状态，这两个状态不仅参数（X,ω）不相同，而且运动性质也不同。当系统周期运动的振幅稍有变化后，系统本身是否有能力使振幅重新恢复原值？如果能够恢复，则称系统的周期运动是具有常驻性的，否则，周期运动不具有常驻性。只有常驻的周期运动才叫做自振，而非常驻的周期运动，实际上不可能长时间存在，一经扰动，就将转变为其他运动状态，或收敛、或发散，或者转移到另一个自振状态。

在图 10-3 中，观察 M_1 点的周期运动。若由于某种原因使振幅 X 有所减小，降到了 A 点所对应的数值，则运用上述稳定性判据可知，A 点位于 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线之外，即此点的 $-1/N(X)$ 不被 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线所包围，则系统处于稳定的运动状态，振幅将进一步减小，直到衰减为零。若 M_1

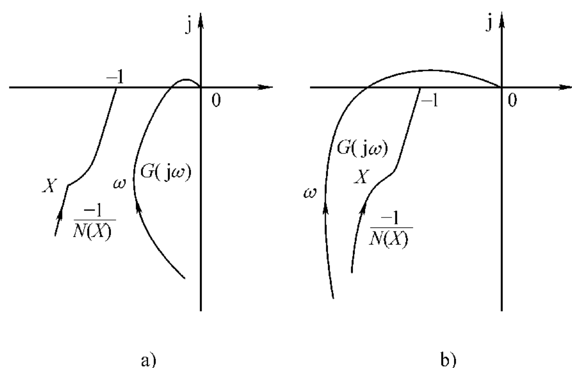


图 10-2　非线性系统稳定性分析

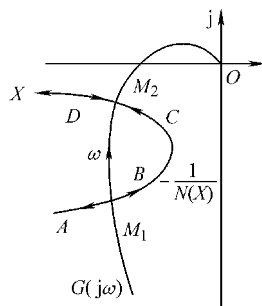


图 10-3　非线性系统的自振分析

点的状态受扰，使振幅增大到 B 点对应的数值，由于 B 点被 $G(\mathrm{j}\omega)$ 所包围，运动状态不稳定，振幅将逐步增大，工作点会偏离 M_1 点越来越远。由此可见，M_1 点对应的周期运动是不常驻的，振幅稍有变化，状态即被破坏，不构成系统的自振。

若系统处于 M_2 点所对应的周期运动，如振幅 X 偏高，到非线性特性的工作点 D，则运用判据可知，闭环系统稳定，振幅下降；相反，若振幅偏低，到工作点 C，则闭环系统不稳定，振幅回升。故 M_2 点对应的周期运动是常驻的，振幅稍有变化仍能恢复，M_2 点是系统自振点。

用图解法定量地计算周期运动状态的参数（X，ω），并判断确认其是否为自振点，是用描述函数法分析非线性系统的重要内容。确认自振点时要特别注意在图 10-3 中自振振幅 X 增大的方向。

10.4　描述函数法分析非线性系统自振的 MATLAB 实现

在以下描述函数法分析非线性系统自振的 MATLAB 实现中，必须绘制系统线性部分在频率范围 $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 的幅相特性，即 Nyquist 曲线。《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中已经说明过，MATLAB 中的函数命令 nyquist() 执行后绘制的是在 $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 范围的完整开环频率响应 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$，范围 $-\infty \leqslant \omega \leqslant 0$ 与 $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 的两个部分 Nyquist 曲线对称于复平面的横轴。提请读者要特别关注从横轴下方穿到横轴上方趋向原点这一分支曲线即 $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 区段内的曲线情况。

【例 10-1】　设带有死区特性的系统结构如图 10-4 所示，其中参数 $\Delta = 0.1$，$K = 1$。线性部分的传递函数为 $G(s) = \dfrac{12}{s(0.1s+1)(s+1)}$。试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求出自振振幅 X 与角频率 ω。

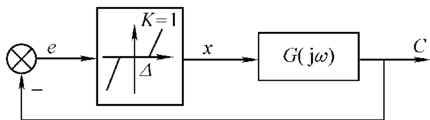


图 10-4　带有死区特性的系统

解：1）系统线性部分传递函数为 $G(s) = \dfrac{12}{s(0.1s+1)(s+1)}$，那么，线性部分频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{12}{\mathrm{j}\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)}=\frac{12\mathrm{j}(1-\mathrm{j}\omega)(1-0.1\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}^2\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)(1-\mathrm{j}\omega)(1-0.1\mathrm{j}\omega)}$$

2）负倒描述函数与负倒描述函数图。

① 死区特性的描述函数 $N(X)=\frac{2K}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\Delta}{X}-\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right]$，已知 $\Delta=0.1$，$K=1$，故有 $N(X)=\frac{2K}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\Delta}{X}-\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{0.1}{X}-\frac{0.1}{X}\sqrt{1-\left(\frac{0.1}{X}\right)^2}\right]$。负倒描述函数 $-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{0.1}{X}-\frac{0.1}{X}\sqrt{1-\left(\frac{0.1}{X}\right)^2}\right]^{-1}$，所有 $N(X)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$ 都是 X 的实数函数。

② 负倒描述函数图。当 $X=\Delta=0.1$ 时，$N(X)=0$、$-\frac{1}{N(X)}=-\infty$；当 $X=\infty$ 时，$N(X)=K$、$-\frac{1}{N(X)}=-\frac{1}{K}$。据此得到带有死区特性的负倒描述函数图，如图 10-5 所示。请特别注意 X 增大的方向，这在判断自振点性质时尤其重要。

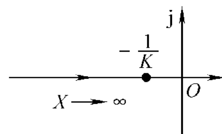


图 10-5　带有死区特性的 $-\frac{1}{N(X)}$

3）因为 $-\frac{1}{N(X)}$ 是 X 的实数函数，与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 画在同一复平面内时，交点必在横坐标上，$G(\mathrm{j}\omega)$ 虚部为零，求交点的角频率 ω 与交点的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$。

① 分母有理化后，运行以下程序段只关注以上分式的分子（是一复数）部分：

```
clear;syms w Gn; Gn=12*j*(1-j*w)*(1-0.1*j*w); Gn=expand(Gn),
```

程序运行结果 Gn = 12*i+66/5*w-6/5*i*w^2。

② 利用交点的虚部为零，求交点的角频率 ω。

```
clear;syms w;[w]=solve('12-6/5*w^2=0',w);w=vpa(w,4),
```

程序运行后得到交点的角频率 $\omega=\sqrt{10}\mathrm{rad/s}=3.162\mathrm{rad/s}$。

③ 由交点 $\omega=\sqrt{10}\mathrm{rad/s}=3.162\mathrm{rad/s}$，按 $G(\mathrm{j}\omega)=\frac{12}{\mathrm{j}\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)}$ 计算交点 $|G(\mathrm{j}\sqrt{10})|$。

```
clear;syms w U;w=sqrt(10);G=12/(j*w*(0.1*j*w+1)*(j*w+1));U=real(G),
```

程序运行后得到 $|G(\mathrm{j}\sqrt{10})|=-1.0909$。

④ 利用交点在横坐标上，即 $-\frac{1}{N(X)}=-1.0909$，求自振的振幅 X。

```
clear;syms X;
[X]=solve('pi/2/(pi/2-asin(0.1/X)-0.1/X*sqrt(1-(0.1/X)^2))=1.0909',X);X=vpa(X,4),
```

程序运行后得到 $X=1.527$。

4）执行以下 MATLAB 程序使在同一复平面上绘制非线性特性负倒描述函数与线性部分的 Nyquist 曲线，以便观察其交点。

```
clear;
for X=0.1:0.1:20
  x=2/pi*(pi/2-asin(0.1/X)-0.1/X*sqrt(1-(0.1/X)^2));
  y=0; plot(-1/x,y,'k*'),grid on;hold on;
end
n=[12];d=conv(conv([1 0],[1 1]),[0.1 1]);G=tf(n,d);
for w=1.8:0.1:80
  nyquist(G,[w,w+0.1]),grid on;hold on;
end
```

程序运行后绘制带有死区特性负倒描述函数与线性部分 Nyquist 曲线，如图 10-6 所示，其示意图如图 10-7 所示。

由图 10-7 可以看出，系统的 $G(j\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 有一个交点且在横轴上。交点的角频率 $\omega=\sqrt{10}\text{rad/s}=3.162\text{rad/s}$，交点的 $\left|G(j\sqrt{10})\right|=-1.0909$。$-\dfrac{1}{K}=-1>-1.0909$，按图 10-3中 M_1 交点的分析，不是自振点，计算的自振角频率与自振振幅都无意义。

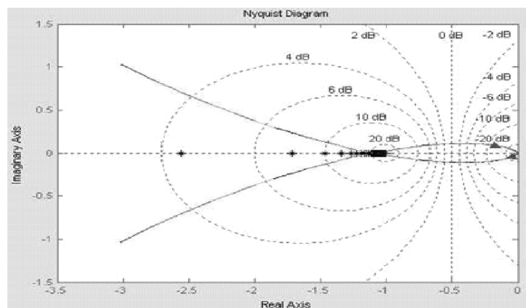


图 10-6　系统的 $G(j\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线

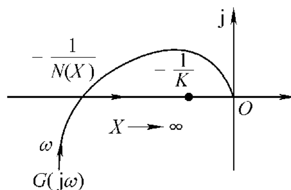


图 10-7　$G(j\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 交点示意图

在此特别提请读者关注以下三点。

① 程序运行的时间可长达数分钟之久，是因为计算工作量太大，不要误认为是死机。

② 为了方便地绘制出曲线，可根据程序中两个循环语句循环变量的起始值与终了值的范围，分成数段进行，以收到立竿见影的效果。显然，分成的数段应彼此衔接，以便使曲线连续。还要注意，步长越小，绘制的曲线越精细美观，而运算的时间越长。

③ 由于带有死区特性的描述函数是自振振幅 X 的实函数，其相对负倒描述函数也是自振振幅 X 的实函数，其虚部为零，曲线在负实轴上，与系统线性部分 Nyquist 曲线的交点也在横坐标上。

以上三点说明，对本章其他的题目也都适用。非线性特性描述函数是 X 复函数者除外。

【例 10-2】　设带有理想继电特性的系统结构如图 10-8 所示，其中参数为 $M=1$，线性部分的传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$。试分析系统是否存在自振，若有自振，试求振幅 X 与角频率 ω。

解：1）系统线性部分的传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$，则其频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{10}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$$

2）书写负倒描述函数与绘制负倒描述函数图。

① 理想继电特性的描述函数 $N(X)=\dfrac{4M}{\pi X}$，负倒描述函数 $-\dfrac{1}{N(X)}=-\dfrac{\pi X}{4M}$，$N(X)$ 与 $-\dfrac{1}{N\ (X)}$都是 X 的实数函数。

② 负倒描述函数图。当 $X=0$ 时，$N(X)=\dfrac{4M}{\pi X}=\infty$ 、$-\dfrac{1}{N(X)}=0$；当 $X=\infty$ 时，$N(X)=0$ 、$-\dfrac{1}{N(X)}=-\infty$ 。据此得到理想继电特性的负倒描述函数图如图 10-9 所示。已经说明过，请特别注意 X 增大的方向，这在判断自振点性质时尤其重要。

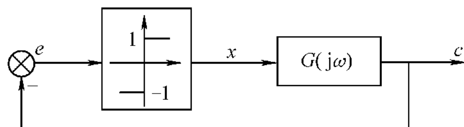


图 10-8　带有理想继电特性的系统

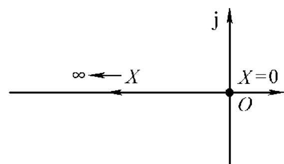


图 10-9　理想继电特性的 $-\dfrac{1}{N(X)}$

3）对于线性部分的频率特性，利用交点在横坐标上，其虚部为零，求交点的角频率 ω 与交点的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 。

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{10}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}=\frac{10\mathrm{j}(1-\mathrm{j}\omega)(2-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}^2\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)(1-\mathrm{j}\omega)(2-\mathrm{j}\omega)}$$

① 分母有理化后，运行以下程序段只关注以上分式的分子（是一复数）：

```
clear;syms w n;n=expand(j*(1-1*j*w)*(2-1*j*w)),
```

程序段运行结果 n = 2*i+3*w-i*w^2。

② 利用交点的虚部为零，求交点的角频率 ω 。

```
clear;[w]=solve('2-w^2=0');w=vpa(w,4),
```

序段运行后得到交点的角频率 $\omega=1.4142\mathrm{rad/s}$ 。

③ 由交点的角频率 $\omega=1.4142\mathrm{rad/s}$ ，按 $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{10}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$ 计算交点的 $|G(\mathrm{j}1.414)|$ 。

```
clear;w=1.414; G=10/(j*w*(j*w+1)*(j*w+2));A=real(G),
```

程序段运行后得到 $|G(\mathrm{j}1.414)|=-1.6672$ 。

④ 利用交点在横坐标上，即 $-\dfrac{1}{N(X)}=-\dfrac{\pi X}{4M}=-1.6672$ ，求自振的振幅 X。

```
clear;syms X;[X]=solve('pi*X/4=1.6672',X); X=vpa(X,4),
```

程序段运行结果 $X=2.123$ 。

4）执行以下 MATLAB 程序使在同一复平面上绘制非线性特性负倒描述函数与线性部分的 Nyquist 曲线，以便观察其交点。

```
clear; M=1;
for X=0.01:0.1:10
    x=4/pi/X;y=0;plot(-1/x,y,'k*'),
    grid on;hold on;
end
n=[0 0 0 10];d=conv(conv([1 0],[1 1]),[1 2]);G=tf(n,d);
for w=0.8:0.1:6
    nyquist(G,[w,w+0.1]),
    grid on;hold on;
end
```

程序运行后绘制带有理想继电特性的负倒描述函数与线性部分 Nyquist 曲线，如图 10-10 所示，其示意图如图 10-11 所示。

5）结论。线性部分的频率特性曲线与相对负描述函数有一个交点，交点的角频率 $\omega=1.414\mathrm{rad/s}$，$|G(\mathrm{j}1.414)|=-1.6672$，自振的振幅 $X=2.123$，对应着系统一次近似下的周期运动状态。类似图 10-3 中 M_2 交点的分析，确定该点是自振点。

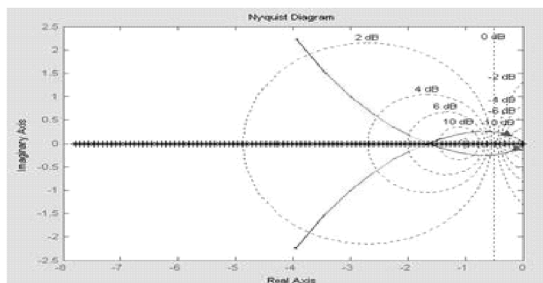


图 10-10　系统的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线

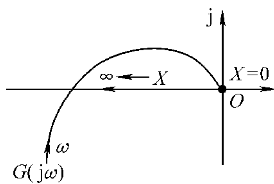


图 10-11　图 10-10 示意图

【例 10-3】 设带有理想继电特性的系统结构如图 10-12 所示，其中参数为 $M=1$，线性部分的传递函数为 $G(s)=\dfrac{K\mathrm{e}^{-\tau s}}{s(s+1)(s+2)}$。1）当 $\tau=0$ 时，要产生振幅为 $X=\dfrac{2}{3}$ 的自振，K 应取何值？自振角频率 ω 为何值？2）当 $\tau>0$ 时，要产生振幅为 $X=2$ 与角频率 $\omega=1\mathrm{rad/s}$ 的自振，τ 与 K 应取何值？

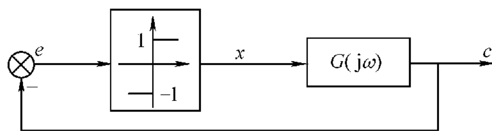


图 10-12　带有理想继电特性的系统

解： 1）当 $\tau=0$、$X=\dfrac{2}{3}$ 时，求 K 与 ω。

① 系统的线性部分的传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$，那么，线性部分的频率特性为 $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\dfrac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$。

② 对于线性部分的频率特性，利用交点在横坐标上，其虚部为零，求交点的角频率 ω 与交点的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$。

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}=\frac{K\mathrm{j}(1-\mathrm{j}\omega)(2-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}^2\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)(1-\mathrm{j}\omega)(2-\mathrm{j}\omega)}$$

分母有理化后，运行以下程序段只关注以上分式的分子（是一复数）：

```
clear;syms w n; n=expand(j*(1-1*j*w)*(2-1*j*w)),
```

程序段运行结果 n = 2*i+3*w-i*w^2。

利用交点的虚部为零，求交点的角频率 ω 。

```
clear;[w]=solve('2-w^2=0');w=vpa(w,4),
```

程序段运行后得到交点角频率 $\omega=1.414\mathrm{rad/s}$ 。

由交点的角频率 $\omega=1.414\mathrm{rad/s}$ ，按 $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+2)}$ 计算交点的 $|G(\mathrm{j}1.414)|$：

```
clear;syms G A w;syms K real;w=1.414;
G=K/(j*w*(j*w+1)*(j*w+2));A=abs(G);A=vpa(A,4),
```

程序段运行后得到 $|G(\mathrm{j}1.414)|=0.1668K$ 。

③ 对于负倒描述函数，利用交点在横坐标上，其虚部为零，求 K。

理想继电特性的描述函数 $N(X)=\dfrac{4M}{\pi X}$，负倒描述函数 $-\dfrac{1}{N(X)}=-\dfrac{\pi X}{4M}$。

利用交点在横坐标上，即 $-\dfrac{1}{N(X)}=-\dfrac{\pi X}{4M}=-0.1668K$, $M=1$, $X=\dfrac{2}{3}$ ，求 K。

```
clear;syms K; [K]=solve('pi*(2/3)/4=0.1668*K',K); K=vpa(K,4),
```

程序段运行后得到 $K=3.139$ 。

④ 结论。绘制的 $\tau=0$ 时的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线如图 10-13 所示。要产生振幅为 $X=\dfrac{2}{3}$ 的自振，应取 $K=3.139$ ，此时自振的角频率 $\omega=1.414\mathrm{rad/s}$ 。

2）当 $\tau>0$ 时，$X=2$ 与 $\omega=1\mathrm{rad/s}$ 的自振，求 τ 与 K。

① 频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与负倒描述函数曲线分析。

当 $\tau>0$ 时，线性部分相频特性为

$$\varphi(\omega_g)=-90°-\arctan(\omega_g)-\arctan(\omega_g/2)-\tau\omega\times57.3°$$

其 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线是螺旋线，$G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 有无穷多个交点，交点的相位为

$$-180°-k360° \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

利用图 10-3 分析法，只有最左端的交点是自振点，绘制的 $\tau>0$ 时 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\dfrac{1}{N(X)}$曲线如图 10-14 所示。

② 产生 $\omega_g=1\mathrm{rad/s}$ 的自振时求 τ 。根据以上分析，有以下关系式

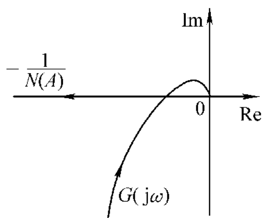


图 10-13　$\tau=0$ 时 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$

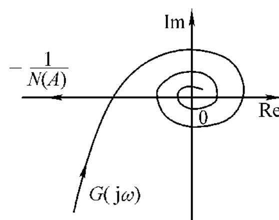


图 10-14　$\tau>0$ 时 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$

$$\varphi(\omega_g)=-90^\circ-\arctan(1)\frac{180^\circ}{\pi}-\arctan(1/2)\frac{180^\circ}{\pi}-\tau\times57.3^\circ=-180^\circ$$

```
clear;syms tau;
[tau] = solve('90 - atan(1) * 180/pi - atan(1/2) * 180/pi - tau * 57.3 = 0 ',tau);
tau = vpa(tau,4),
```

程序运行后得到 $\tau=0.3217$ 。

③ $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$ 相交时，$|G(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1}=\left|-\frac{1}{N(X)}\right|_{X=2}$ 。

求 $|G(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1}$ 。

```
clear;syms G A w;syms K real;w = 1;
G = K/(j * w * (j * w + 1) * (j * w + 2));A = abs(G);A = vpa(A,4),
```

程序运行结果 A = 0.3162 * abs (K)。

由 $|G(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1}=\left|-\frac{1}{N(X)}\right|_{X=2}$ 求 K。

理想继电特性的负倒描述函数 $-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi X}{4M}$, $X=2$, $M=1$ 。

```
clear;syms K;[K] = solve('pi * 2/4 = 0.3162 * K',K);K = vpa(K,4),
```

程序运行结果后得到 $K=4.968$ 。

④ 结论。当 $\tau>0$，要产生 $X=2$ 与 $\omega=1\mathrm{rad/s}$ 的自振，应取 $\tau=0.3217$ 与 $K=4.968$。

【例 10-4】 设带有饱和特性的系统结构如图 10-15 所示，其中参数为 $a=1$ 、$K=2$ ，线性部分的传递函数为 $G(s)=\frac{k}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$ 。1）当 $k=15$ 时，试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求出自振的振幅 X 与角频率 ω 。2）试确定系统稳定时线性部分增益 K 的临界值 K_c。

解：1）当 $k=15$ 时，分析自振。

① 系统的线性部分的传递函数为 $G(s)=\frac{15}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$，那么线性部分的频率特性为 $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{15}{\mathrm{j}\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(0.2\mathrm{j}\omega+1)}$ 。

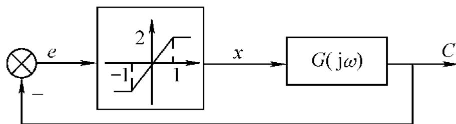


图 10-15　带有饱和特性的系统

② 负倒描述函数与负倒描述函数图。

饱和特性描述函数 $N(X)=\frac{2K}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{X}+\frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right]$，$N(X)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$ 都是 X 实函数。当 $X=a$ 时，$N(X)=K$、$-\frac{1}{N(X)}=-\frac{1}{K}$；当 $X=\infty$ 时，$N(X)=0$、$-\frac{1}{N(X)}=-\infty$。据此得到带有饱和特性的负倒描述函数图如图 10-16 所示。请特别注意 X 增大的方向。

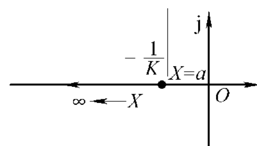


图 10-16　带有饱和特性的 $-\frac{1}{N(X)}$

③ 因 $-\frac{1}{N(X)}$ 是 X 实函数，与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 画在同一复平面内时，交点必在横坐标上，其虚部为零，求交点角频率 ω 与交点的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$。

因为 $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{15}{\mathrm{j}\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(0.2\mathrm{j}\omega+1)}$

$$=\frac{15\mathrm{j}(1-0.1\mathrm{j}\omega)(1-0.2\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(0.2\mathrm{j}\omega+1)(1-0.1\mathrm{j}\omega)(1-0.2\mathrm{j}\omega)}$$

分母有理化后，运行以下程序段只关注以上分式的分子（是一复数）：

```
clear;syms w n;
n=expand(j*(1-0.1*j*w)*(1-0.2*j*w)),
```

程序段运行结果 n = i + 3/10 * w - 1/50 * i * w^2。

利用交点的虚部为零，求交点的角频率 ω。

```
clear;[w]=solve('1-1/50*w^2=0');w=vpa(w,4),
```

程序段运行后得到交点的角频率 $\omega=0.707\mathrm{rad/s}$。

由交点的角频率 $\omega=0.707\mathrm{rad/s}$，按 $G(\mathrm{j}\omega)=\frac{15}{\mathrm{j}\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(0.2\mathrm{j}\omega+1)}$ 计算交点的 $|G(\mathrm{j}7.07)|$。

```
clear;w=7.07;G=15/(j*w*(0.1*j*w+1)*(0.2*j*w+1));A=real(G),
```

程序段运行后得到 $|G(\mathrm{j}7.07)|=-1.0003$。

④ 利用负倒描述函数求自振的振幅 X。

饱和特性描述函数 $N(X)=\frac{2K}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{X}+\frac{a}{X}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X}\right)^2}\right]$，求负倒描述函数 $-\frac{1}{N(X)}$ 表达式。

```
clear;syms X a K f;
a=1;N=2*K/pi*(asin(a/X)+a/X*sqrt(1-(a/X)^2));
f=-1/N;f=subs(f,K,2),
```

程序段运行结果 f = -1/4 * pi/(asin(1/X) + 1/X * (1 - 1/X^2)^(1/2))。

利用交点在横坐标上，即 $-\frac{\pi}{4}\left[\arcsin\frac{1}{X}+\frac{1}{X}\sqrt{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2}\right]^{-1}=-1.0003$，求自振振幅 X。

变换以上表达式，得 $\left[\arcsin\frac{1}{X}+\frac{1}{X}\sqrt{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2}\right]=\frac{\pi}{4}$

```
clear;syms X ;
[X] = solve('asin(1/X) +1/X * (1 -1/X^2)^(1/2) = pi/4 ',X);X = vpa(X,4),
```

程序段运行后得到 $X = 2.475$ 。

⑤ 在同一复平面用程序绘制 $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$ 曲线，以观察其交点情况。

```
clear;syms S k x y X;
S =1;k =2;
for X =0.5:0.01:4
    x =2 * k/pi * (asin(S/X) +S/X * sqrt(1 -(S/X)^2));
    y =0;plot( -1/x,y,'k * '),hold on;
end
n =[0 0 0 15];
d =conv(conv([1 0],[0.1 1]),[0.2 1]);G =tf(n,d);
for w =5:0.1:30
    nyquist(G,[w,w +0.1]),grid on;hold on;
end
```

程序运行后绘制 $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$ 曲线，如图 10-17 所示，其示意图如图 10-18 所示。

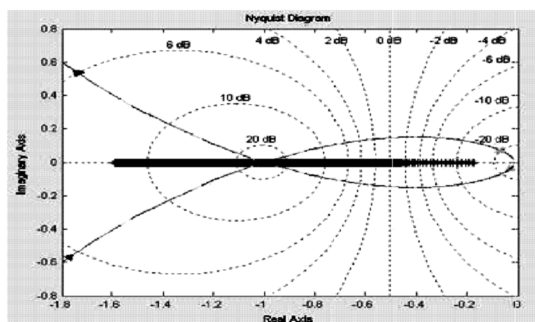


图 10-17　$G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$ 曲线

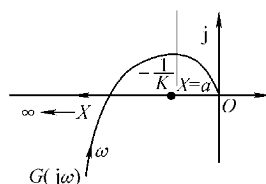


图 10-18　$G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(X)}$ 曲线示意图

由图 10-18 可知，线性部分的频率特性曲线与相对负描述函数有一个交点，交点的角频率 $\omega = 0.707\text{rad/s}$ ，自振的振幅 $X = 2.475$ 。对应着系统一次近似下的周期运动状态，按图 10-3 中 M_2 点的分析，确定该点是自振点。

2）确定系统稳定时线性部分增益 k 的临界值 K_c。

① 根据自动控制原理，对饱和非线性特性，当 $X = S$ 时，$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{1}{K} = -\frac{1}{2}$ ；而当 $X = \infty$ 时，$-\frac{1}{N(X)} = -\infty$ 。欲使系统稳定，则线性部分频率特性 $G(j\omega)$ 曲线需不包围 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 线段。

② 线性部分的频率特性曲线与相对负描述函数的交点，其角频率 $\omega = 7.07\text{rad/s}$ ，求 $|G(j7.07)|$ 的表达式（含有线性部分增益 K 变量）。

```
clear;syms w G U;syms Kc real;
w=7.07;G=Kc/(j*w*(0.1*j*w+1)*(0.2*j*w+1));
U=abs(G);U=vpa(U,4),
```

程序运行结果 U=.6668e-1*abs（Kc）。

③ 确定增益 k 的临界值 K_c 。

```
clear;syms Kc;
[Kc]=solve('.6668e-1*abs(Kc)=1/2',Kc);Kc=vpa(Kc,4),
```

程序运行后得到增益 k 的临界值 $K_c = 7.499$ 。

【例 10-5】 设带有死区继电特性的系统如图 10-19 所示，并且死区特性的参数 $M=3$ 、$h=1$ ，线性部分的传递函数为 $G(s)=\dfrac{2}{s(0.5s+1)(s+1)}$ ，试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求出自振的振幅 X 与角频率 ω 。

解：1）线性部分的频率特性为 $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega(0.5\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)}$ 。

2）求死区继电特性的负倒描述函数的极值条件。

① 负倒描述函数的导函数。将负倒描述函数的导函数分解成分子与分母两部分。

```
clear;syms X M h; N=4*M/pi/X*sqrt(1-(h/X)^2);
FN=-1/N;dFN=diff(FN,X); [n,d]=numden(dFN),
```

程序运行后得到

```
n=-pi*(X^2*(1-h^2/X^2)-h^2)
d=4*X^2*M*(1-h^2/X^2)^(3/2)
```

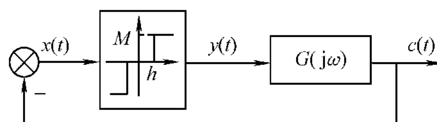


图 10-19　带有死区继电特性的系统

② 令导函数分子部分为 0 对其计算负倒描述函数的极值条件。

```
clear;syms f N X M h; [X]=solve('-pi*(X^2*(1-h^2/X^2)-h^2)=0',X),
```

程序运行后得到极值条件为 $X=\sqrt{2}h$ 。

③ 计算负倒描述函数的极值。

```
clear;syms f N X M h; X=2^(1/2)*h; f=-pi*X/(4*M*sqrt(1-(h/X)^2)),
```

程序运行后得到 $-\dfrac{1}{N(X)}=-\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{M}{h}}=-\dfrac{\pi h}{2M}$。

3）死区继电特性的描述函数与负倒描述函数图。

死区继电特性的描述函数 $N(X)=\dfrac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{X}\right)^2}$ ，所以 $N(X)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 都是 X 的实函数。当 $X=h$ 时, $N(X)=0$ 、$-\dfrac{1}{N(X)}=-\infty$ ；当 $X=\infty$ 时, $N(X)=0$ 、$-\dfrac{1}{N(X)}=-\infty$ 。当 $X=\sqrt{2}h$ 时，函数出现极值, $N(X)=\dfrac{\frac{M}{h}}{1.57}$ 、$-\dfrac{1}{N(X)}=-\dfrac{1.57}{\frac{M}{h}}$ 。据此绘制带有死区继电特性的

负倒描述函数图，如图 10-20 所示。请特别注意负倒描述函数图都在横坐标上，为分析方便画成分开的两支，并请注意 X 增大的方向、$-\dfrac{1}{N(X)}$图极值及其条件。

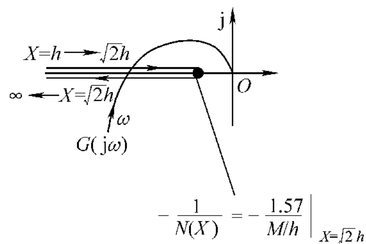


图 10-20　带有死区继电特性的 $-\dfrac{1}{N(X)}$

4）因 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 是 X 实函数，与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 画在同一复平面内时，交点必在横坐标上。利用虚部为零，求交点角频率 ω 与交点的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 。

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega(0.5\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)}=\frac{2\mathrm{j}(1-0.5\mathrm{j}\omega)(1-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}^2\omega(0.5\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)}$$

① 分母有理化后，运行以下程序段只关注以上分式的分子（是一复数）：

```
clear;syms w n; n=simple(j*(1-1*j*w)*(1-0.5*j*w)),
```

程序段运行结果 n = i+3/2*w-1/2*i*w^2。

② 利用交点的虚部为零，求交点角频率 ω 。

```
clear;[w]=solve('1-1/2*w^2=0'),
```

程序段运行后得到交点角频率 $\omega=\sqrt{2}\mathrm{rad/s}$ 。

③ 由交点 $\omega=\sqrt{2}\mathrm{rad/s}$ ，根据 $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega(0.5\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)}$计算交点的$|G(\mathrm{j}\sqrt{2})|$。

```
clear; w=2^(1/2);G=2/(j*w*(0.5*j*w+1)*(j*w+1)); A=abs(G),
```

程序运行后得到 $|G(\mathrm{j}\sqrt{2})|=0.6667$。

④ 对于负倒描述函数，利用交点在横坐标上，其虚部为零，求自振的振幅 X。

```
clear;syms X; [X]=solve('pi*X/4/3/sqrt(1-(1/X)^2)=0.6667'); X=vpa(X,4),
```

程序运行后得到自振的振幅 $X_1=1.111$ 与 $X_2=2.291$ 。

5）在同一复平面用程序绘制 $G(\mathrm{j}\omega)$与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线，以观察其交点情况。

```
clear;syms t x y z h M X;
M=3;h=1;
for X=0.7:0.1:10
  x=4*M/(pi*X)*sqrt(1-(h/X)^2);y=0;plot(-1/x,y,'k*'),hold on;
end
n=[0 0 0 2];d=conv(conv([1 0],[0.5 1]),[1 1]);G=3/1*tf(n,d);
for w=1:0.1:8
  nyquist(G,[w,w+0.1]),grid on;hold on;
end
```

程序运行后绘制的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线如图 10-21 所示，其示意图如图 10-22 所示。

6）结论。由图 10-22 可知，$-\dfrac{1}{N(X)}$ 与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 有两个交点，交点的角频率为 $\omega=\sqrt{2}\mathrm{rad/s}$ ，自振有两个振幅 $X_1=1.111$ 与 $X_2=2.291$ ，对应着系统两个一次近似下的周期运动状态，究

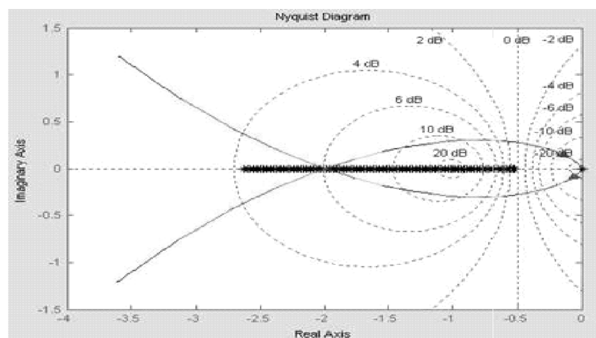


图 10-21　$-\frac{1}{N(X)}$ 与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线

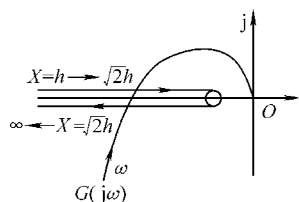


图 10-22　图 10-21 的示意图

竟哪个交点是自振点呢？类似图 10-3 中 M_2 交点的分析，确定 $X_2=2.291$ 是自振点。

【例 10-6】 已知带有死区继电特性的系统结构如图 10-19 所示，线性部分的传递函数为 $G(s)=\frac{3}{s(0.8s+1)(s+1)}$，为使系统不产生自振，试利用描述函数法确定死区继电特性参数 M 与 h 之间的关系。

解： 1）死区继电特性的描述函数与负倒描述函数都是 X 的实数函数，其矢端轨迹都在复平面的横轴上。其 $N(X)=\frac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^2}$ 与 $-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi X}{4M}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^2}}$

2）线性部分频率特性为 $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{3}{\mathrm{j}\omega(0.8\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+1)}$，线性部分频率特性曲线与负倒描述函数曲线的交点在反向横轴上，即相频特性为 $-\pi$。

① 由线性部分的相频特性求 ω。

$$\angle G(\mathrm{j}\omega)=-\pi \text{ 即 } -\frac{\pi}{2}-\arctan(0.8\omega)-\arctan\omega=-\pi$$

```
clear;syms  omega;
[omega] = solve('-pi/2 - atan(0.8 * omega) - atan(1 * omega) = -pi',omega);
omega = vpa(omega,4),
```

程序运行后得到线性部分频率特性在反向横轴上交点的角频率为 $\omega=1.118\text{rad/s}$。

② 计算 ω 对应的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$。

```
clear;w = 1.118;G = 3/(j * w * (0.8 * j * w + 1) * (1 * j * w + 1));A = abs(G),
```

程序运行后得到交点角频率 $\omega=1.118\text{rad/s}$ 对应的 $|G(\mathrm{j}\omega)|=1.3334$。

3）为使系统不产生自振，线性部分的频率特性曲线与负倒描述函数曲线应不相交，即有负倒描述函数的极值 $<|G(\mathrm{j}\omega)|$，那么有 $-\frac{\pi h}{2M}<-1.3334$，则参数 M 与 h 的关系为

$$h>\frac{2\times1.3334}{\pi}M=0.8489M$$

4）当取 $M=1$ 与 $h=0.9$ 时，满足 $h>0.8489M$，即 $G(\mathrm{j}\omega)$与 $-\frac{1}{N(X)}$ 曲线应不相交、系

统不产生自振。以下使用 MATLAB 程序来绘制 $G(j\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线。

```
clear;syms t x y z h M X;
M=1;h=0.9;
for X=0.5:0.1:10
    x=4*h/(pi*X)*sqrt(1-(h/X)^2);
    y=0; plot(-1/x,y,'k*'),grid on;hold on;
end
n=[0 0 0 3];
d=conv(conv([1 0],[0.8 1]),[1 1]);
G=tf(n,d);
for w=0.7:0.1:8
    nyquist(G,[w,w+0.1]),grid on;
    hold on;
end
```

程序运行后，绘制出图 10-23，即系统频率特性与负倒描述函数曲线是不相交的。

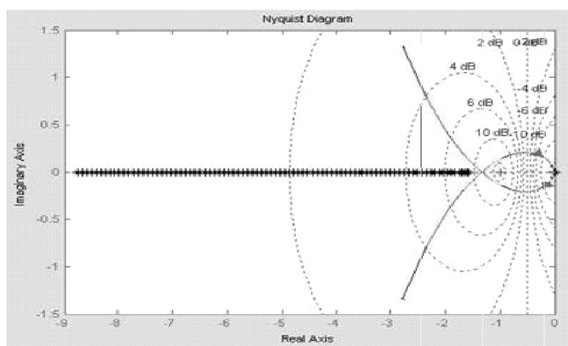


图 10-23　频率特性与负倒描述函数曲线不相交

【例 10-7】　已知带有死区继电特性的系统结构如图 10-24 所示，线性部分的传递函数为 $G(s)=\dfrac{2}{s(s+1)(2s+1)}$，$M=1.7$、$h=0.7$。试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求出自振的振幅 X 与角频率 ω。

解：1）系统简化后如图 10-25 所示，即系统线性部分传递函数为 $G(s)=\dfrac{2(0.1s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$，那么

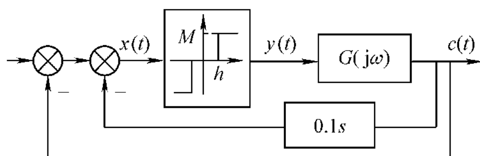


图 10-24　带有死区继电特性的系统

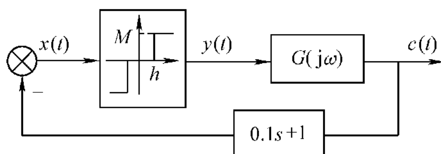


图 10-25　系统简化结构

线性部分的频率特性为 $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=\dfrac{2(0.1\mathrm{j}\omega+1)}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(2\mathrm{j}\omega+1)}$。

2）在同一复平面上绘制非线性特性负倒描述函数与线性部分的 Nyquist 曲线。

```
clear;syms t x y z h M X;
M=1.7;h=0.7;
for X=0.8:0.1:6
    x=4*M/(pi*X)*sqrt(1-(h/X)^2);
    y=0;plot(-1/x,y,'k*');grid on;hold on;
end
n=[0.2 2];
d=conv(conv([1 0],[1 1]),[2 1]);
G=tf(n,d);
for w=0.7:0.1:4
    nyquist(G,[w,w+0.1]),grid on;hold on;
end
```

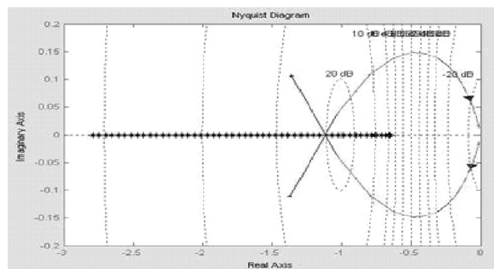


图 10-26　$G(j\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线

运行该程序得到在同一复平面上绘制的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 的曲线，如图 10-26 所示。

3）因 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 是 X 实函数，与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 画在同一复平面内时，交点必在横坐标上。利用虚部为零，求交点角频率 ω 与交点的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$。

$$因为\ G(\mathrm{j}\omega)=\frac{2(0.1\mathrm{j}\omega+1)}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(2\mathrm{j}\omega+1)}=\frac{2\mathrm{j}(0.1\mathrm{j}\omega+1)(1-\mathrm{j}\omega)(1-2\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}^2\omega(\mathrm{j}\omega+1)(2\mathrm{j}\omega+1)(1-\mathrm{j}\omega)(1-2\mathrm{j}\omega)}$$

① 分母有理化后，运行以下程序段只关注以上分式的分子（是一复数）：

```
clear;syms w n; n=expand(j*(1+0.1*j*w)*(1-j*w)*(1-2*j*w)),
```

程序段运行后得到 n=i+29/10*w-17/10*i*w^2+1/5*w^3。

② 利用交点的虚部为零，求交点的角频率 ω。

```
clear;[w]=solve('1-17/10*w^2=0');w=vpa(w,4),
```

程序段运行后得到交点的角频率 $\omega=0.767\mathrm{rad/s}$。

③ 由角频率 $\omega=0.767\mathrm{rad/s}$，按 $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2(0.1\mathrm{j}\omega+1)}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)(2\mathrm{j}\omega+1)}$ 计算交点的 $|G(\mathrm{j}0.767)|$。

```
clear;syms w;w=0.767;
G=2*(0.1*j*w+1)/(j*w*(1*j*w+1)*(2*j*w+1));A=real(G),
```

程序段运行后得到 $|G(\mathrm{j}0.767)|=-1.1332$。

4）对于负倒描述函数，利用交点在横坐标上，其虚部为零，求自振的振幅 X。

① 死区继电特性的描述函数 $N(X)=\dfrac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{X}\right)^2}$，求负倒描述函数 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 的表达式。

```
clear;syms X M h f; M=1.7;h=0.7; f=-pi*X/(4*M*sqrt(1-(h/X)^2)),
```

程序段运行后得到 f=-25/17*pi*X/(100-49/X^2)^(1/2)。

② 利用交点在横坐标上，$-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi X}{4M}\left(\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^2}\right)^{-1}=-1.1332$，求自振的振幅 X。

```
clear;syms X;[X]=solve('-25/17*pi*X/(100-49/X^2)^(1/2)=-1.1332',X); X=vpa(X,4),
```

程序段运行后得到两个振幅 $X_1=0.7336$ 与 $X_2=2.341$。

5）结论。线性部分的频率特性曲线与相对负描述函数有两个交点，交点的角频率 $\omega=0.767\mathrm{rad/s}$，自振有两个振幅 $X_1=0.7336$ 与 $X_2=2.341$。对应着系统两个一次近似下的周期运动状态，类似图 10-3 中 M_2 交点的分析，确定 $X_2=2.341$ 是自振点。

【例 10-8】 设带有滞环继电特性的系统结构如图 10-27 所示，其中非线性特性的参数为 $M=4$、$h=1$；线性部分的传递函数为 $G(s)=\frac{10(s+1)(0.25s+1)}{s^3}$。试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求自振的振幅 X 与角频率 ω。

解：1）系统线性部分传递函数为 $G(s)=\frac{10(s+1)(0.25s+1)}{s^3}$，那么线性部分的频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{10(\mathrm{j}\omega+1)(0.25\mathrm{j}\omega+1)}{(\mathrm{j}\omega)^3}$$
$$=\frac{10(\mathrm{j}\omega+1)(0.25\mathrm{j}\omega+1)}{-\mathrm{j}\omega^3}=\frac{10\mathrm{j}(\mathrm{j}\omega+1)(0.25\mathrm{j}\omega+1)}{\omega^3}$$

用程序计算线性部分频率特性的实频与虚频。

```
clear;syms w G;
G=10*j*(1+j*w)*(1+0.25*j*w)/(w^3); G=expand(G),
```

程序运行后得到 G=10*i/w^3-25/2/w^2-5/2*i/w，即实频 $U=-\frac{25}{2\omega^2}$，虚频 $V=\frac{10}{\omega^3}-\frac{5}{2\omega}$。

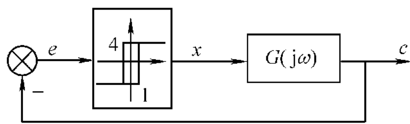


图 10-27　带有滞环继电特性的系统

2）系统非线性特性的负倒描述函数。

$N(X)=\frac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{4Mh}{\pi X^2}$，已知 $M=4$，$h=1$，则有描述函数 $N(X)=\frac{16}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{16}{\pi X^2}=\frac{16}{\pi X}\left[\sqrt{1-\frac{1}{X^2}}-\mathrm{j}\frac{1}{X}\right]$，那么对应负倒描述函数 $-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi}{16}\sqrt{X^2-1}-\mathrm{j}\frac{\pi}{16}$，即负倒描述函数的实频函数 $U=-\frac{\pi}{16}\sqrt{X^2-1}$，虚频函数 $V=-\frac{\pi}{16}$。

3）如果非线性特性的负倒描述函数与线性部分的 Nyquist 曲线相交，则可能产生自振，此时两个复变量实部与实部相等，虚部与虚部相等。

① 利用虚部相等求 ω。

```
clear;syms w real;
[w]=solve('10/(w^3)-5/(2*w)=-pi/16',w);
w=vpa(w,4),
```

程序运行后得到自振角频率 $\omega=12.4\mathrm{rad/s}$。

② 利用实部相等求 X。

利用求出的自振角频率 $\omega=12.4\mathrm{rad/s}$ 计算线性部分频率特性的实频。

```
clear;syms w X U;w=12.4;U=-25/(2*w^2),
```

程序运行结果 $U=-0.0813$。

利用求出的线性部分频率特性的实频求 X。

```
clear;syms X;
[X]=solve('-0.0813=-pi/16*sqrt(X^2-1)',X);X=vpa(X,5),
```

程序运行后得到自振的振幅 $X=1.0823$ 。

4）在同一复平面上绘制非线性特性的负倒描述函数与线性部分的 Nyquist 曲线。

```
clear;syms w x y X;
for X=0.01:0.1:20
    x=-pi/16*sqrt(X^2-1);
    y=-pi/16; plot(x,y,'k*'),  hold on;
end
n=conv(conv([0 10],[1 1]),[0.25 1]); d=[1 0 0 0]; G=tf(n,d);
for w=1.8:0.1:80
   nyquist(G,[w,w+0.1]),grid on; hold on;
end
```

运行该程序，在同一复平面上绘制 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 与 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线，如图 10-28 所示，其示意图如图 10-29 所示。

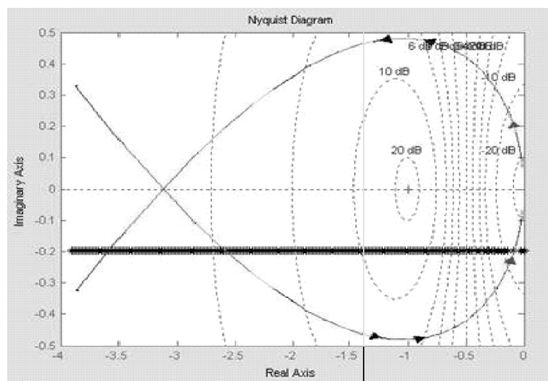


图 10-28　系统的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线

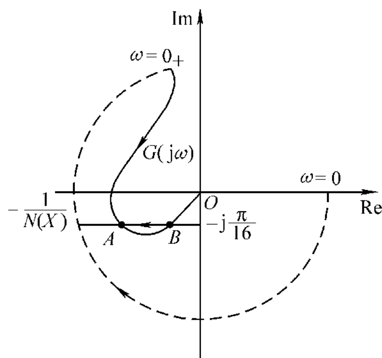


图 10-29　图 10-28 曲线示意图

由图 10-29 可以看出，系统的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N(X)}$ 曲线有两个交点。要特别注意系统 $G(\mathrm{j}\omega)$ 表达式与其增补特性，再按图 10-3 的分析，左侧交点 A 不是自振点，右侧交点 B 是自振点，其自振的角频率 $\omega=12.4\mathrm{rad/s}$ ，自振的振幅 $X=1.0823$ 。

习　题

【10-1】　设带有理想继电特性的系统结构如图 10-30 所示，其中参数 $M=1$ ，线性部分的传递函数为 $G(s)=\dfrac{12}{s(s+1)(s+3)}$ 。试分析系统是否存在自振。若有自振，需求自振的振幅 X 与角频率 ω 。

【10-2】 设带有饱和特性的系统结构如图 10-31 所示，其中饱和非线性特性的参数为 $a = 1$ 、$K = 1$ ，线性部分的传递函数为 $G(s) = \dfrac{3}{s(2s + 1)(s + 1)}$ 。试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求出自振的振幅 X 与角频率 ω 。

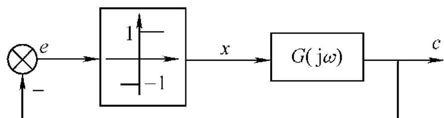


图 10-30　带有理想继电特性的系统

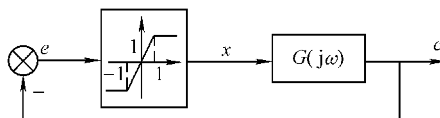


图 10-31　带有饱和特性的系统

【10-3】 设带有死区特性的系统结构如图 10-32 所示，其中参数 $\Delta = 1$, $k = 1$ 。线性部分的传递函数为 $G(s) = \dfrac{2}{s(s + 0.1)}$ 。试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求自振的振幅 X 与角频率 ω 。

【10-4】 设带有死区继电特性的系统结构如图 10-33 所示，并且死区特性的参数 $M = 2$、$h = 1$，线性部分的传递函数为 $G(s) = \dfrac{10}{s(0.5s + 1)(0.125s + 1)}$ ，试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求自振的振幅 X 与角频率 ω 。

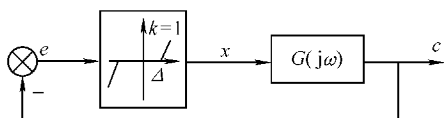


图 10-32　带有死区特性的系统

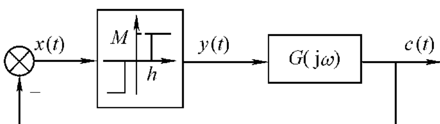


图 10-33　带有死区继电特性的系统

【10-5】 设带有滞环继电特性的系统结构如图 10-34 所示，其中非线性特性的参数为 $M = 1$ 、$h = 1$，线性部分的传递函数为 $G(s) = \dfrac{5(0.5s + 1)}{s^2}$ 。试分析该系统是否存在自振。若有自振，需求自振的振幅 X 与角频率 ω 。

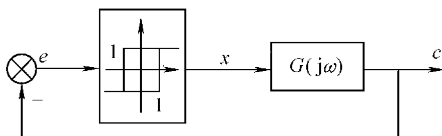


图 10-34　带有滞环继电特性的系统

第 11 章　离散系统分析与校正的 MATLAB 实现

前面各章是连续系统控制的 MATLAB 实现，本章要训练离散系统分析与校正的 MATLAB 实现。如果控制系统中的所有信号都是时间变量的连续函数，或者说这些信号在全部时间上都是已知的，则这样的信号称为连续（时间）信号，其系统称为连续系统。如果控制系统中有一处或几处信号是一串脉冲或数码，换句话说，这些信号仅定义在离散时间上，则这样的信号称为离散信号，其系统叫做离散（时间）系统。

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已经详尽复习了离散系统的基本概念、采样过程与采样定理、信号复现与零阶保持器、z 变换与 z 反变换、差分方程及其 z 变换解法、离散控制系统脉冲传递函数、离散系统稳定性分析、单位反馈离散系统稳态误差的 MATLAB 计算、离散系统动态性能分析等内容，本章用 MATLAB 工具就以上内容解题。

请读者特别关注本章符号计算与 MATLAB 函数计算两类不同方法并能逐步掌握。为方便计算，在本章中作者编制了 iniendz. m、phiRz. m、seriz. m、zohz. m、Dzw. m、Kpvaz. m、leastbeat. m。

11.1　用 MATLAB 工具解算 z 变换与 z 反变换

MATLAB 系统为 z 变换与 z 反变换提供了专用函数以及多种调用格式。提请读者特别关注：①连续时间函数 $e(t)$ 经过采样，只在离散的 $t=nT$ 处取值即 $e(nT)$，于是 $e(t)$ 的采样值就为 $e(nT)$。②定义 z 反变换 $Z^{-1}[E(z)]=e(nT)$ 或 $Z^{-1}[E(z)]=e^{*}(t)$，两者一致。MATLAB 系统提供的 z 反变换函数求出的是 $e(nT)$。若待求解的是 $e^{*}(t)$，只要将 $e(nT)$ 带入采样函数 $e^{*}(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e(nT)\cdot\delta(t-nT)$ 即可。请看示例。

【例 11-1】　对函数 1) $f(t)=1-\mathrm{e}^{-at}$、2) $f(t)=\sin(\omega t)\mathrm{e}^{-at}$ 计算其 z 变换 $F(z)$。

解：1) $f(t)=1-\mathrm{e}^{-at}$。

```
clear;syms a n z t T;f=1-exp(-a*n*T);F=simple(ztrans(f));
[n,d]=numden(F);F=n/d,
```

程序运行后得到 $F(z)=\dfrac{z(\mathrm{e}^{aT}-1)}{(z-1)(z\mathrm{e}^{aT}-1)}=\dfrac{z(1-\mathrm{e}^{-aT})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT})}$。

2) $f(t)=\sin(\omega t)\mathrm{e}^{-at}$。

```
clear;syms a n z T omega;
f=sin(omega*n*T)*exp(-a*n*T);F=simple(ztrans(f)),
```

程序运行结果 $F(z)=\dfrac{z\mathrm{e}^{aT}\sin(\omega T)}{z^2\mathrm{e}^{2aT}-2z\mathrm{e}^{aT}\cos(\omega T)+1}=\dfrac{z\mathrm{e}^{-aT}\sin(\omega T)}{z^2-2z\mathrm{e}^{-aT}\cos(\omega T)+\mathrm{e}^{-2aT}}$

【例 11-2】　试对函数 1) $f(n-2)$、2) $f(n-1)$ 计算其 z 变换 $F(z)$。

解：1) $f(n-2)$。

```
clear;syms n z;F = ztrans(sym('f(n-2)')),
```

语句运行结果 $F(z)=\dfrac{F(z)}{z^2}=F(z)z^{-2}$。

2) $f(n-1)$。

```
clear;syms n z;F = ztrans(sym('f(n-1)')),
```

语句运行结果 $F(z)=\dfrac{F(z)}{z}=F(z)z^{-1}$。

【例 11-3】 对函数 1) $f(t)=t\mathrm{e}^{-at}$、2) $f(t)=t\cdot e(t)$ 求其 $F(z)$。

解： 1) $f(t)=t\mathrm{e}^{-at}$。

```
clear;syms a n z T;f = n*T*exp(-a*n*T);F = ztrans(f),
```

语句运行后得到 $F(z)=\dfrac{Tz\mathrm{e}^{-aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}$

作为特例，当 $T=1$ 时 $F(z)=\dfrac{z\mathrm{e}^{-a}}{(z-\mathrm{e}^{-a})^2}$

2) $f(t)=t\cdot e(t)$。

```
clear;syms n z T;f = n*T*sym('e(n*T)');
F = ztrans(f),F = subs(F,T,1),
```

语句运行结果 $F(z)=-Tz\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E(z)$，

当 $T=1$ 时 $F(z)=-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E(z)$，此题结论就是 z 域微分定理。

【例 11-4】 对 z 变换式 $F(z)=\dfrac{az}{(z-b)(z-c)}$，试求 z 反变换 $f(n)$；当 $a=10$、$b=1$ 与 $c=2$ 时，再对 $F(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$ 求 z 反变换 $f^*(t)$。

解： 1) 求其 z 反变换 $f(n)$。

```
clear;syms a b c n z; F = a*z/((z-b)*(z-c)); f = iztrans(F),
```

语句运行结果 $f(n)=Z^{-1}[F(z)]=\dfrac{a\cdot b^n-a\cdot c^n}{(b-c)}$。

2) 当 $a=10$、$b=1$ 与 $c=2$ 时求 $F(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$ 的反变换 $f^*(t)$。

```
clear;syms n z; F = 10*z/((z-1)*(z-2)); f = iztrans(F),
```

语句执行后得到 z 反变换为 $f(n)=Z^{-1}[F(z)]=10(2^n-1)$，即

$$\begin{aligned}f^*(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\cdot\delta(t-nT)\\&=0+10\delta(t-T)+30\delta(t-2T)+70\delta(t-3T)+\cdots\end{aligned}$$

【例 11-5】 对 z 变换 1) $F(z)=\mathrm{e}^{\frac{aT}{z}}$、2) $F(z)=\dfrac{T^2(z^2+z)}{a\cdot(z-1)^3}$，试求其 z 反变换 $f(nT)$。

解： 1) $F(z)=\mathrm{e}^{\frac{aT}{z}}$。

```
clear;syms a z n T; f = iztrans(exp(a*T/z)),
```

语句执行后得到$f(nT)=Z^{-1}[F(z)]=Z^{-1}[e^{\frac{aT}{z}}]=\dfrac{(aT)^n}{n!}$

当 $T=1$ 时，显然有$f(n)=Z^{-1}[F(z)]=Z^{-1}[e^{\frac{a}{z}}]=\dfrac{a^n}{n!}$

当 $T=1$ 与 $a=1$ 时，则有$f(n)=Z^{-1}[F(z)]=Z^{-1}[e^{\frac{1}{z}}]=\dfrac{1}{n!}$

2）$F(z)=\dfrac{T^2(z^2+z)}{a\cdot(z-1)^3}$。

```
clear;syms z t T a;F=T^2*(z^2+z)/(a*(z-1)^3);f=iztrans(F),
```

语句执行结果$f(nT)=\dfrac{(nT)^2}{a}$

即$f(t)=\dfrac{t^2}{a}$。当 $a=2$ 时，求 $F(z)=\dfrac{T^2(z^2+z)}{2(z-1)^3}$的 z 反变换$f(nT)=\dfrac{(nT)^2}{2}$即$f(t)=\dfrac{t^2}{2}$。

【例 11-6】　试确定1) $E(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$、2) $E(z)=\dfrac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$、3)$E(z)=\dfrac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}$函数的初值与终值。

解：1）$E(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$。

```
clear;syms z; Ez=z^2/(z-0.5)/(z-1); [essini,essend]=iniendz(Ez);
```

程序运行后得到函数初值 $e(0)=1$ 与终值 $e_{ss}(\infty)=2$。

2）$E(z)=\dfrac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$。

```
clear;syms z T; Ez=0.792*z*z/(z-1)/(z^2-0.416*z+0.208); [essini,essend]=iniendz(Ez);
```

程序运行后得到函数初值 $e(0)=0$ 与终值 $e_{ss}(\infty)=1$。

3）$E(z)=\dfrac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}$。

```
clear;syms z; Ez=z*(z+0.5)/(z-1)/(z^2-0.5*z+0.3125); [essini,essend]=iniendz(Ez);
```

程序运行后得到函数初值 $e(0)=0$ 与终值 $e_{ss}(\infty)=1.8462$。

11.2　差分方程的 z 变换解法

在认真复习差分与差分方程概念后，还要掌握差分方程 z 变换求解的步骤：①对差分方程两端进行 z 变换，得到以 z 为变量的代数方程，即变换方程；②解算变换方程，求出未知函数的象函数表达式，并注意方程应计入初始条件值；③将未知函数的象函数表达式展开成部分分式(在 MATLAB 程序语句中反映不出来)；④对部分分式进行 z 反变换即得差分方程的解。

【例 11-7】　已知三阶前向差分方程 $a_1\cdot c(n+3)+a_2\cdot c(n+2)+a_3\cdot c(n+1)+a_4\cdot c(n)=$

r，其中 $a_1=1$，$a_2=6$，$a_3=11$，$a_4=6$，$r=0$，初始条件：$c(0)=c(1)=1$，$c(2)=0$，用 z 变换法求解响应 $c(n)$。

解：1）对差分方程进行 z 变换，得到对应变换方程。

```
clear;syms a1 a2 a3 a4 c r n T z; a1 =1;a2 =6;a3 =11;a4 =6;
l =a1 * sym('c(n +3)') +a2 * sym('c(n +2)') +a3 * sym('c(n +1)') +a4 * sym('c(n)');
L =factor(ztrans(l));R =0;S =L -R,
```

程序运行结果

```
S =
z^3 * ztrans(c(n),n,z) -c(0) * z^3 -c(1) * z^2 -c(2) * z +6 * z^2 * ztrans(c(n),n,z) -6 * c(0) * z^2 -6 *
c(1) * z +11 * z * ztrans(c(n),n,z) -11 * c(0) * z +6 * ztrans(c(n),n,z)
```

2）解算变换方程，求出未知函数的象函数表达式，并进行 z 反变换即得差分方程的解。在列写 MATLAB 语句时，改写所有函数的初始条件 $c(2)$、$c(1)$、$c(0)$ 分别为 c2、c1、c0（即略去小括号），并代入所有初始条件；改写函数 c(n)的 ztrans(c(n),n,z)为 C。

```
clear;syms a n T b z c c0 c1 c2 C;c0 =1;c1 =1;c2 =0;
S =z^3 * C -c0 * z^3 -c1 * z^2 -c2 * z +6 * z^2 * C -6 * c0 * z^2 -6 * c1 * z +11 * z * C -11 * c0 * z +6 * C;
C =solve(S,C);c =iztrans(C),
```

程序运行后得到差分方程的解为

$$c(n)=\frac{11}{2}(-1)^n-7(-2)^n+\frac{5}{2}(-3)^n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

11.3 离散控制系统的脉冲传递函数

离散控制系统的脉冲传递函数是分析线性离散系统的基础。设开环离散系统如图 11-1 所示，在零初始条件下，连续输入信号 $r(t)$ 采样后 $r^*(t)$ 的 z 变换为 $R(z)$，系统连续部分的输出为 $c(t)$，采样后 $c^*(t)$ 的 z 变换为 $C(z)$，则线性定常离散系统的脉冲传递函数定义为系统输出采样信号的 z 变换 $C(z)$ 与输入采样信号的 z 变换 $R(z)$ 之比，记作

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}c(nT)\cdot z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)\cdot z^{-n}}$$

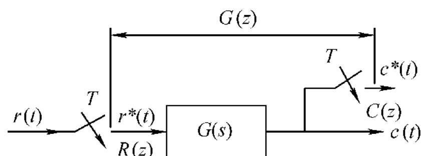


图 11-1 开环离散系统

从上式可知，已知输出采样信号的 z 变换 $C(z)$ 与输入采样信号的 z 变换 $R(z)$ 以及脉冲传递函数 $G(z)$ 三者中的两者就可以求出第三者。

【例 11-8】 已知离散系统脉冲传递函数 $G(z)=\dfrac{1.839z+1.321}{z^2-1.368z+0.3679}$、采样开关的采样周期 $T=1$ s。若输入信号的 z 变换 $R(z)=\dfrac{z}{z(z-1)}$，试求系统输出信号 $c(nT)|_{T=1}=c(n)$ 与 $c*(t)$。

解：

```
clear;syms z;Rz =z/(z -1);H =8; Gz =(1.839 * z +1.321)/(z -1)/(z -0.3679);
```

```
phiz = Gz;[cn] = phiRz(phiz,Rz,H);
```

程序运行后得到

```
cn = -5.000 +5.000 *.3679^n +4.999 * n
cn0 =0
cn1 =1.8385
cn2 =5.6748
cn3 =10.2460
cn4 =15.0876
cn5 =20.0287
cn6 =25.0064
cn7 =29.9976
cn8 =34.9937
```

即系统输出采样信号 $c(n) = -5 + 4.999n + 5 \times (0.3679)^n$ 与

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c(nT) \cdot \delta(t - nT) \big|_{T=1s} \\ &= 0 + 1.8385\delta(t-T) + 5.6748\delta(t-2T) + 10.246\delta(t-3T) \\ &\quad + 15.0876\delta(t-4T) + 20.0287\delta(t-5T) + 25.0064\delta(t-6T) \\ &\quad + 29.9976\delta(t-7T) + 34.9937\delta(t-8T) + \cdots \end{aligned}$$

【例 11-9】 开环离散系统如图 11-1 所示，其连续部分传递函数为 $G(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$，试求该开环离散系统的脉冲传递函数 $G(z)$ 及当 $a=8$ 时的 $G(z)$。

解：根据自动控制原理，如果连续系统的传递函数为 $G(s)$，其系统脉冲过渡函数为 $g(t)$，那么有 $g(t) = L^{-1}[G(s)]$ 与 $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) \cdot z^{-n} = Z[g(t)]$。

```
clear;syms s a;G1s = a/s;G2s = 1/(s + a);key = 1;
[Gz] = seriz(key,G1s,G2s);Gz = subs(Gz,a,8),
```

程序运行后得到 $G(z) = \dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$

当 $a=8$ 时 $G(z) = \dfrac{z(1-e^{-8T})}{(z-1)(z-e^{-8T})}$。

【例 11-10】 开环系统结构如图 11-2 所示，图中 $G_1(s)=\dfrac{3}{5s+1}$ 与 $G_2(s)=\dfrac{1}{s+1}$，试求系统的脉冲传递函数 $G(z)$ 及当采样开关采样周期 $T=1$s 时的 $G(z)$。

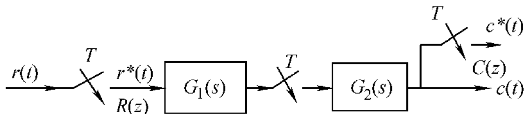


图 11-2　有零阶保持器的开环系统

解：

```
clear;syms s T; G1s = 3/(5 * s + 1);G2s = 1/(s + 1);key = 2;
```

```
[Gz] = seriz(key,G1s,G2s);Gz = subs(Gz,T,1),
```

程序运行后得到 $G(z) = \dfrac{\dfrac{3z^2}{5}}{(z - e^{-\frac{T}{5}})(z - e^{-T})}$

当 $T = 1\text{s}$ 时 $G(z) = \dfrac{\dfrac{3z^2}{5}}{(z - e^{-\frac{1}{5}})(z - e^{-1})}$。

【例 11-11】 具有零阶保持器的开环系统结构如图 11-3 所示，其零阶保持器与连续部分传递函数分别为 $G_h(s) = \dfrac{1 - e^{-Ts}}{s}$ 与 $G_p(s) = \dfrac{1}{s(s + 1)}$，采样开关的采样周期 T=1s，试求系统开环脉冲传递函数 $G(z)$。

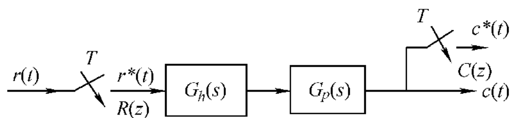


图 11-3　有零阶保持器的开环系统

解：

```
clear;num = [1];den = [1 1 0];T = 1;
key = 1;[Gz,phiz] = zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 $G(z) = \dfrac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.368z + 0.3679}$

【例 11-12】 闭环离散系统结构如图 11-4 所示，其前向通道零阶保持器 $G_h(s) = \dfrac{1 - e^{-Ts}}{s}$，采样开关的采样周期与连续部分传递函数分别为 1）T=1s、$G_p(s) = \dfrac{5}{s(s + 1)}$、2）$T$= 0.2s 与 T= 0.05s、$G_p(s) = \dfrac{5}{s(0.1s + 1)(0.05s + 1)}$、3）$T$=1s 与 T=0.1s、$G_p(s) = \dfrac{10(0.5s + 1)}{s^2}$、4）$T$=1s、$G_p(s) = \dfrac{1}{(s + 1)(s + 2)}$，试求 4 个开环与闭环系统脉冲传递函数 $G(z)$ 与 $\Phi(z)$。

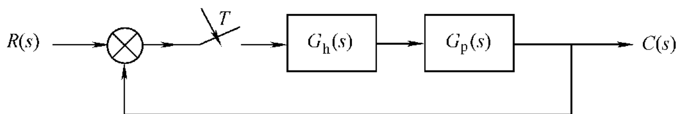


图 11-4　闭环离散系统

解： 1）$G_p(s) = \dfrac{5}{s(s + 1)}$。

```
clear;num = [5];den = [1 1 0];T = 1;
key = 2;[Gz,phiz] = zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 $T=1\text{s}$ 时 $G(z)=\dfrac{1.839z+1.321}{z^2-1.368z+0.3679}$

$$\Phi(z)=\frac{1.839z+1.321}{z^2+0.4715z+1.689}$$

2) $G_p(s)=\dfrac{5}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$。

```
clear;num=[5];den=conv([0.1 1 0],[0.05 1]);T=0.2;
key=2;[Gz,phiz]=zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 $T=0.2\text{s}$ 时 $G(z)=\dfrac{0.3808z^2+0.4482z+0.01986}{z^3-1.154z^2+0.1561z-0.002479}$

$$\Phi(z)=\frac{0.3808z^2+0.4482z+0.01986}{z^3-0.7729z^2+0.6043z+0.01738}$$

```
clear;num=[5];den=conv([0.1 1 0],[0.05 1]);T=0.05;
key=2;[Gz,phiz]=zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 $T=0.05\text{s}$ 时 $G(z)=\dfrac{0.01456z^2+0.04074z+0.006883}{z^3-1.974z^2+1.198z-0.2231}$

$$\Phi(z)=\frac{0.01456z^2+0.04074z+0.006883}{z^3-1.96z^2+1.238z-0.2162}$$

3) $G_p(s)=\dfrac{10(0.5s+1)}{s^2}$。

读者可仿上例自行编写程序算得 $T=1\text{s}$ 时 $G(z)=\dfrac{10z}{z^2-2z+1}$、$\Phi(z)=\dfrac{10z}{z^2+8z+1}$，$T=0.1\text{s}$ 时 $G(z)=\dfrac{0.55z-0.45}{z^2-2z+1}$、$\Phi(z)=\dfrac{0.55z-0.45}{z^2-1.45z+0.55}$。

4) $G_p(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

同样读者可仿上例自行编写程序算得 $T=1\text{s}$ 时 $G(z)=\dfrac{0.1998z+0.0735}{z^2-0.5032z+0.04979}$

$$\Phi(z)=\frac{0.1998z+0.0735}{z^2-0.3034z+0.1233}$$

【例 11-13】 已知离散系统状态空间方程

$$\begin{cases} x(k+1)=\begin{bmatrix}-2.8 & -1.4 & 0 & 0\\ 1.4 & 0 & 0 & 0\\ -1.8 & -0.3 & -1.4 & -0.6\\ 0 & 0 & 0.6 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(k)\end{cases},$$

试求采样周期 $T=0.4\text{s}$ 时系统传递函数模型的 ***num***、***den***、系统零极点增益模型与传递函数模型的 DSP 形式。

解：

```
clear;a=[-2.8 -1.4 0 0;1.4 0 0 0;-1.8 -0.3 -1.4 -0.6;0 0 0.6 0];
b=[1;0;1;0];c=[0 0 0 1];d=[0];
```

```
T=0.1;sys=ss(a,b,c,d,T);sys1=tf(sys);num=sys1.num{1},
den=sys1.den{1},sys2=zpk(sys),sys3=filt(num,den,T),
```

程序运行后可得传递函数模型的 ***num***、***den***、系统的零极点增益模型与传递函数模型的 DSP 形式分别为

$$\boldsymbol{num}=[0\quad 0\quad 0.6\quad 0.6\quad 0.924]$$

$$\boldsymbol{den}=[1\quad 4.2\quad 6.24\quad 3.752\quad 0.7056]$$

$$G(z)=\frac{0.6(z^2+z+1.54)}{(z+1.4)^2(z+1.061)(z+0.3394)}$$

$$G(z)=\frac{0.6z^{-2}+0.6z^{-3}+0.924z^{-4}}{1+4.2z^{-1}+6.24z^{-2}+3.752z^{-3}+0.7056z^{-4}}$$

11.4 离散系统时域分析的 MATLAB 实现

与连续系统相对应，离散系统时域分析也包含时域响应、稳定性分析与稳态误差计算等部分。《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已经对离散系统以上三部分内容作了详尽复习，本书要以示例说明其 MATLAB 实现。

11.4.1 离散系统时域响应的 MATLAB 实现

离散系统时域响应的 MATLAB 实现显然要使用程序完成。再次提请读者，要特别关注 MATLAB 符号计算与 MATLAB 函数计算的不同使用与配合使用。

【例 11-14】 一离散系统如图 11-5 所示。图中 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ 为零阶保持器，$T=1$s。线性部分的传递函数为 $G_p(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$。1）计算系统开环与闭环的脉冲传递函数；2）计算当 $G_p(s)=K\dfrac{1}{s(s+1)}$ 时使系统稳定的 K 值范围；3）计算当 $r(t)=1(t)$ 时系统输出响应 $c^*(t)$。

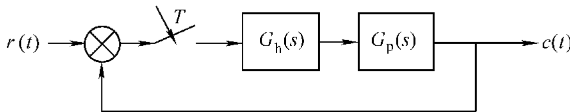


图 11-5 闭环离散系统

解：1）计算系统 $G_p(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$ 与 T=1s 开环与闭环的脉冲传递函数。

```
clear;num=[1];den=[1 1 0];T=1; key=2;[Gz,phiz]=zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 T=1s 时 $G(z)=\dfrac{0.3679z+0.2642}{z^2-1.368z+0.3679}$、$\Phi(z)=\dfrac{0.3679z+0.2642}{z^2-z+0.6321}$

2）计算 $G_p(s)=K\dfrac{1}{s(s+1)}$ 系统闭环 w 域特征方程。

```
clear;syms w z K; Dzn = K * (0.3679 * z + 0.2642);
Dzd = z^2 - 1.368 * z + 0.3679; key = 1;[Dw,Gw] = Dzw(key,Dzn,Dzd);
```

程序运行后得到系统闭环 w 域特征方程为

$$D(w) = (0.6321 * K - 0.0001)w^2 + (1.2642 - 0.5284K)w + (2.7359 - 0.1037K) = 0$$

用 Lienard－Chipard 稳定判据计算系统稳定的 K 值范围。

要系统稳定，首先，特征方程的各项系数均应大于 0，有系数 $a_0>0$、$a_1>0$、$a_2>0$。其次，因系统最高阶 $n=2$，则计算 Hurwitz 行列式中奇数阶子行列式 $D_1=a_1$ 应大于 0。

```
clear;syms a1 a2 a0 K;
a0 = 0.6321 * K - 0.0001;
[K] = solve('0.6321 * K - 0.0001 = 0');K = vpa(K,4),
a1 = 1.2642 - 0.5284 * K;
[K] = solve('1.2642 - 0.5284 * K = 0');K = vpa(K,4),
a2 = 2.7359 - 0.1037 * K;
[K] = solve('2.7359 - 0.1037 * K = 0');K = vpa(K,4),
```

程序运行后得到 $0.0001582 < (K) < 2.393$。

3）用 MATLAB 符号计算法计算 $r(t)=1(t)$ 时的系统输出响应 $c^*(t)$。

```
clear;syms z;Rz = z/(z - 1);H = 8;phiz = (0.3679 * z + 0.2642)/(z^2 - z + 0.6321);[cn] = phiRz(phiz,Rz,
H);
```

程序运行后得到

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c(nT)\cdot\delta(t-nT) \\ &= 0 + 0.3681\delta(t-T) + 1.0003\delta(t-2T) + 1.3999\delta(t-3T) \\ &\quad + 1.3999\delta(t-4T) + 1.1474\delta(t-5T) + 0.8948\delta(t-6T) \\ &\quad + 0.8019\delta(t-7T) + 0.8686\delta(t-8T) + \cdots \end{aligned}$$

【例 11-15】　续上题，1）绘制系统单位阶跃响应曲线；2）用单位阶跃响应验证开环增益 $K>2.4$ 时系统是否稳定；3）绘制系统单位斜坡响应曲线；4）绘制系统单位冲激响应曲线。

解：1）绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;num = [0.3679 0.2642]; den = [1 -1 0.6321];n = 50; dstep(num,den,n),grid;
```

程序运行后绘制出当 $K=1$ 时的单位阶跃响应曲线，如图 11-6 所示。

2）验证临界开环增益 $K>2.393$ 时，系统是否稳定。

① 取 $K=2.5$ 时计算 $\Phi(z)$。

```
clear;num = [2.5];den = [1 1 0];T = 1; key = 2;
[Gz,phiz] = zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到当 $K=2.5$ 时 $\Phi(z)=\dfrac{0.9197z+0.6606}{z^2-0.4482z+1.028}$

② 当 $K=2.5$ 时再次绘制单位阶跃响应曲线。

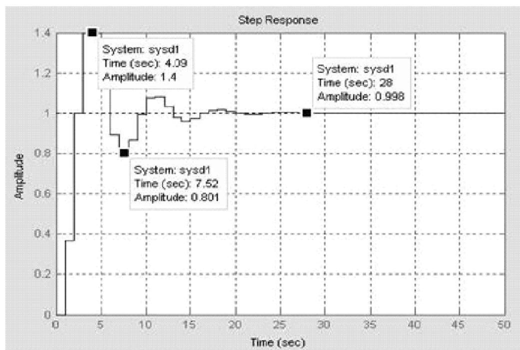


图 11-6　当 $K=1$ 时单位阶跃响应曲线

```
clear;num = [0.9197 0.6606];den = [1 -0.4482
```

```
1.028];
n=280;dstep(num,den,n),grid;
```

程序运行后绘制出当 $K=2.5$ 时的单位阶跃响应曲线，如图 11-7 所示。由曲线可知，单位阶跃响应是发散的振荡，说明当 $K>2.393$ 时系统确实不稳定。

3）绘制系统单位斜坡响应曲线。

```
clear;n=[1];d=[1 1 0];G=tf(n,d);
G1=feedback(G,1);dt=0.6;Gz=c2d(G1,dt);
[nz,dz]=tfdata(Gz,'v');
ts=0:dt:40;dlsim(nz,dz,ts);grid;
```

程序运行后绘制出当 $K=1$ 时系统单位斜坡响应曲线，如图 11-8 所示。

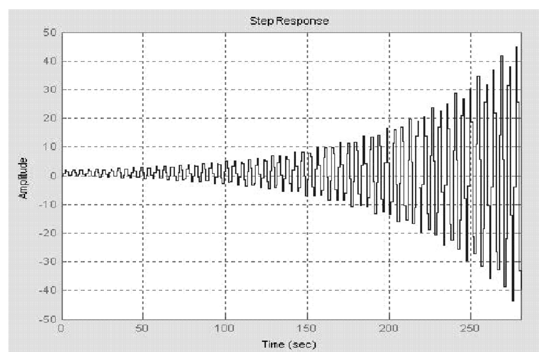


图 11-7　当 $K=2.5$ 时单位阶跃响应曲线

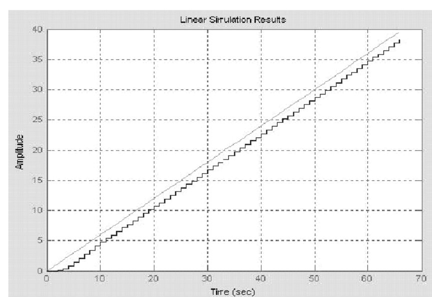


图 11-8　当 $K=1$ 时单位斜坡响应曲线

4）绘制系统单位冲激响应曲线。

```
clear;num=[0.3679 0.2642]; den=[1 -1 0.6321];
n=50;dimpulse(num,den,n),grid;
```

程序运行后绘制系统单位冲激响应曲线，如图 11-9 所示。

还可以用以下程序绘制系统单位冲激响应离散杆图，如图 11-10 所示。

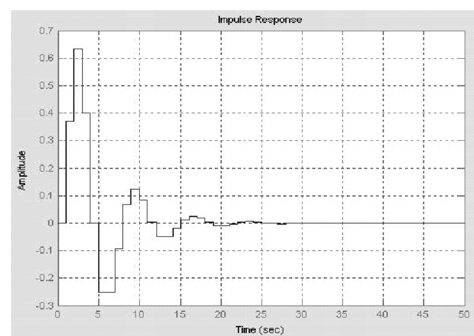


图 11-9　系统单位冲激响应曲线

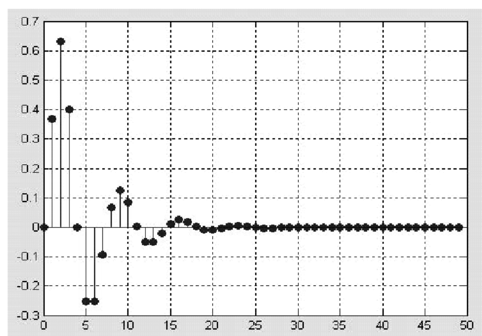


图 11-10　单位冲激响应离散杆图

```
clear;num=[0.3679 0.2642]; den=[1 -1 0.6321];n=50;t=0:1:49;
[y,x]=dimpulse(num,den,n);stem(t,y,'filled'),grid;
```

11.4.2　离散系统稳定性分析的 MATLAB 实现

有关离散系统稳定性分析稍微要麻烦点，以上示例中已有涉及。连续线性系统的稳定性分析是基于系统闭环特征根在 s 平面中的位置，若全在虚轴之左，则系统稳定。那么要在 z 平面上研究离散系统的稳定性，则要明确 s 平面与 z 平面间的对应关系，这就是从 s 平面到 z 平面的映射。根据自动控制原理，当位于 s 左半平面的点，对应于 z 平面上单位圆之内；反之，位于 s 右半平面的点，对应于 z 平面上单位圆之外。再将 z 平面映射到 w 平面，则将特征方程 $D(z)=0$ 转换为 $D(w)=0$ 之后，便可应用连续系统的稳定判据。

【例 11-16】　已知系统特征方程为 $D(z)=3z^3+3z^2+2z+1=0$，试在 w 平面用代数稳定判据判别该系统的稳定性。

解：取代换 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ 代入特征方程，得

```
clear;syms z w D Dw;z=(w+1)/(w-1); D=3*z^3+3*z^2+2*z+1;[n,d]=numden(D),Dw=n/d,
```

程序执行结果 $D(w)=(9w^3+7w^2+7w+1)/(w-1)^3=0$，取分式分子为 0，那么有

$$9w^3+7w^2+7w+1=0$$

应用连续系统的 Lienard－Chipard 稳定判据，系统稳定的必要充分条件是：特征方程的各项系数均大于 0，且 Hurwitz 行列式中奇数阶子行列式（即 D_1、D_3、D_5、…）或偶数阶子行列式（即 D_2、D_4、D_6、…）大于 0。

现特征方程式中各项系数均大于零，特征方程最高阶 $n=3$，取偶数阶即 2 阶子行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3=7\times7-1\times9=40>0$$

故离散系统稳定。

11.4.3　离散系统稳态误差计算的 MATLAB 实现

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中已复习关于离散系统稳态误差系数与稳态误差计算的公式，请看示例。

【例 11-17】　续【例 11-14】，采样开关的采样周期 $T=1\mathrm{s}$。当输入信号 $r(t)=1(t)$、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时，试计算系统的稳态误差系数与稳态误差。

解：1）重写系统 $G_{\mathrm{p}}(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$、$T=1\mathrm{s}$ 时开环与闭环的脉冲传递函数。

$$G(z)=\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-1.368z+0.3679}、\Phi(z)=\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-z+0.6321}。$$

① 闭环特征方程式 $D(z)=z^2-z+0.6321=0$。

② 求解闭环系统的特征根。

```
clear;P=[1 -1 0.6321];roots(P),
```

语句执行结果

```
ans=0.5000 + 0.6181i
    0.5000 - 0.6181i
```

③ 计算特征根的模并判稳。

```
clear;x=0.5;y=0.6181;z1=x+y*j;z2=x-y*j;
Z1=abs(z1),Z2=abs(z2),
```

计算表明，特征根有 2 个根且为复根，其模 $|z_1|=|z_2|=0.795<1$，所以闭环系统稳定。

2）计算当输入信号 $r(t)=1(t)$ 、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差。

```
clear;syms z;Gz=(0.3679*z+0.2642)/(z-1)/(z-0.3679);
T=1;[Kp,Kv,Ka,ep,ev,ea]=Kpvaz(Gz,T);
```

程序运行后得到 $K_p=\infty$ 、$e_{ssp}=0$ ；$K_v=1$ 、$e_{ssv}=1$ ；$K_a=0$ 、$e_{ssa}=\infty$ 。

【例 11-18】 已知系统结构仍如图 11-5 所示，$G_p(s)=\dfrac{10(0.5s+1)}{s^2}$ ，采样开关的采样周期 $T=0.1\text{s}$，当输入信号 $r(t)=1(t)$ 、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时，试计算系统的稳态误差系数与稳态误差。

解：1）求 $G(z)$ 与 $\Phi(z)$ 。

```
clear;num=[5 10];den=[1 0 0];T=0.1;
key=2;[Gz,phiz]=zohz(key,T,num,den);
```

程序运行结果 $G(z)=\dfrac{0.55z-0.45}{(z-1)^2}$ 、$\Phi(z)=\dfrac{0.55z-0.45}{z^2-1.45z+0.55}$

2）对闭环系统判稳。

① 求闭环特征根。

```
clear;P=[1 -1.45 0.55];roots(P),
```

语句段执行结果

```
ans=0.7250 + 0.1561i
    0.7250 - 0.1561i
```

计算数据表明，特征根中有 2 个根为复根。

② 计算复根的模。

```
clear;x=0.725;y=0.1561;z=x+y*j;Z=abs(z),
```

语句段执行结果模 $|z|=0.7416<1$，所以闭环系统是稳定的。

3）求 K_p 、K_v 、K_a 、e_{ssp} 、e_{ssv} 、e_{ssa} 。

```
clear;syms z;Gz=(0.55*z-0.45)/(z-1)/(z-1);
T=0.1;[Kp,Kv,Ka,ep,ev,ea]=Kpvaz(Gz,T);
```

程序运行后得到 $K_p=\infty$ 、$e_{ssp}=0$ ；$K_v=\infty$ 、$e_{ssv}=0$ ；$K_a=0.1$ 、$e_{ssa}=0.1$ 。

11.5　离散系统根轨迹分析的 MATLAB 实现

与连续系统一样，离散系统也可以绘制根轨迹图并用来分析参数变化对系统性能的响应。请看示例。

【例 11-19】 闭环离散系统结构如图 11-5 所示，其前向通道的零阶保持器 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ ，连续部分传递函数为 $G_p(s)=K\dfrac{1}{s(s+1)}$ ，采样开关的采样周期 $T=1\text{s}$ ，试绘制 $0\leqslant K<\infty$ 的根

轨迹图并分析取不同的 K 值对应在根轨迹上不同位置时系统的稳定性。

解：1） 写带 K 值的 $G(z)=\dfrac{K(0.368z+0.264)}{z^2-1.37z+0.368}$。

2） 求展开 $G(z)$ 的分子与分母表达式。

```
clear;syms z K n d; n=(.368*z+.264)*K,d=z^2-1.37*z+.368,
```

程序运行结果

```
n=(46/125*z+33/125)*K
d=z^2-137/100*z+46/125
```

3） 绘制 $0\leqslant K<\infty$ 时的根轨迹图

```
clear;Ts=[];G=tf([46/125 33/125],[1 -137/100 46/125],Ts);rlocus(G),
```

程序运行后绘制系统 $0\leqslant K<\infty$ 时的根轨迹图，如图 11-11 所示。再执行以下程序，一旦按 Enter 键后，在根轨迹图窗口上有纵横两条坐标线，其交点随鼠标而移动。

```
clear;Ts=1;G=tf([46/125 33/125],[1 -137/100 46/125],Ts);
rlocus(G),[k,poles]=rlocfind(G), w=imag(poles(1)),
```

① 当鼠标指在根轨迹与正横坐标交点（尽力准确）时，根轨迹如图 11-11 所示。其数据是：

```
Select a point in the graphics window
selected_point=0.6315 - 0.0047i
k=0.1982
poles=0.6649
      0.6322
w=0
```

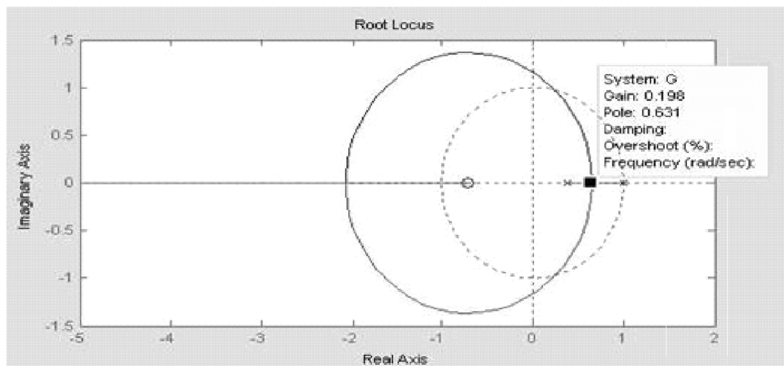


图 11-11　选点在根轨迹与正横坐标的交点

按以上操作多次执行以上程序，请读者特别关注：①以上程序中函数 tf()的输入参数 Ts 表示系统采样周期，当有 Ts 时，在根轨迹图中同时绘制单位圆，当 Ts 缺省时，在根轨迹图中不绘制单位圆。②与选择点相对应的开环增益 k、相关极点 *poles* 及其对应角频率 ω，用来观察随 ω 的增加，根轨迹曲线在复平面画出的图像。③根轨迹曲线与单位圆的相对位置关系。当根轨迹处于单位圆内或根轨迹与单位圆相交或根轨迹处于单位圆外时，其对应的开环增益大小、系统闭环稳定性能等。

② 当鼠标指在根轨迹第 1 象限与单位圆的交点时，根轨迹如图 11-12 所示。其数据是：

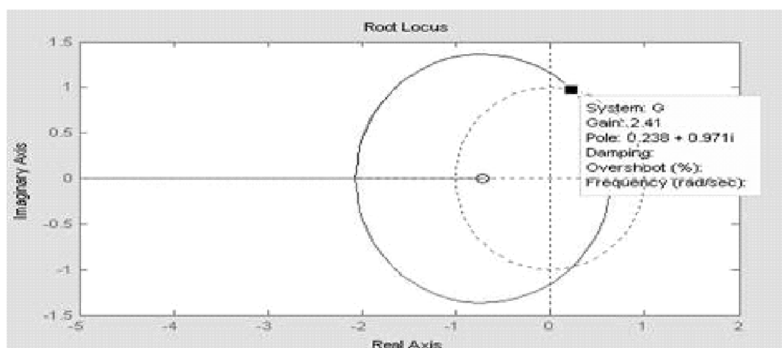


图 11-12　选点在第 1 象限根轨迹与单位圆的交点上

```
Select a point in the graphics window
selected_point = 0.2336 + 0.9628i
k = 2.4057
poles = 0.2424 + 0.9718i
        0.2424 - 0.9718i
w = 0.9718
```

由数据可知，此时开环增益 $k = 2.4057$，正好是第 1 象限根轨迹与单位圆的交点，系统闭环临界稳定（参见例 11-14）；根轨迹在单位圆内时，系统闭环稳定；根轨迹在单位圆外时，系统闭环就会不稳定。

③ 将鼠标指在根轨迹与纵坐标的交点(尽力准确)时，根轨迹如图 11-13 所示。其数据是：

```
Select a point in the graphics window
selected_point = 0.0012 + 1.1599i
k = 3.7125
poles = 0.0019 + 1.1611i
        0.0019 - 1.1611i
w = 1.1611
```

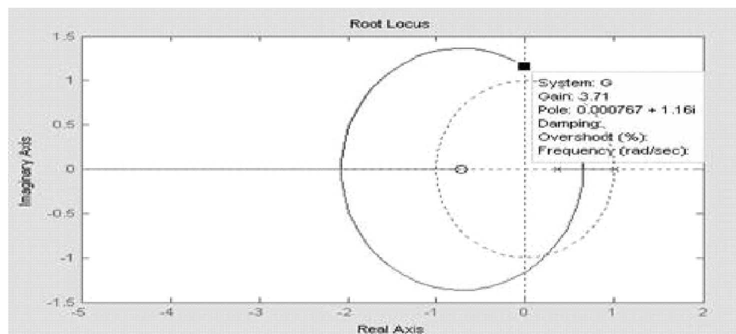


图 11-13　选点在根轨迹与纵坐标的交点

由 $k = 3.7125$ 值可知，系统闭环不稳定。

④ 当鼠标指在根轨迹的第 2 象限时，根轨迹如图 11-14 所示。其数据是：

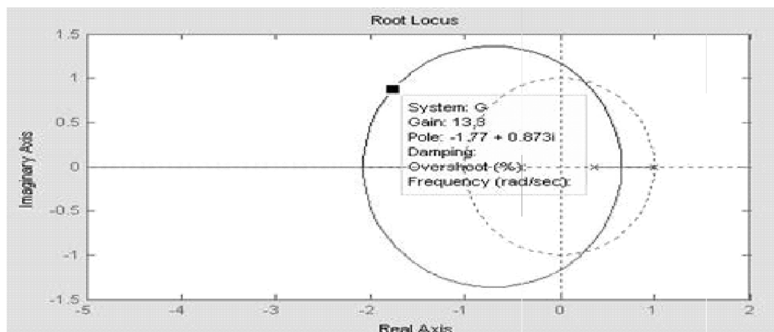


图 11-14　选点在第 2 象限根轨迹上

Select a point in the graphics window

selected_point = −1.7737 + 0.8711i

k = 13.3485

poles = −1.7711 + 0.8690i

　　−1.7711 − 0.8690i

w = 0.8690

由 $k = 13.3485$ 值可知，系统闭环不稳定。

⑤ 当鼠标指在根轨迹与负横坐标的交点(尽力准确)时，根轨迹如图 11-15 所示。其数据是：

Select a point in the graphics window

selected_point = −2.0889 − 0.0047i

k = 15.0447

poles = −2.0864

　　−2.0800

w = 0

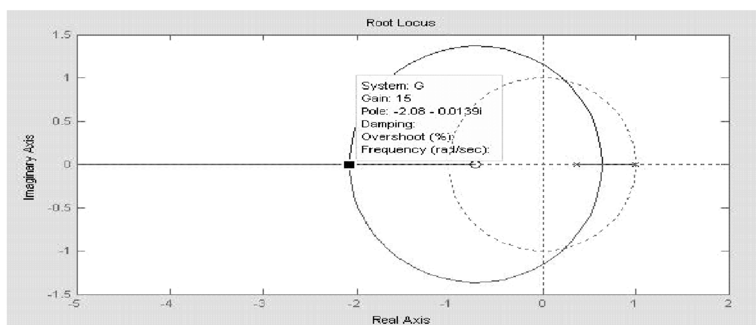


图 11-15　选点在根轨迹与负横坐标的交点

由 $k = 15.0447$ 值可知，系统闭环不稳定。

11.6　离散系统动态性能分析的 MATLAB 实现再举例

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》在连续系统的 MATLAB 计算与仿真部分对离散系统

的 MATLAB 函数命令已一并作了介绍。以上多个示例中已经涉及离散系统动态性能分析。在此，就离散系统动态性能分析的 MATLAB 实现再举例。

【例 11-20】 一离散系统如图 11-5 所示。图中 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ 为零阶保持器，线性部分的传递函数为 $G_p(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，$T=0.25s$。1）计算系统开环与闭环的脉冲传递函数 $G(z)$、$\Phi(z)$；2）计算当 $G_p(s)=K\dfrac{1}{s(s+1)}$ 时使系统稳定的 K 值范围；3）计算当输入信号 $r(t)=1(t)$、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\dfrac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差；4）根据 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$ 绘制系统 Bode 图并求频域性能指标；5）根据 $T=0.25s$ 时 $G(z)$ 绘制负反馈闭环系统阶跃响应曲线；6）计算当 $r(t)=1(t)$ 时系统输出响应 $c^*(t)$。

解：1）计算系统 $G_p(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，$T=0.25s$ 时脉冲传递函数 $G(z)$、$\Phi(z)$。

```
clear;num=[1];den=[1 1 0];T=0.25;
key=2;[Gz,phiz]=zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 $T=0.25s$ 时 $G(z)=\dfrac{0.0288z+0.0265}{z^2-1.779z+0.7788}$

$$\Phi(z)=\frac{0.0288z+0.0265}{z^2-1.75z+0.8053}$$

2）计算系统稳定时 K 的取值范围。

① 再次写出系统开环脉冲传递函数 $G(z)=\dfrac{0.0288z+0.0265}{z^2-1.779z+0.7788}$。

② 考虑系数 K 后得到 $G(z)=\dfrac{K(0.0288z+0.0265)}{z^2-1.779z+0.7788}$。

③ 用符号计算法求 w 变换后的闭环特征方程 $D(w)=0$。

```
clear;syms w z K;Dzn=K*(0.0288*z+0.0265);
Dzd=z^2-1.779*z+0.7788;key=1;[Dw,Gw]=Dzw(key,Dzn,Dzd);
```

程序运行后得到

$$D(w)=(0.0553*K-0.0002)w^2+(0.4424-0.053K)w+(3.5578-0.0023K)=0$$

④ 应用 Lienard－Chipard 稳定判据，系统稳定的必要充分条件是：特征方程的各项系数均大于 0，即 $a_0>0$、$a_1>0$、$a_2>0$、$D_1=a_1>0$，那么有

$a_0=0.0553K-0.0002>0$　　$K>\dfrac{0.0002}{0.0553}=0.0036$

$a_1=0.4424-0.053K>0$　　$K<\dfrac{0.4424}{0.053}=8.3472$

$a_2=3.5578-0.0023K>0$　　$K<\dfrac{3.5578}{0.0023}=1546.9$

取 $0.0036<K<8.3472$

3）计算当输入信号 $r(t)=1(t)$、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\dfrac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差。

```
clear;syms z;Gz=(0.0288*z+0.0265)/(z-1)/(z-0.7788);
```

```
T=0.25;[Kp,Kv,Ka,ep,ev,ea]=Kpvaz(Gz,T);
```

程序运行后得到 $K_p=\infty$ 、$e_{ssp}=0$ ；$K_v=\frac{1}{4}$ 、$e_{ssv}=1$ ；$K_a=0$ 、$e_{ssa}=\infty$ 。

4）根据 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$ 绘制系统 Bode 图并求频域性能指标。

① 取双线性变换 $z=\frac{1+w}{1-w}$ 计算 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$ 。

```
clear;syms w z K;Dzn=0.0288*z+0.0265;;
Dzd=z^2-1.779*z+0.7788;key=2;[Dw,Gw]=Dzw(key,Dzn,Dzd);
```

程序运行后得到

$$G(w)=\frac{-0.5(w-1)(23w+553)}{17789w^2+2212w-1}$$

② 根据 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$ 绘制系统 Bode 图并求频域性能指标。

```
clear;n=conv([-0.5 0.5],[23 553]); d=[17789 2212 -1];
Gw=tf(n,d);w=logspace(-3,3);margin(Gw);
```

程序运行后绘制 Bode 图，如图 11-16 所示，程序运行后还计算得到：

幅值裕度 G_m 即 $L_h=18.4\text{dB}$　　　$-\pi$ 穿越频率 ω_{cg} 即 $\omega_g=0.361\text{rad/s}$

相角稳定裕度 P_m 即 $\gamma=46.1°$　　　剪切频率 ω_{cp} 即 $\omega_c=0.0983\text{rad/s}$

这些频域性能指标说明系统不仅稳定，而且频域性能已满足一般要求。

5）根据 $T=0.25\text{s}$ 时 $G(z)$ 绘制负反馈闭环系统阶跃响应曲线。

```
clear;T=0.25;t=0:0.25:20;
s1=tf([0.0288,0.0265],[1,-1.7788,0.7788],T);
sys=feedback(s1,1);step(sys,t);grid;
```

程序运行后绘制负反馈闭环系统阶跃响应曲线，如图 11-17 所示。

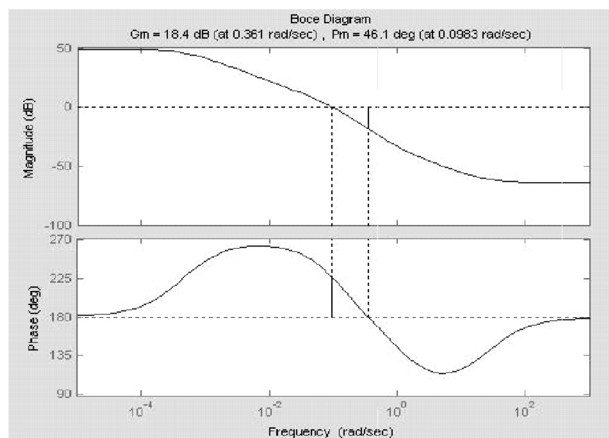


图 11-16　系统 Bode 图

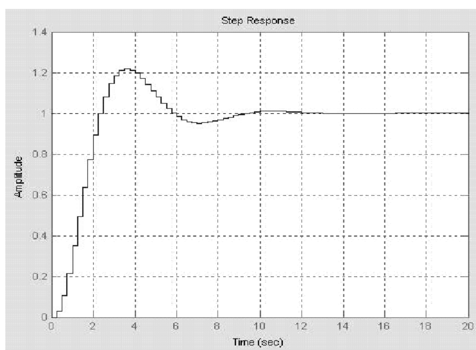


图 11-17　负反馈闭环系统阶跃响应曲线

6）用 MATLAB 符号计算法计算 $r(t)=1(t)$ 时的系统输出响应 $c^*(t)$ 。

```
clear;syms z;Rz=z/(z-1);N=8;
phiz=(0.0288*z+0.0265)/(z^2-1.75*z+0.8053);
[cn]=phiRz(phiz,Rz,N);
```

程序运行后得到

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c(nT) \cdot \delta(t-nT)\Big|_{T=0.25s} \\ &= 0 + 0.0288\delta(t-T) + 0.1057\delta(t-2T) + 0.2171\delta(t-3T) \\ &\quad + 0.3501\delta(t-4T) + 0.4931\delta(t-5T) + 0.6363\delta(t-6T) \\ &\quad + 0.7717\delta(t-7T) + 0.8934\delta(t-8T) + \cdots \end{aligned}$$

【例 11-21】 已知采样系统开环传递函数 $G(z) = 1.57\dfrac{0.792z}{(z-1)(z-0.208)}$，1）试绘制采样系统的 Nyquist 图并判稳；2）试绘制系统的 Bode 图并判稳。

解：1）试绘制采样系统的 Nyquist 图并判稳。

① 取线性代换 $z = \dfrac{1+w}{1-w}$，求 w 域的开环脉冲传递函数 $G(w)$。

```
clear;syms w z K; Dzn=1.57*0.792*z;;
Dzd=(z-1)*(z-0.208);key=2;[Dw,Gw]=Dzw(key,Dzn,Dzd);
```

程序运行后得到 $G(w) = \dfrac{-15543(w^2-1)}{200w(151w+99)}$

② 绘制采样系统的 Nyquist 图并判稳。

```
clear;n=[-15543/200 0 15543/200];
d=[151 99 0];sys=tf(n,d); nyquist(sys),
```

程序运行后绘制系统 Nyquist 图，如图 11-18 所示。根据 Nyquist 稳定判据，Nyquist 曲线不包围（-1,j0）点，所以系统闭环稳定。

2）试绘制系统的 Bode 图并判稳。

```
clear;n=[-15543/200 0 15543/200];
d=[151 99 0];sys=tf(n,d); margin(sys),grid;
```

程序运行后绘制 Bode 图，如图 11-19 所示，程序运行后还计算得到

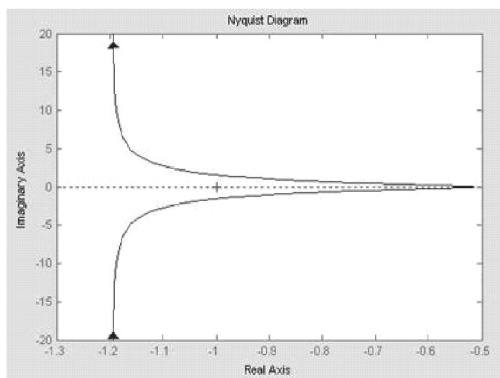


图 11-18　采样系统 Nyquist 图

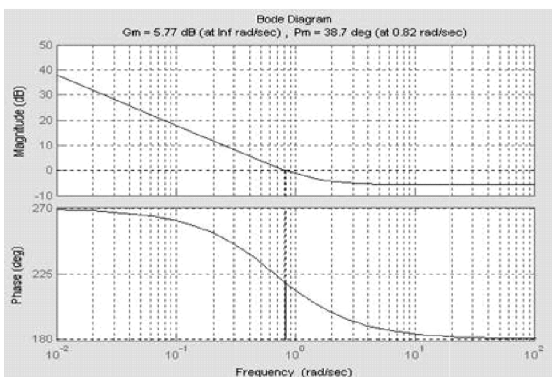


图 11-19　系统 Bode 图

幅值裕度 G_m 即 $L_h = 5.77\text{dB}$　　　$-\pi$ 穿越频率 ω_{cg} 即 $\omega_g = \infty$ rad/s

相角稳定裕度 P_m 即 $\gamma = 38.7°$　　　剪切频率 ω_{cp} 即 $\omega_c = 0.82$rad/s

这些频域性能指标说明系统不仅稳定（与 Nyquist 判据判稳结论一致），而且频域性能

已满足一般要求。

11.7　线性离散系统数字校正的 MATLAB 实现

数字控制系统是以数字计算机为控制器、控制具有连续工作状态的被控对象的闭环控制系统。离散系统的采样概念、z 变换方法便是其理论基础。本节要介绍数字控制器与最少拍系统脉冲传递函数及其离散系统数字校正的 MATLAB 实现等内容。

11.7.1　数字控制器的脉冲传递函数

在图 11-20 所示线性离散系统中，若反馈通道传递函数 $H(s)=1$，包括保持器在内的连续部分传递函数 $G(s)$ 的 z 变换 $G(z)$，则单位负反馈线性离散系统的闭环脉冲传递函数与闭环误差脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} \tag{11-1}$$

$$\Phi_{\mathrm{er}}(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+D(z)G(z)} \tag{11-2}$$

式中，$D(z)$ 为数字控制器的脉冲传递函数。

将 $\Phi(z)$，即式(11-1)作等效变换

$$D(z)G(z)=\Phi(z)+\Phi(z)D(z)G(z)\Rightarrow D(z)G(z)-\Phi(z)D(z)G(z)=\Phi(z)$$

则有

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)[1-\Phi(z)]} \tag{11-3}$$

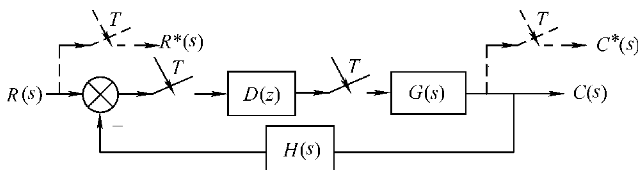


图 11-20　线性离散系统

将 $\Phi_{\mathrm{er}}(z)$，即式(11-2)作等效变换

$$\Phi_{\mathrm{er}}(z)[1+D(z)G(z)]=1\Rightarrow 1-\Phi_{\mathrm{er}}(z)=\Phi_{\mathrm{er}}(z)D(z)G(z)$$

则有

$$D(z)=\frac{1-\Phi_{\mathrm{er}}(z)}{G(z)\Phi_{\mathrm{er}}(z)} \tag{11-4}$$

根据线性离散系统的连续部分脉冲传递函数 $G(z)$ 与闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 即式(11-1) 或 $\Phi_{\mathrm{er}}(z)$ 即式 (11-2)，可由式(11-3)、式(11-4)确定数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$。在此，对系统控制性能的要求，由闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 或 $\Phi_{\mathrm{er}}(z)$ 来反映。

11.7.2　最少拍系统的设计

采样过程称一个采样周期为一拍。在典型输入作用下，能以有限拍结束响应过程，且在采样时刻上无稳态误差的离散系统叫做最少拍系统。

自动控制原理课程中已经学习过，最少拍系统是针对典型输入作用进行设计的。现将最

少拍系统设计结论列于表 11-1。

表 11-1 最少拍系统设计结论

$r(t)$	$R(s)$	$\Phi_{er}(z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	t_s
$1(t)$	$\dfrac{1}{1+z^{-1}}$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})G(z)}$	T
t	$\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$\dfrac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2G(z)}$	$2T$
$t^2/2$	$\dfrac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$\dfrac{z^{-1}(3-3z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^3G(z)}$	$3T$

11.7.3 离散系统数字校正的 MATLAB 实现

离散系统数字校正通常是按最少拍系统的要求，针对典型输入作用对系统设计数字校正装置的。表 11-1 中已有现成公式。在作者开发的函数中重新进行计算并与表 11-1 中公式比较，两者同时给出，当两者一致时说明计算准确无误。

【例 11-22】 已知闭环离散系统如图 11-5 所示。带零阶保持器 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ 的线性部分传递函数 $G_p(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，采样周期 $T=1s$。试计算系统的数字校正装置脉冲传递函数 $D(z)$、闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$、闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{er}(z)$ 与调整时间 t_s 使得系统在单位阶跃输入信号作用下调节时间最短，并且在采样时刻没有稳态误差。

解： 1）再次写出 $T=1s$ 系统开环脉冲传递函数 $G(z)=\dfrac{0.3679z+0.2642}{z^2-1.368z+0.3679}$。

2）计算系统 $D(z)$、$\Phi(z)$、$\Phi_{er}(z)$、t_s。

```
clear;syms z;T=1;Gz=(0.3679*z+0.2642)/(z-1)/(z-0.3679);
key=1;[Dz,phiz,phiz1,phiez,phiez1,ts]=leastbeat(key,Gz,T);
```

程序运行后得到数字校正装置的脉冲传递函数 $D(z)=\dfrac{10000z-3679}{3679z+2642}$、系统闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)=\dfrac{1}{z}$、系统闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{er}(z)=\dfrac{z-1}{z}$、调整时间 $t_s=1s$。

【例 11-23】 已知闭环离散系统如图 11-5 所示。带零阶保持器 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ 的线性部分传递函数 $G_p(s)=\dfrac{1}{s^2}$，采样周期 $T=1s$。1）试计算系统的数字校正装置脉冲传递函数 $D(z)$、闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$、闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{er}(z)$ 与调整时间 t_s 使得系统在单位斜坡输入信号作用下调节时间最短，并且在采样时刻没有稳态误差。2）若在单位加速度输入信号作用下呢？

解： 1）计算系统开环脉冲传递函数 $G(z)$。

```
clear;num=[1];den=[1 0 0];T=1;
key=1;[Gz,phiz]=zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 $T=1\text{s}$ 时 $G(z)=\dfrac{z+1}{2(z-1)^2}$。

2）在单位斜坡输入信号作用下计算系统 $D(z)$、$\Phi(z)$、$\Phi_{er}(z)$、t_s。

```
clear;syms z;T=1;Gz=(z+1)/2/(z-1)/(z-1);key=2;
[Dz,phiz,phiz1,phiez,phiez1,ts]=leastbeat(key,Gz,T);
```

程序运行后得到数字校正装置的脉冲传递函数 $D(z)=\dfrac{4z-2}{z+1}$、系统闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)=\dfrac{2z-1}{z^2}$、系统闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{er}(z)=\dfrac{(z-1)^2}{z^2}$、调整时间 $t_s=2\text{s}$。

3）在单位加速度输入信号作用下计算系统 $D(z)$、$\Phi(z)$、$\Phi_{er}(z)$、t_s。

```
clear;syms z;T=1;Gz=(z+1)/2/(z-1)/(z-1);key=3;
[Dz,phiz,phiz1,phiez,phiez1,ts]=leastbeat(key,Gz,T);
```

程序运行后得到数字校正装置的脉冲传递函数 $D(z)=\dfrac{6z^2-6z+2}{z^2-1}$、系统闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)=\dfrac{3z^2-3z+1}{z^3}$、系统闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{er}(z)=\dfrac{(z-1)^3}{z^3}$、调整时间 $t_s=3\text{s}$。

习　　题

【11-1】　试计算函数（1）$f(t)=t^2\cdot 1(t)$、（2）$f(t)=\cos(\omega t)$ 的 z 变换 $F(z)$。

【11-2】　试对函数的采样值 $f(t)=a^t\cos(\pi t)$，试计算当 $T\neq 1$ 与 $T=1$ 其 z 变换 $F(z)$。

【11-3】　试对函数（1）$f(t)=\mathrm{e}^{-at}$、（2）正弦函数 $f(t)=\sin\omega t$，求其 z 变换 $F(z)$。

【11-4】　试计算 $F(z)=\dfrac{z}{z+\mathrm{e}^{-aT}}$ 的 z 反变换 $f(nT)$，当 $T=1$ 时，再求其 z 反变换 $f(n)$。

【11-5】　对 $F(z)=a\dfrac{z}{z-c}$，试求其 z 反变换 $f(n)$。当 $a=1$ 与 $c=2$ 时，求 $f(n)$。

【11-6】　试确定函数（1）$E(z)=\dfrac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)}$、（2）$E(z)=\dfrac{z^2(z^2+z+1)}{(z^2+z+0.8)(z^2-0.8z+1)}$ 的初值与终值。

【11-7】　用 z 变换法解二阶前向差分方程 $a_1\cdot c(n+2)+a_2\cdot c(n+1)+a_3\cdot c(n)=r$，已知 $a_1=1$，$a_2=-6$，$a_3=8$，$r=1$，初始条件：$c(1)=0$，$c(0)=0$，求响应 $c(n)$。

【11-8】　开环离散系统如图 11-1 所示，其连续部分传递函数为 $G(s)=\dfrac{a(s+b)}{s(s+a)}$，试求该开环离散系统的脉冲传递函数 $G(z)$。

【11-9】　开环系统结构如图 11-2 所示，图中 $G_1(s)=\dfrac{10}{s(s+2)}$ 与 $G_2(s)=\dfrac{1}{s+1}$，试求系统的脉冲传递函数 $G(z)$。

【11-10】　闭环离散系统结构如图 11-4 所示，其零阶保持器 $G_h(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}$，连续部分传递函数为 $G_p(s)=\dfrac{4}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$，采样周期分别为 $T=0.1\text{s}$、$T=0.2\text{s}$，试求开环与闭环系统脉冲传递函数 $G(z)$ 与 $\Phi(z)$。

【11-11】　已知二阶离散系统 z 变换传递函数为 $\Phi(z)=\dfrac{1.6z^2-5.8z+3.9}{z^2-0.7z+2.4}$，试求采样周期 $T=1\text{s}$ 时系统传递函数模型的 DSP 形式与零极点增益模型。

【11-12】 已知离散系统状态空间方程为 $\begin{cases} x(k+1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}u(k) \\ y(k)=[1\ 1\ 2]x(k) \end{cases}$

试求采样周期 $T=0.4$s 时系统传递函数模型的 ***num***、***den***、系统的零极点增益模型与传递函数模型的 DSP 形式。

【11-13】 已知闭环离散系统如图 11-5 所示。图中零阶保持器 $G_{\mathrm{h}}(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}$，线性部分传递函数 $G_{\mathrm{p}}(s)=\dfrac{K}{s(s+2)}$，$T=1$s 。(1) 试分析当 $K=8$ 时闭环系统是否稳定；(2) 试计算系统稳定时 K 的取值范围。

【11-14】 已知系统结构如图 11-5 所示，$G_{\mathrm{h}}(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}$ 与 $G_{\mathrm{p}}(s)=\dfrac{0.5\mathrm{e}^{-s}}{s(s+1)}$，采样周期 $T=1$ s，当输入信号 $r(t)=1(t)$ 、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\dfrac{1}{2}t^2$ 时，试计算系统的稳态误差系数与稳态误差。

【11-15】 已知闭环离散系统如图 11-5 所示。带零阶保持器 $G_{\mathrm{h}}(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}$ 的线性部分传递函数 $G_{\mathrm{p}}(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$，采样周期 $T=1$s 。(1) 试计算系统的数字校正装置脉冲传递函数 $D(z)$ 、闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 、闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{\mathrm{er}}(z)$ 与调整时间 t_{s} 使得系统在单位阶跃输入信号作用下调节时间最短，并且在采样时刻没有稳态误差。(2) 若在单位斜坡输入信号作用下呢？(3) 还有在单位加速度输入信号作用下呢？

第 12 章　连续线性控制系统校正设计的 MATLAB 实现

有关自动控制系统校正设计的基本知识已在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中介绍过，已知系统结构与参数计算其性能指标并对系统仿真，是系统分析问题。控制系统设计是与系统分析相反的问题：给定系统性能指标与对象，设计能够完成特定任务的控制器。显然，与系统分析不同，设计控制器的答案不是唯一的。

在阅读本章例题时，特别提请读者需要仔细阅读例题中的程序以及其中应用的函数，有时也需要复习《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中的相关内容。为简化设计工作，提高设计效率，特别推荐作者编写的 MATLAB 函数。这些函数有 sitoga. m、gatosi. m、tstoom. m、chec. m、leadc. m、lagc. m、rtloc. m、rlagc. m、kttau. m、zn01. m、cc01. m、inmin01. m、zn02. m。

需要指出的是，控制系统校正设计中大多采用有源校正，即采用集成运算放大器带不同反馈连接构成各种功能类型的校正器，这些校正器是有源网络。

根据自动控制理论，控制系统校正设计一般都要检查未校正系统频域与时域性能指标不满足要求的情况。经系统校正设计后，也要校核系统频域与时域性能指标数据是否满足要求。所以系统校正前后，都毫无例外地要绘制 Bode 图与阶跃给定响应曲线。

12. 1　控制系统校正设计几个问题的说明

1. 关于系统被控对象传递函数的开环放大系数

根据不同参考文献收集不同实际工程问题的资料，已知条件可以是其被控对象开环放大系数 K_0，也可是需由满足系统稳态性能指标要求计算出系统的开环放大系数为 K_p 或 K_v 或 K_a，而在题目中常写为 K。对于 0 型系统，$K=K_p$；对于Ⅰ型系统，$K=K_v$；对于Ⅱ型系统，$K=K_a$。若设计的校正补偿器开环放大系数为 K_c，那么三者间的关系是 $K_p=K_0K_c$ 或 $K_v=K_0K_c$ 或 $K_a=K_0K_c$。《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中，例题已知条件为后者。当需要设计校正调节器的实际参数时，被控对象的开环放大系数必须与调节器的放大系数分开，以便进行参数计算。本书中会出现第一种情况。

2. 关于自动控制系统校正应满足的稳态性能指标

大体上有两种情况：一是已知系统在某种典型信号作用下的稳态误差系数，二是已知系统在某种典型信号作用下的稳态误差 e_{ss}，在已知系统传递函数或系统型别时，很容易从系统在某种典型信号作用下的稳态误差 e_{ss} 换算出稳态误差系数，从而确定系统稳态性能指标要求的开环放大系数。

3. 关于系统校正应满足的动态性能指标要求

大体上也有两种情况：一是已知系统的频域性能指标，如系统校正后剪切频率 ω_c 或相角稳定裕度 γ，这两个指标直接用于校正器设计；二是已知系统时域性能指标，如系统校正后超调量 $\sigma\%$ 或调节时间 t_s。在已知系统传递函数或系统型别时，根据自动控制理论，有以下关系式将频域指标与时域指标两者联系起来：

$$\sigma\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \tag{12-1}$$

$$M_r = \frac{1}{\sin\gamma}, \sin\gamma = \frac{1}{M_r} \tag{12-2}$$

$$\omega_b \geqslant 1.6\omega_c \tag{12-3}$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]\text{s} \tag{12-4}$$

根据以上几个关系式，即由 $\sigma\%$ 算出 M_r，再由 M_r 算出 γ；由 M_r 与 t_s 算出 ω_c。作者编制了两个函数 sitoga. m 与 tstoom. m（参见附录 B）来求解以上两个问题。系统超调量 $\sigma\%$ 与其对应相角稳定裕度 γ 之间有一定的相关关系。请看以下示例。

【例 12-1】 若系统超调量从 $\sigma\% = 10\%$ 按 10% 递增至 80%，求这些超调量对应的系统相角稳定裕度 γ，并用自编函数 gatosi. m 来验算。

解：1）用以下 MATLAB 程序求解。

```
clear;sigma=[0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8];
for i=1:length(sigma)
  [gama]=sitoga(sigma(i));
end
```

将程序运行结果列成表 12-1。

表 12-1　系统超调量与其超调量间的关系

$\sigma\%$	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%
γ	65.4°	47.8°	38.7°	32.7°	28.4°	25.2°	22.6°

从表 12-1 所示的数据可以看出，系统的超调量越小，则系统的相角稳定裕度越大；也可以是系统的相角稳定裕度越大，那么系统的超调量越小。反之亦然。

2）对表 12-1 所示部分数据运行调用自编函数 gatosi. m 的程序来验算。

```
clear;gama=[65.4,47.8,38.7,32.7];
for i=1:length(gama)
  [sigma]=gatosi(gama(i));
end
```

程序运算后的数据说明自编函数 sitoga. m、gatosi. m 计算正确、有效。读者可自行验算其他数据。

在系统超调量 $\sigma\%$ 一定的情况下，系统调节时间与其对应的系统剪切频率 ω_c 之间也有一定的相关关系。请看下例。

【例 12-2】 若系统的超调量 $\sigma\%=20\%$，而调节时间从 $t_s=0.1$s 至 $t_s=0.8$s，试用自编函数 tstoom. m 计算这个超调量与调节时间对应的系统剪切频率 ω_c。

解：用以下 MATLAB 程序求解。

```
clear;sigma=0.20;ts=[0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8];
for i=1:length(ts)
  [omegac]=tstoom(sigma,ts(i));
end
```

将程序运行结果列成表 12-2。

表 12-2　系统 $\sigma\%=20\%$ 时调节时间 t_s 与其剪切频率 ω_c 间的关系

t_s	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
ω_c	68.33	34.16	22.78	17.08	13.67	11.39	9.76	8.54

从表 12-2 所示的数据可以看出，系统超调量不变（$\sigma\%=28\%$）时，系统调节时间越短，则要求系统剪切频率 ω_c 越大；也就是若系统剪切频率间 ω_c 越大，则系统调节时间就越短。反之亦然。

4. 关于超前校正、滞后校正的选择

若题目要求的剪切频率比未校正原系统剪切频率高，选用超前校正；反之，选用滞后校正。

12.2　控制系统 Bode 图校正设计的 MATLAB 实现

Bode 图滞后校正设计是控制系统校正设计最直观、最简单的基本方法。

12.2.1　控制系统 Bode 图常规设计法超前校正设计的 MATLAB 实现

控制系统 Bode 图超前校正常规设计法是最基本的设计方法，自编函数 leadc.m 就是为此开发的。请看示例。

【例 12-3】　已知单位负反馈系统被控对象传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(0.2s+1)}$，试用 Bode 图设计方法对系统进行超前串联校正设计，使系统校正后满足：①在单位速度信号下的 $K_v=50\mathrm{rad/s^2}$；②$\gamma\geqslant40°$；③$\omega_c\geqslant20\mathrm{rad/s}$；④$\sigma\%\leqslant28\%$。

解：1）求满足稳态误差要求的系统开环增益 K。根据自动控制理论与题意，本题给定系统为 Ⅰ 型，速度误差系数 $K_v=K$，系统的开环增益 $K=K_v=50\mathrm{rad/s^2}$。

2）检查原系统是否满足题目要求。

```
clear;K=50;n1=1;d1=conv([1 0],[0.2 1]);
s1=tf(K*n1,d1);s2=[];key=1;chec(key,s1,s2);
```

再次提醒，chec.m 中有暂停函数 pause，需按下任意键显示两图。程序运行后，可得未校正系统的 Bode 图如图 12-1 所示，还有如图 12-2 所示的未校正系统阶跃响应曲线。由图 12-1 可知：

幅值稳定裕度：$L_h=\infty\ \mathrm{dB}$　　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=\infty\ \mathrm{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma=18°$　　　剪切频率：$\omega_c=15.4\mathrm{rad/s}$

其中相角稳定裕度 $\gamma=18°<40°$，剪切频率 $\omega_c=15.4\mathrm{rad/s}<20\mathrm{rad/s}$。这都不满足题目的要求。从图 12-2 可以看到系统阶跃响应超调量 $\sigma\%>60\%$，系统必须校正。

3）根据 $\gamma\geqslant40°$，选择 $\gamma=50°$、$\omega_c=20\mathrm{rad/s}$，计算超前校正器传递函数。

```
clear;K=50;n1=1;d1=conv([1 0],[0.2 1]);
sope=tf(K*n1,d1);vars(1)=50;vars(2)=20;gama0=18;c1=6;c2=18;
[Gc]=leadc(3,sope,vars,gama0,c1,c2);
```

程序运行后得到超前串联校正器传递函数 $G_c(s)=\dfrac{0.0715s+1}{0.01729s+1}$。

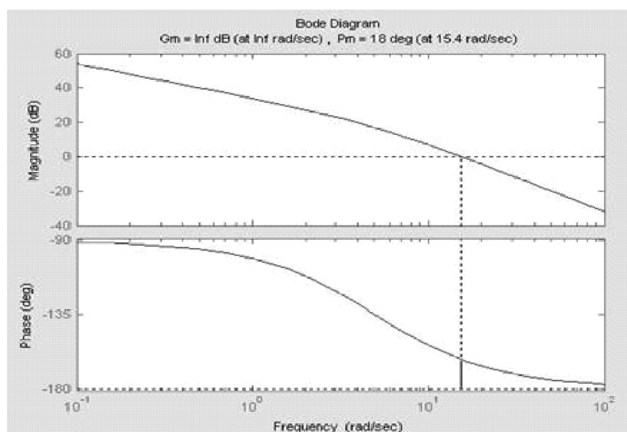


图 12-1　未校正系统的 Bode 图

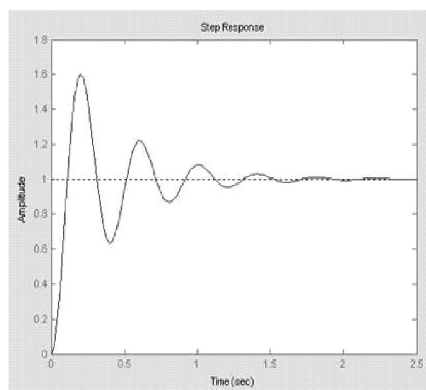


图 12-2　未校正系统的阶跃响应曲线

4）校验校正后系统性能是否满足题目要求。

```
clear;K = 50;n1 = 1;d1 = conv([1 0],[0.2 1]);s1 = tf(K * n1,d1);
n2 = [0.0715 1];d2 = [0.01729 1];s2 = tf(n2,d2);key = 2;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后得到校正后系统的 Bode 图如图 12-3 所示，还有如图 12-4 所示的系统阶跃响应曲线。由图 12-3 可知系统频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_h = \infty$ dB　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = \infty$ rad/s

相角稳定裕度：$\gamma = 50°$　　剪切频率：$\omega_c = 20$rad/s

看到校正后系统剪切频率 $\omega_c = 20$rad/s、$\gamma = 50° \geqslant 40°$，已满足要求。从图 12-4 也看到 $\sigma\% = 22.6172\% < 28\%$，即也满足要求。

由以上数据看到，校正后系统剪切频率增大，稳定裕度提高，超调量减小，这正是超前校正的功能所在。

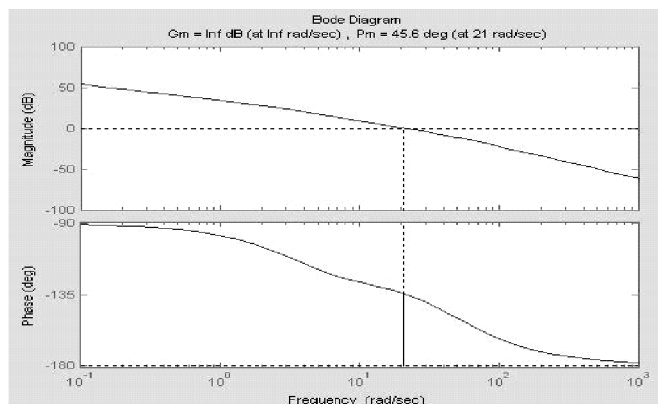


图 12-3　校正后系统 Bode 图

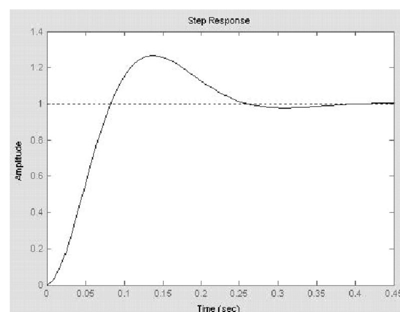


图 12-4　校正后系统阶跃响应曲线

12.2.2　控制系统 Bode 图常规设计法滞后校正设计的 MATLAB 实现

控制系统 Bode 图滞后校正也是校正设计最基本的设计方法，作者也为此开发了自编函数 lagc.m，请看示例。

【例 12-4】 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{K_0}{s(0.5s+1)(0.166s+1)}$，式中 $K_0=2\text{rad/s}$。系统额定转速为 35r/min，输出角度误差 $e_{ss}(\infty)=3°$。1）试用 Bode 图设计方法对系统进行串联滞后校正设计，使之满足校正后的相角裕度 $\gamma\geqslant45°$；2）对校正补偿器进行有源网络实现的参数计算。

解：1）系统稳态性能指标计算。

本题给定系统为Ⅰ型，系统在匀速信号作用下稳态误差为常值，那么，满足系统稳态性能指标要求的系统开环放大系数为

$$K_v=\frac{\text{输出额定转速}}{\text{允许的角度误差}}=\frac{35\times360°/60\text{s}^{-1}}{3°}=70\text{s}^{-1}=K$$

根据自动控制理论与题意，则校正环节要求的放大系数为 $K_c=\dfrac{K}{K_0}=\dfrac{70}{2}=35$，则满足稳态性能指标要求的系统开环传递函数为 $G_0(s)=70\dfrac{1}{s(0.5s+1)(0.166s+1)}$。

2）作原系统的 Bode 图与阶跃响应曲线，检查是否满足要求。

```
clear; K=70;n1=1;d1=conv(conv([1 0],[0.5 1]),[0.166 1]);
s1=tf(K*n1,d1);s2=[];key=1;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后得到未校正系统 Bode 图如图 12-5 所示，还有如图 12-6 所示的未校正系统阶跃响应曲线。由图 12-5 可知未校正系统的频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_h=-18.8\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=3.47\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma=-42.7°$　　剪切频率：$\omega_c=8.78\text{rad/s}$

由计算的相角稳定裕量与模稳定裕量均为负值可知，这样的系统根本不能工作。这也可从图 12-6 看到阶跃响应曲线为发散的振荡，故系统必须校正。

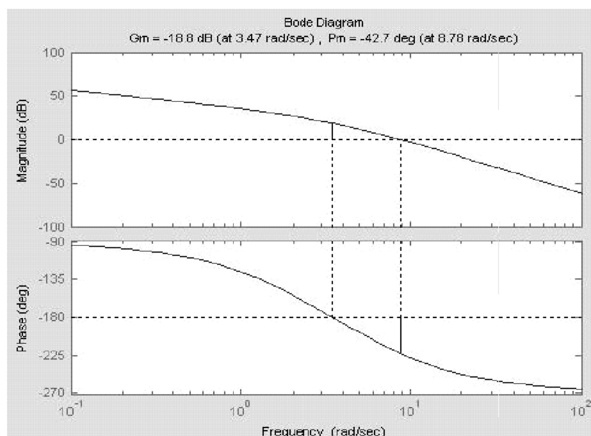


图 12-5　未校正系统 Bode 图与频域性能

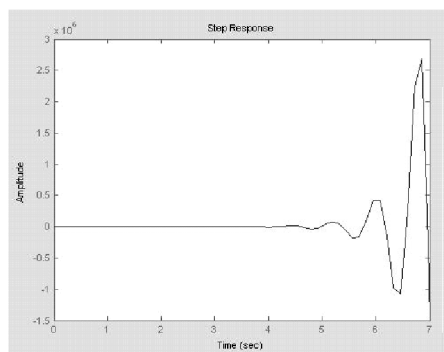


图 12-6　未校正系统的单位阶跃响应曲线

3）计算校正后系统剪切频率的上限。根据题意，校正后系统相角裕度 $\gamma\geqslant45°$。先不考虑校正环节的相频特性，根据自动控制原理，在剪切频率处，有 $\gamma=\varphi(\omega_c)-(-180°)$，即

$$45°=180°-90°-\arctan(0.5\omega_c)-\arctan(0.166\omega_c)$$

解此三角方程，求出满足系统的相角裕度 $\gamma\geqslant45°$的剪切频率的上限：

```
clear;syms omegac;
[omegac] = solve('atan(0.5 * omegac) + atan(0.166 * omegac) = (45) * pi/180');
omegac = vpa(omegac,3),
```

程序运行后得到系统剪切频率上限 $\omega_c=1.29\text{rad/s}$，必须有 $\omega_c\leqslant1.29\text{rad/s}$。取校正后系统剪切频率 $\omega_{c2}=1.2\text{rad/s}$。

4）求滞后校正器的传递函数。取校正后系统剪切频率 $\omega_{c2}=1.2\text{rad/s}$ 与相角裕度 $\gamma=45°$。如果已知系统校正后相角裕度与剪切频率，可以调用以下函数 lagc() 的程序求滞后校正补偿器的两个传递函数。

```
clear;K = 70;n1 = 1;d1 = conv(conv([1 0],[0.5 1]),[0.166 1]);
sope = tf(K * n1,d1);wc = 1.2;gama = 46;
[Gc] = lagc(2,sope,[wc]),[Gc] = lagc(1,sope,[gama]),
```

程序运行后得到按 $\omega_{c2}=1.2\text{rad/s}$ 滞后校正补偿器传递函数 $G_c(s)=\dfrac{8.333s+1}{408.8s+1}$、按 $\gamma=45°$的滞后校正补偿器传递函数 $G_c(s)=\dfrac{9.133s+1}{503.9s+1}$。程序校正后得到 $\omega_{c2}=1.2\text{rad/s}$ 的 Bode 图和阶跃响应分别如图 12-7 和图 12-8 所示。

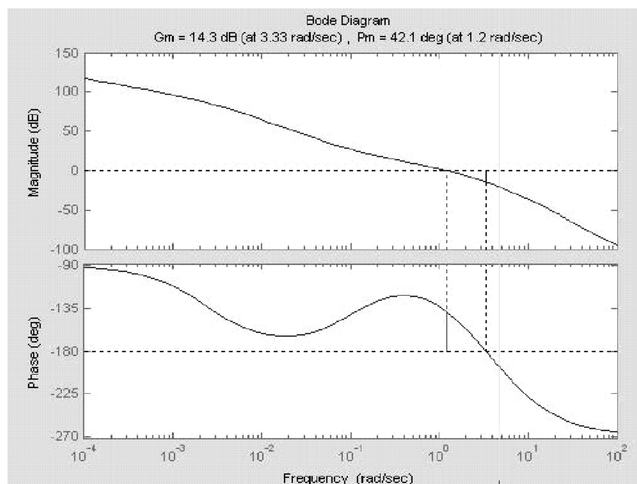


图 12-7 校正后 $\omega_{c2}=1.2\text{rad/s}$ 的 Bode 图

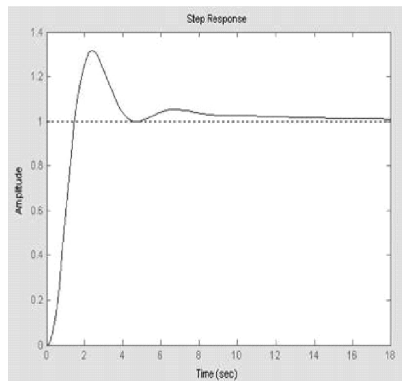


图 12-8 $\omega_{c2}=1.2\text{rad/s}$ 的阶跃响应

5）校验系统校正后频域性能是否满足题目要求。

① 当剪切频率 $\omega_{c2}=1.2\text{rad/s}$ 时有校正器的系统传递函数为

$$G_0(s)G_c(s)=70\frac{1}{s(0.5s+1)(0.166s+1)}\cdot\frac{8.333s+1}{408.8s+1}$$

```
clear;K = 70;n1 = 1;d1 = conv(conv([1 0],[0.5 1]),[0.166 1]);s1 = tf(K * n1,d1);
n2 = [8.333 1];d2 = [408.8 1];s2 = tf(n2,d2);key = 2;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后得到

幅值稳定裕度：$L_h=14.3\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=3.33\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma=42.1°$　　剪切频率：$\omega_c=1.2\text{rad/s}$

由数据可以看出，系统校正后相角稳定裕度 $\gamma=42.1°<45°$，没满足题目要求。再按相角裕度 $\gamma=45°$的校正器进行校核。

② 当相角裕度 $\gamma=45°$时有校正器的系统传递函数为

$$G_0(s)G_c(s)=70\frac{1}{s(0.5s+1)(0.166s+1)}\cdot\frac{9.133s+1}{503.9s+1}$$

```
clear;K=70;n1=1;d1=conv(conv([1 0],[0.5 1]),[0.166 1]);
s1=tf(K*n1,d1);n2=[9.133 1];d2=[503.9 1];s2=tf(n2,d2);
key=2;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后得到校正后系统 Bode 图如图 12-9 所示。由图可知系统的：

幅值稳定裕度：$L_h=15.4$dB　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=3.34$rad/s

相角稳定裕度：$\gamma=45.3°$　　剪切频率：$\omega_c=1.1$rad/s

数据显示，校正后系统相角稳定裕度 $\gamma=45.3°>45°$，剪切频率 $\omega_c=1.1\text{rad/s}<1.29\text{rad/s}$。本来滞后校正就是以牺牲系统快速性来换取稳定裕度的，所以指标完全满足题目要求。

③ 程序还绘制出校正后阶跃响应曲线如图 12-10 所示，并计算了系统性能指标：超调量 $\sigma\%=27.1863\%$；峰值时间 $t_p=2.5956$s；调节时间(5%) $t_s=4.2179$s。

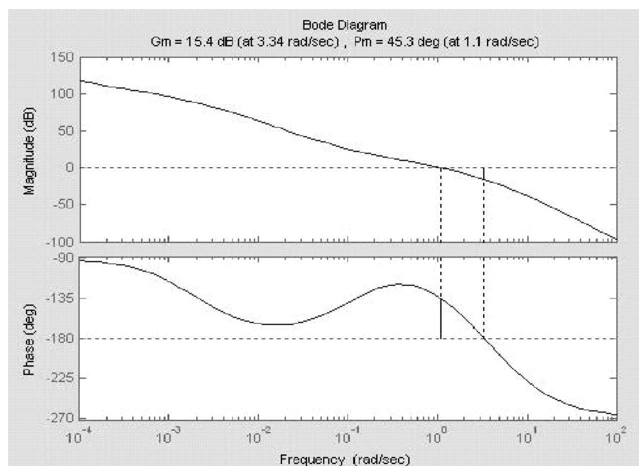


图 12-9　按 $\gamma=45°$校正后系统 Bode 图

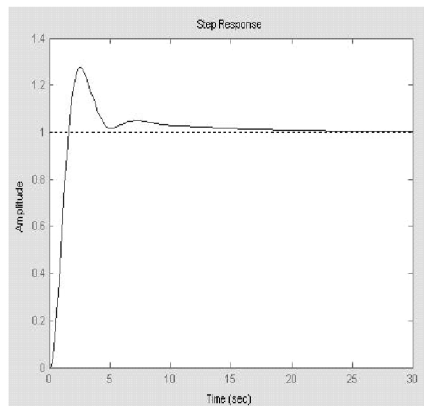


图 12-10　校正后的单位阶跃响应曲线

由以上数据看到，校正后系统剪切频率从 $\omega_c=8.78$rad/s 减少到 1.1rad/s，稳定裕度从 $\gamma=-42.7°$提高到 45.3°，系统从不稳定到稳定，这正是滞后校正的功能所在。

6）对校正补偿器进行有源网络实现的参数计算。根据校正环节 $K_c=35$，$G_c(s)=35\frac{9.133s+1}{503.9s+1}$。选择同相输入 PI 有源校正网络如图 12-11 所示。对图 12-11 所示的传递函数 $G_c(s)=K\frac{\tau s+1}{Ts+1}$推导如下。

根据模拟电子技术理论：①为保持两个输入端对地电阻相等，有 $R_0=R_1//R_2$；②反相输入端 Σ 与同相输入端 Σ'是虚短路，即 $U_i=U_\Sigma=U_{\Sigma'}$；③有分压表达式：

$$U_i(s)=\frac{R_1}{R_1+R_2//\frac{1}{sC_1}}U_o(s)=\frac{R_1}{R_1+\frac{R_2}{1+sR_2C_1}}U_o(s)=\frac{R_1(1+sR_2C_1)}{R_1(1+sR_2C_1)+R_2}U_o(s)$$

即 $$G_c(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{R_1\ (1+sR_2C_1)\ +R_2}{R_1\ (1+sR_2C_1)}=\frac{(R_1+R_2)\ \left(1+s\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1\right)}{R_1\ (1+sR_2C_1)}=K\frac{\tau s+1}{Ts+1}$$

式中，$K=\frac{R_1+R_2}{R_1}$；$\tau=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1$；$T=R_2C_1$；$R_0=R_1//R_2$。

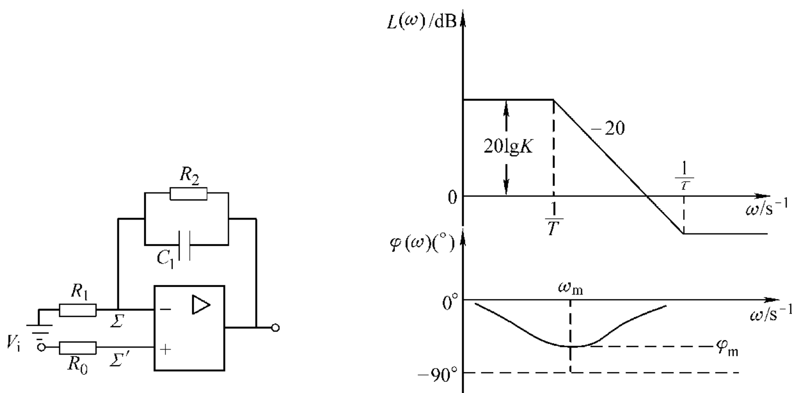


图 12-11 近似 PI 有源校正网络

请注意，$K=\frac{R_1+R_2}{R_1}$，$\tau=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1$，$T=R_2C_1$ 这三个方程，实际上只有两个是独立的，即三个参数 R_1，R_2，C 只有两个是独立的，第 3 个必须根据工程实际进行选取。

为实现 $G_c(s)=35\frac{9.133s+1}{503.9s+1}$，需确定参数。按以上公式带入数据：

$K=\frac{R_1+R_2}{R_1}=35$，$\tau=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1=9.133$，$T=R_2C_1=503.9$。选 $C_1=10\times10^{-6}$F

```
clear;syms R0 R1 R2 C1;
[R1,R2]=solve('503.9=R2*10^(-5)','R1*R2/(R1+R2)*10^(-5)=9.133');
R1=vpa(R1,6),R2=vpa(R2,6),
```

程序运行结果

```
R1=930159.
R2=.503900e8
```

还有

```
clear;R1=930159.;R2=.503900e8;
[R0]=solve('1/R0=1/930159.+1/.503900e8');
R0=vpa(R0,6),
```

程序运行结果

```
R0=913300.
```

即 $R_0=913300\Omega$，$R_1=930159\Omega$，$R_2=50390000\Omega$，还选有 $C=1\times10^{-6}$F。

根据以上数据，要按元件标称值选择电阻、电容。在进行工程实践时，电阻 R_2 与 R_3 通常要使用电位器以便调试确定电阻值。电位器同样要按其系列标称值进行选择。

【例 12-5】 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)}$，试用

Bode 图设计方法对系统进行串联滞后—超前校正设计，使之满足校正后的系统开环增益不变，相角裕度 $\gamma \geqslant 60°$，超调量 $\sigma\% < 10\%$；调节时间(5% 误差带)$t_s < 0.5$s。

解：1）作原系统的 Bode 图与阶跃响应曲线检查是否满足题目要求。

```
clear; K=40;n1=1;d1=conv(conv([1 0],[0.2 1]),[0.0625 1]);
s1=tf(K*n1,d1);s2=[];key=1;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后,可得未校正系统的 Bode 图与频域性能如图 12-12 所示,还有如图 12-13 所示的未校正系统阶跃响应曲线。由图 12-13 可知未校正系统的频域性能指标：

幅值稳定裕度:$L_h = -5.6$dB　　$-\pi$ 穿越频率:$\omega_g = 8.94$rad/s

相角稳定裕度:$\gamma = -14.8°$　　剪切频率:$\omega_c = 12.1$rad/s

计算数据表明,相角稳定裕量与模稳定裕量均为负值,这样的系统是根本不能工作的。这也可从发散振荡的阶跃响应曲线(见图 12-13)看到,系统必须校正。

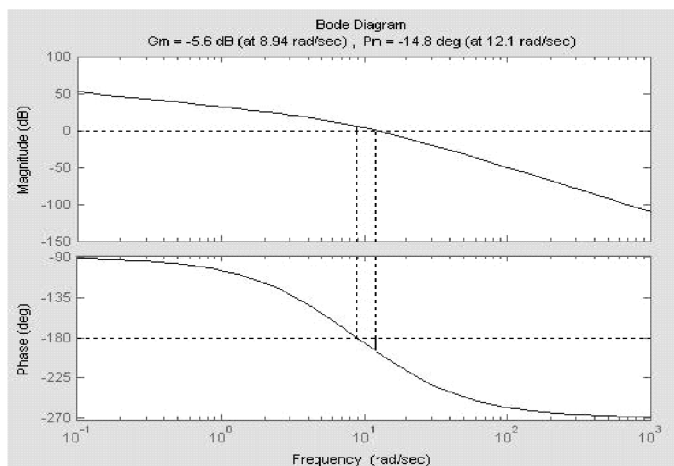


图 12-12　未校正系统的 Bode 图

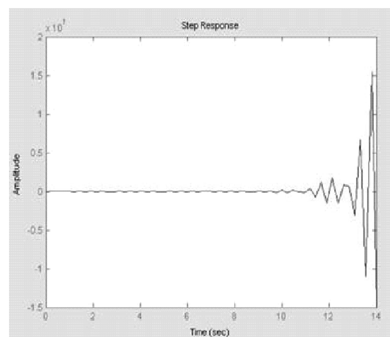


图 12-13　未校正系统的阶跃响应曲线

2)用试探法选 $\gamma = 40°$先求滞后校正器的传递函数。

```
clear;K=40;n1=1;d1=conv(conv([1 0],[0.2 1]),[0.0625 1]);
sope=tf(K*n1,d1);gama=40;[Gc]=lagc(1,sope,[gama]),
```

程序运行得到滞后校正器 $G_{c1}(s)=\dfrac{3.037s+1}{30.17s+1}$。

3）将 $G_{c1}(s)$与原对象合并作新对象再用试探法选 $\gamma = 40°$求超前校正器。

```
clear;K=40;n1=1;d1=conv(conv([1 0],[0.2 1]),[0.0625 1]);
s1=tf(K*n1,d1);n2=[3.037 1];d2=[30.17 1];s2=tf(n2,d2);
sope=s1*s2;gama=40;[Gc]=leadc(1,sope,[gama]);
```

程序运行后得到超前校正器 $G_c(s)=\dfrac{0.409s+1}{0.07017s+1}$。

4）对滞后—超前校正器校验系统校正后系统性能是否满足题目要求。

```
clear;K=40;n1=1;d1=conv(conv([1 0],[0.2 1]),[0.0625 1]);
s1=tf(K*n1,d1);n21=[3.037 1];d21=[30.17 1];s21=tf(n21,d21);
n22=[0.409 1];d22=[0.07017 1];s22=tf(n22,d22);
s2=s21*s22;key=2;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后得到校正后系统 Bode 图如图 12-14 所示。由图可知系统的：

幅值稳定裕度：$L_h = 13.8\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = 17.1\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma = 62.1°$　　剪切频率：$\omega_c = 5.9\text{rad/s}$

由数据看出，系统校正后相角稳定裕度 $\gamma = 62.1° > 60°$。程序还绘制出校正后阶跃响应曲线如图 12-15 所示，其超调量 $\sigma\% = 5.639\% < 10\%$，调节时间(5% 误差带) $t_s = 0.449\text{s} < 0.5\text{s}$。所以指标完全满足题目要求。

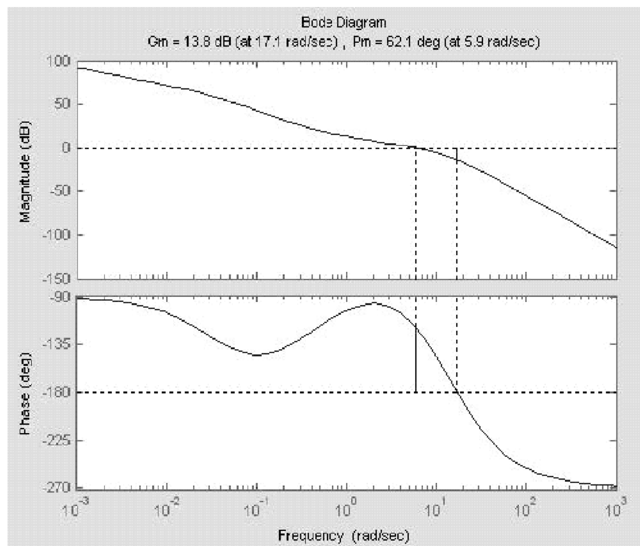


图 12-14　校正后系统 Bode 图

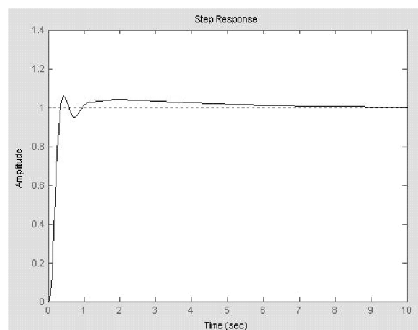


图 12-15　校正后阶跃响应曲线

12.3　控制系统根轨迹设计的 MATLAB 实现

控制系统根轨迹设计也有超前校正设计与滞后校正设计之分。

12.3.1　控制系统根轨迹超前校正设计的 MATLAB 实现

控制系统根轨迹设计是与 Bode 图设计并列的第 2 类设计法。作者为根轨迹超前校正设计开发了自编函数 rtloc.m，请看示例。

【例 12-6】　已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{s\ (s+0.5)}$，试用根轨迹解析方法对系统进行超前串联校正设计，使系统闭环主导极点的阻尼比 $\zeta = 0.5$，自然振荡角频率 $\omega_n = 5\text{rad/s}$，静态速度误差系数 $K_v = 20\text{rad/s}$，系统相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 40°$。

解：1）求满足系统静态速度误差要求的校正器的放大系数 K_c。

已知单位负反馈系统为 Ⅰ 型系统，故满足系统静态速度误差要求的放大系数应为 $K = K_v = 20\text{rad/s}$，校正器的放大系数 $K_c = \dfrac{K}{K_0} = \dfrac{20}{1} = 20\text{rad/s}$。

2）作原系统的 Bode 图与阶跃响应曲线，检查是否满足题目要求。

```
clear; n1 = 1;d1 = conv([1 0],[1 0.5]);
```

```
s1 = tf(n1,d1);s2 = [ ];key = 1;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后，可得到如图 12-16 所示未经校正系统的 Bode 图及其性能指标，还有如图 12-17 所示的未校正系统的阶跃响应曲线。由图 12-16 可知系统的：

模稳定裕度：$L_h = \infty$ dB　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = \infty$ rad/s

相角稳定裕度：$\gamma = 28°$　　剪切频率：$\omega_c = 0.94$rad/s

即系统的相角稳定裕度 $\gamma = 28° < 40°$。由图 12-17 可以看到，未校正系统的阶跃响应超调量竟达 44.6656%，故原系统需要校正。

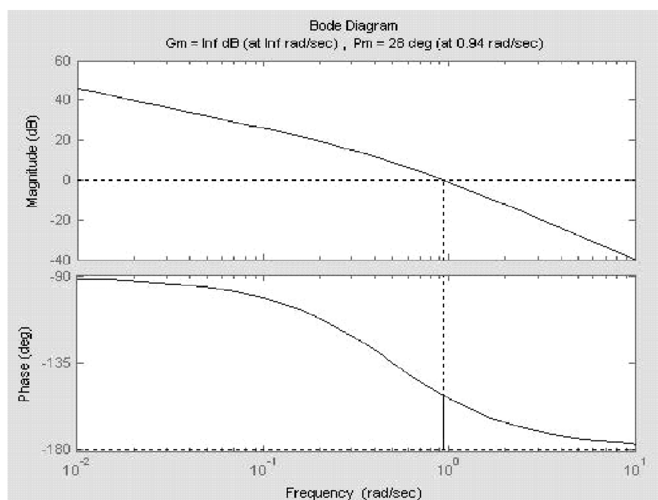


图 12-16　未经校正系统的 Bode 图及其性能指标

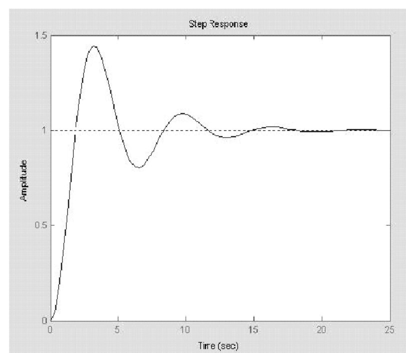


图 12-17　未校正系统的阶跃响应曲线

3）根据使系统满足的闭环主导极点用根轨迹解析方法计算超前校正器传递函数。

由闭环主导极点阻尼比 $\zeta = 0.5$，自然振荡角频率 $\omega_n = 5$rad/s，即有闭环主导极点

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

```
clear;zeta = 0.5;wn = 5;
s1 = - zeta * wn + j * wn * sqrt(1 - zeta^2),
```

程序运行后得到

```
s1 = -2.5000 +4.3301i
```

根据系统闭环特征根 $s_{1,2}$ 与校正器放大系数 $K_c = 20$rad/s 计算校正器传递函数。

```
clear;s1 = -2.5 +4.3301i;kc = 20;
n1 = 1;d1 = [1  0.5  0];sope = tf(n1,d1);
[Gc] = rtloc(2,sope,[s1,kc]);
```

程序运行后得到超前校正器传递函数 $G_c(s) = \dfrac{0.2306s + 1}{0.04444s + 1}$。

4）检查校正后系统是否满足题目要求。

```
clear;K = 20;n1 = 1;d1 = [1  0.5  0];s1 = tf(K * n1,d1);
n2 = [0.2306  1];d2 = [0.04444  1];s2 = tf(n2,d2);
key = 2;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后，可得到如图 12-18 所示的校正后系统的 Bode 图及其性能指标，还有如图 12-19 所示的校正后系统的阶跃响应曲线。由图 12-18 可知系统的：

模稳定裕度：$L_h = \infty$ dB　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = \infty$ rad/s

相角稳定裕度：$\gamma = 43.4°$　剪切频率：$\omega_c = 5.63$rad/s

即系统相角稳定裕度：$\gamma = 43.4° > 40°$。系统自然振荡角频率 $\omega_n = 5$rad/s、系统阻尼比 $\zeta = 0.5$。由图 12-19 可以看到，校正后系统阶跃响应超调量 $\sigma\%$ 由 44.6656% 减少为 32.8719%，故系统满足校正要求。

已经说明过，校正后系统剪切频率从 $\omega_c = 0.94$rad/s 增大到 5.63rad/s，稳定裕度从 $\gamma =$ 28°提高到 43.4°，超调量减小，这既看到超前校正的作用，也说明根轨迹解析方法对系统进行超前串联校正设计自编函数的有效。

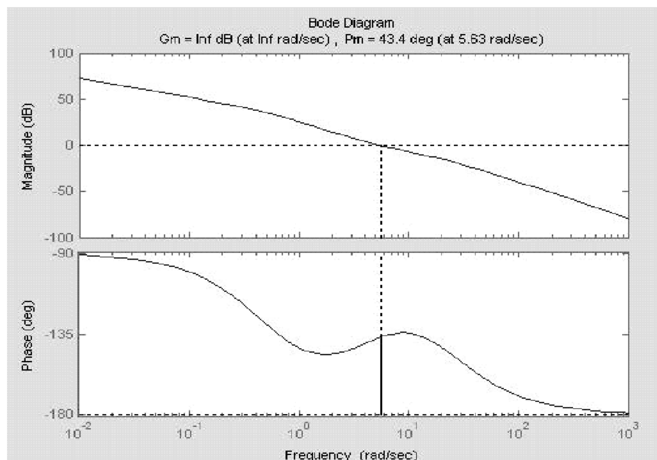


图 12-18　校正后系统 Bode 图

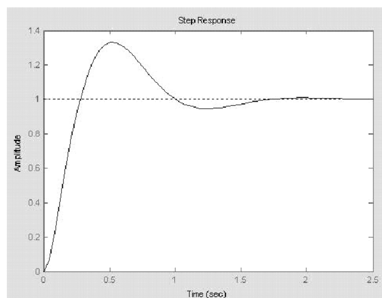


图 12-19　校正后系统阶跃响应曲线

12.3.2　控制系统根轨迹滞后校正设计的 MATLAB 实现

作者也为根轨迹滞后校正设计开发了自编函数 rlagc.m，请看示例。

【例 12-7】　已知单位负反馈系统开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{4}{s\ (2s+1)}$，试用根轨迹法对系统进行滞后串联校正设计，1）使系统单位斜坡响应稳态误差 $e_{ssv} \leqslant 0.025v_0$；2）阶跃响应超调量 $\sigma\% \leqslant 12\%$；3）相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 55°$；4）阶跃响应调节时间 $t_s \leqslant 15$s。

解：1）求校正器的放大系数 K_c。根据自动控制理论，对 Ⅰ 型系统满足单位斜坡响应稳态误差 $e_{ssv} \leqslant 0.025v_0$ 时，有 $K_v = K = \dfrac{v_0}{e_{ssv}} = \dfrac{v_0}{0.025v_0}$rad/s $= 40$rad/s，则校正器放大系数为 $K_c = \dfrac{K}{K_0} = \dfrac{40}{4}$rad/s $= 10$rad/s。

2）校检原系统的阶跃响应超调量是否满足要求。

```
clear; K =40;n1 =1;d1 =conv([1 0],[2 1]);
s1 =tf(K*n1,d1);s2 =[ ];key =1;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后，可得到如图 12-20 所示的未经校正系统的 Bode 图及其性能指标，还有如图 12-21 所示的未校正系统的阶跃响应曲线。由图 12-20 可知系统的：

幅值稳定裕度：$L_h = \infty$ dB　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = \infty$ rad/s

相角稳定裕度：$\gamma=6.4°$　　剪切频率：$\omega_c=4.46\mathrm{rad/s}$

即系统的相角稳定裕度 $\gamma=6.4°<45°$。由图 12-21 可以看到，未校正系统的阶跃响应超调量竟达 80%，并有剧烈的振荡，故原系统需要校正。

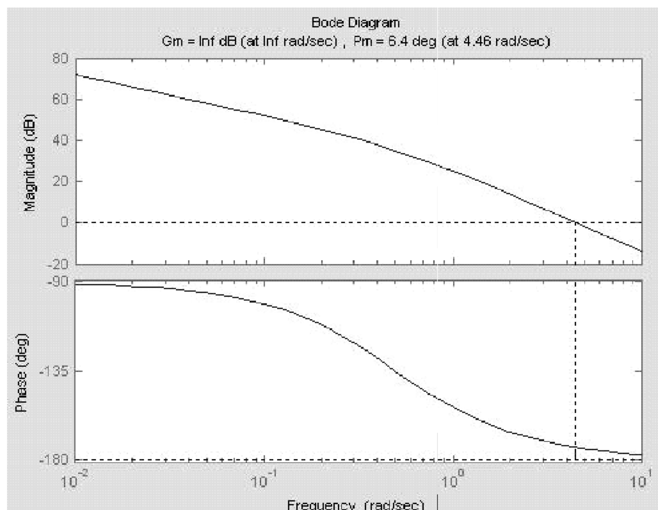


图 12-20　未校正系统 Bode 图

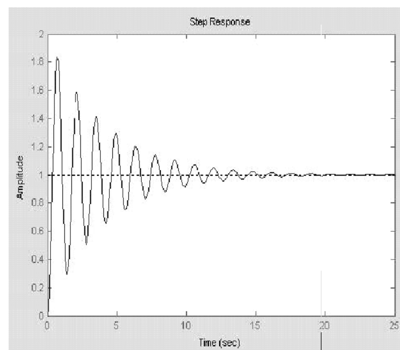
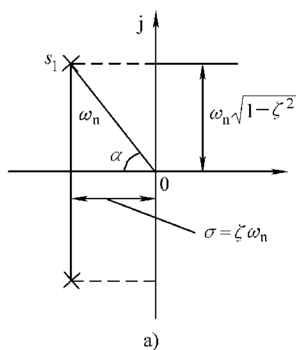
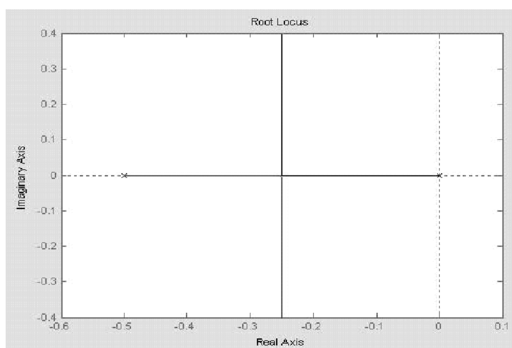


图 12-21　未校正系统阶跃响应曲线

3）由期望极点位置确定校正器传递函数。为求校正器传递函数，参看图 12-22a 确定期望闭环主导极点 s_1 的位置。在图中直线 $s_1 0$ 与负实轴的夹角为 α，则有 $\zeta=\cos\alpha$。



a)



b)

图 12-22　二阶系统的闭环极点与根轨迹图

由 $\sigma\%=12\%$ 用以下 MATLAB 程序将其转换成对应的 ζ。

```
clear;sigma =0.12; zeta = sitoze(sigma);
```

程序运行求得 zeta =0.5594，取 $\zeta=0.6$。

用以下 MATLAB 程序绘制未校正系统的根轨迹图。

```
clear;K =40;n1 =1;d1 = conv([1 0],[2 1]);
s1 = tf(K * n1,d1);rlocus(s1),
```

程序运行后得到未校正系统的根轨迹图如图 12-22b 所示。由图可以看出，根轨迹分离

点 $d=-0.25$。由 $G_0(s)=\dfrac{4}{s\ (2s+1)}$可知未校正系统没有零点，有两个极点：$p_1=0$，$p_2=-0.5$。用以下程序确定由期望极点位置确定校正器传递函数。

```
clear;essv=0.025;x=-0.25;z1=0;p1=0;p2=0.5;zeta=0.6;
[Gc]=rlagc(essv,x,z1,p1,p2,zeta);
```

程序运行后得校正器传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{0.008681s+2.17e-005}{s+2.17e-005}$，则校正系统传递函数为 $G_0(s)G_c(s)=\dfrac{40}{s\ (2s+1)}\cdot\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\beta T}}=\dfrac{40}{s\ (2s+1)}\times\dfrac{0.008681s+2.17e-005}{s+2.17e-005}$。

4）校检校正器计算是否符合要求。

```
clear;K=40;n1=1;d1=conv([1 0],[2 1]);
s1=tf(K*n1,d1);n2=[0.008681 2.17e-005];
d2=[1 2.17e-005];s2=tf(n2,d2);key=2;chec(key,s1,s2);
```

程序运行后，可得到如图 12-23 所示的校正后系统的 Bode 图及其性能指标，还有如图 12-24 所示的未校正系统的阶跃响应曲线。由图 12-23 可知系统的：

幅值稳定裕度：$L_h=\infty$ dB　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=\infty$ rad/s

相角稳定裕度：$\gamma=58.7°$　　剪切频率：$\omega_c=0.298$rad/s

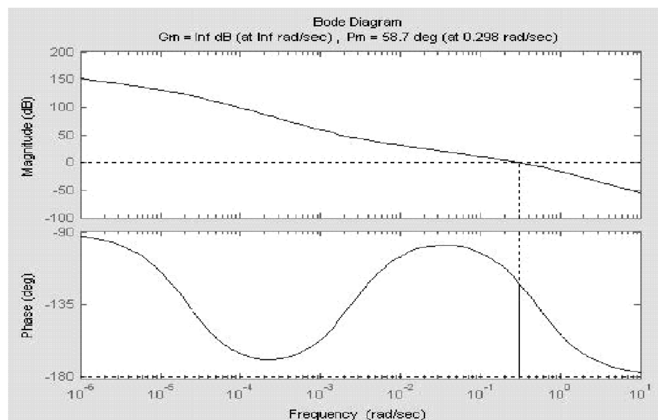


图 12-23　校正系统的 Bode 图

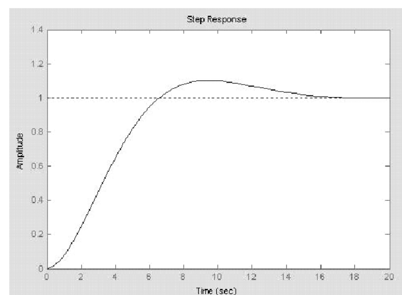


图 12-24　校正后的阶跃响应曲线

相角稳定裕度 $\gamma=58.7°\geqslant55°$，已达到题目要求。由图 12-24 可看出系统超调量$\sigma\%=10.5445\%<12\%$，已达到题目要求；峰值时间 $t_p=9.3718$s；调节时间（5%）$t_s=12.7798$s <15s 也已达到要求。

12.4 控制系统 P、PI、PID 校正设计的 MATLAB 实现

PID 控制是历史最悠久、控制性能最强的基本控制方式。PID 控制原理简单，易于整定，使用方便。直到目前为止仍然是广泛应用的过程控制方式。PID 校正是一种负反馈闭环控制策略，PID 校正器通常与被控对象串联连接，设置在负反馈闭环控制的前向通道上。

PID 校正有各种各样的算法，这些算法都在不同要求的领域里得到了有效应用。《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中已对以上相关内容作了全面介绍，必须认真、仔细复习。

12.4.1　控制系统 Ziegler – Nichols 整定公式校正设计的 MATLAB 实现

作者为控制系统 Ziegler – Nichols 整定公式 P、PI、PID 校正设计开发了自编函数 zn01.m，请看示例。

【例 12-8】 已知单回路控制系统控制对象为 $G_0(s)=\dfrac{1}{(100s+1)^3}e^{-21s}$，试用 Ziegler – Nichols 整定公式计算 P、PI、PID 串联校正器参数，并进行阶跃给定响应仿真。

解：

```
clear;G1 = tf(1,[100 1]);G2 = tf(1,[100 1]);G3 = tf(1,[100 1]);
tau1 = 21;[np,dp] = pade(tau1,2);Gp = tf(np,dp);G = G1 * G2 * G3 * Gp;
[K,T,tau] = kttau(G);[Gc1,Kp1] = zn01(1,[K,T,tau]);
[Gc2,Kp2,Ti2] = zn01(2,[K,T,tau]);
[Gc3,Kp3,Ti3,Td3] = zn01(3,[K,T,tau]);
Gcc1 = feedback(G1 * G2 * G3 * Gc1,Gp);
set(Gcc1,'Td',tau);step(Gcc1);hold on
Gcc2 = feedback(G1 * G2 * G3 * Gc2,Gp);set(Gcc2,'Td',tau);step(Gcc2);
Gcc3 = feedback(G1 * G2 * G3 * Gc3,Gp);set(Gcc3,'Td',tau);step(Gcc3);
gtext('1 P control'),gtext('2 PI control'),gtext('3 PID control'),
```

程序运行后得到 P 校正器为 $G_c(s)=2.8084$

PI 校正器为 $G_c(s)=\dfrac{1066s+2.528}{421.9s}$

PID 校正器为 $G_c(s)=\dfrac{5.409e004s^2+853.9s+3.37}{253.4s}$

程序运行后，还绘制出系统的阶跃给定响应曲线如图 12-25 所示。由图可知，PID 校正控制的效果最佳，超调既小，又快捷。

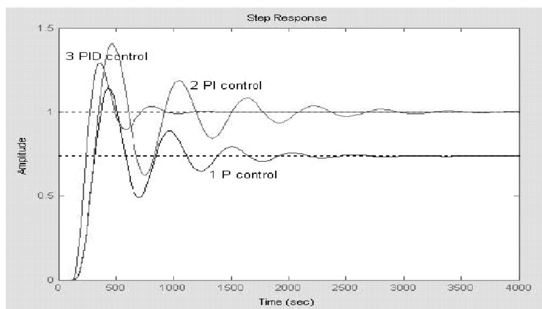


图 12-25　校正后系统的阶跃给定响应曲线

12.4.2　控制系统 Cohen – Coon 整定公式的校正设计的 MATLAB 实现

作者也为控制系统 Cohen – Coon 整定公式的 P、PI、PD、PID 校正设计开发了自编函数 cc01.m，请看示例。

【例 12-9】 已知过程控制系统的被控广义对象为一个带延迟的惯性环节，其传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{15s+1}e^{-50s}$，试用 Cohen－Coon 整定公式计算 P、PI、PD、PID 串联校正器参数，并进行阶跃响应仿真。

解：

```
clear;G1 = tf(1,[15 1]);tau1 = 50;[np,dp] = pade(tau1,2);Gp = tf(np,dp);G = G1 * Gp;
[K,T,tau] = kttau(G);[Gc1] = cc01(1,[K,T,tau]),[Gc2] = cc01(2,[K,T,tau]),
[Gc3] = cc01(3,[K,T,tau]),[Gc4] = cc01(4,[K,T,tau]),
Gcc1 = feedback(G1 * Gc1,Gp);set(Gcc1,'Td',tau);step(Gcc1);hold on;
Gcc2 = feedback(G1 * Gc2,Gp);set(Gcc2,'Td',tau);step(Gcc2);
Gcc3 = feedback(G1 * Gc3,Gp);set(Gcc3,'Td',tau);step(Gcc3);
Gcc4 = feedback(G1 * Gc4,Gp);set(Gcc4,'Td',tau);step(Gcc4);
gtext('1 P control'),gtext('2 PI control'), gtext('3 PD control'),gtext('4 PID control'),
```

程序运行后得到

P 校正器 $G_c(s)=0.6456$

PI 校正器 $G_c(s)=\dfrac{9.305s+0.3633}{25.61s}$

PD 校正器 $G_c(s)=5.022s+0.5488$

PID 校正器 $G_c(s)=\dfrac{504.9s^2+46.63s+0.692}{67.38s}$

程序运行后，还绘制出系统的阶跃给定响应曲线如图 12-26 所示。由图可知，PID 校正控制的效果最佳，既快捷，又无超调。

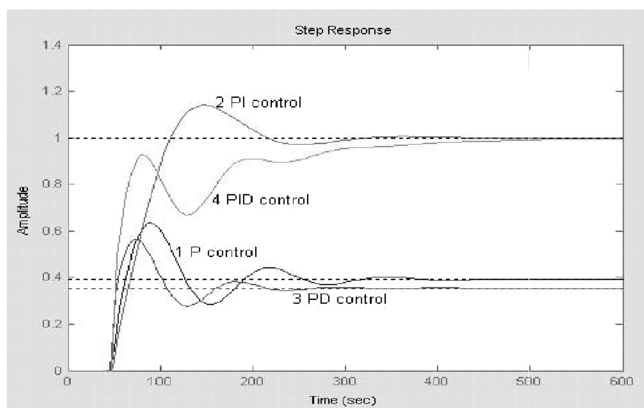


图 12-26　Cohen－Coon 公式的 P、PI、PD、PID 控制的阶跃响应曲线

12.4.3　控制系统最优控制(误差积分指标最优)校正设计的 MATLAB 实现

作者还为控制系统最优控制(误差积分指标最优)P、PI、PID 校正设计开发了自编函数 inmin01.m，请看示例。

【例 12-10】 已知过程控制系统被控广义对象为一个带延迟的惯性环节，其传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{0.4s+1}e^{-0.76s}$，试用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则计算 P、PI、PID 串联校正器

的参数，并对其进行阶跃给定响应的仿真。

解：1）调用自编函数 kttau. m 计算带延迟惯性环节的三参数。

```
clear;n = 1;d = [0.4  1];G1 = tf(n,d);tau1 = 0.76;[np,dp] = pade(tau1,2);
Gp = tf(np,dp);G = G1 * Gp;[K,T,tau] = kttau(G),
```

程序运行后得到 $K = 1$、$T = 0.4$、$\tau = 0.7383$。

2）计算比例（P）校正器并作阶跃响应仿真。

```
clear; K = 1;T = 0.4;tau = 0.7383;[np,dp] = pade(tau,2);
Gp = tf(np,dp);G = tf(1,[0.4  1]);iC = 1:3;
for  i = 1:length(iC)
    [Gc1,Kp] = inmin01(1,[K,T,tau,iC(i)])
    Gc = G * Gc1;Gcc = feedback(Gc,Gp);
  set(Gcc,'Td',tau);
  step(Gcc),hold  on
end
gtext('IAE'), gtext('ISE'), gtext('ITAE'),
```

程序运行后，可以得到三种最优控制下实现 P 校正时的参数：

① IAE 积分最小准则校正器：$G_{c1} = K_p = 0.4932$

② ISE 积分最小准则校正器：$G_{c1} = K_p = 0.8061$

③ ITAE 积分最小准则校正器：$G_{c1} = K_p = 0.4652$

运行程序后还得到三种积分最小准则 P 校正的阶跃给定响应曲线如图 12-27 所示。三条曲线有三个不同的终了值，ITAE 的最小，IAE 的次之，ISE 的最大。这可以从计算出的 P 校正器 K_p 的不同大小值看出。IAE 与 ITAE 这两种的曲线接近重合，响应速度与超调都差不多。而 ISE 的响应速度最快，超调量也最大。

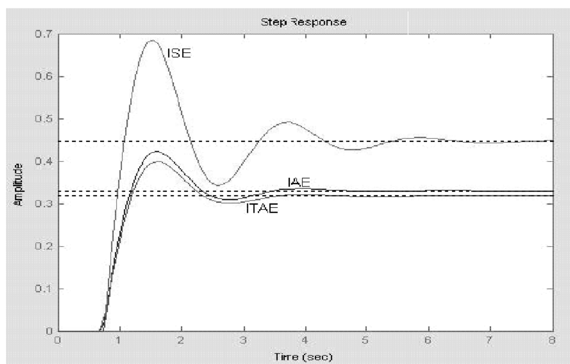


图 12-27　积分最小准则 P 校正阶跃给定响应曲线

3）计算 PI 校正器并作阶跃响应仿真。

```
clear; K = 1;T = 0.4;tau = 0.7383; [np,dp] = pade(tau,2);Gp = tf(np,dp);
G = tf(1,[0.4  1]);iC = 1:3;
for  i = 1:length(iC)
  [Gc2,Kp,Ti] = inmin01(2,[K,T,tau,iC(i)])
  Gc = G * Gc2;
  Gcc = feedback(Gc,Gp);
```

```
set(Gcc,'Td',tau);
step(Gcc),hold on
end
gtext('IAE'), gtext('ISE'), gtext('ITAE'),
```

程序运行后，可以得到三种最优控制下实现 PI 校正时的参数：

① IAE 积分最小准则校正器 $K_p=0.5377$、$T_i=1.0147$、$G_c(s)=\dfrac{0.5456s+0.5377}{1.015s}$

② ISE 积分最小准则校正器 $K_p=0.7250$、$T_i=1.2788$、$G_c(s)=\dfrac{0.9271s+0.725}{1.279s}$

③ ITAE 积分最小准则校正器 $K_p=0.4720$、$T_i=0.9003$、$G_c(s)=\dfrac{0.425s+0.472}{0.9003s}$

运行程序后还得到三种积分最小准则 PI 校正如图 12-28 所示的阶跃给定响应曲线。三条曲线的终了值是一致的。IAE 与 ITAE 这两种曲线接近重合，响应速度与过程相差不多。而 ISE 的响应速度较快，三种积分校正均没有超调，以 ISE 的振荡稍稍大一点。

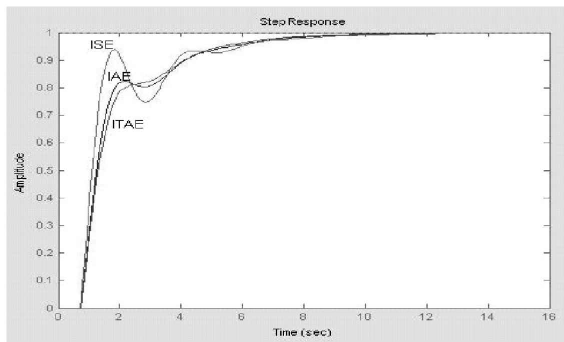


图 12-28　积分最小准则 PI 校正的阶跃响应曲线

4）计算 PID 校正器并作阶跃响应仿真。

```
clear;K=1;T=0.4;tau=0.7383;[np,dp]=pade(tau,2);
Gp=tf(np,dp);G=tf(1,[0.4 1]);iC=1:3;
for i=1:length(iC)
   [Gc3,Kp,Ti,Td]=inmin01(3,[K,T,tau,iC(i)])
   Gc=G*Gc3;Gcc=feedback(Gc,Gp);
  set(Gcc,'Td',tau);
  step(Gcc),hold on
end
gtext('IAE'),gtext('ISE'), gtext('ITAE'),
```

程序运行后，可以得到三种最优控制下实现 PID 校正时的参数：

① IAE 积分最小准则校正器：$K_p=0.8160$、$T_i=0.7210$、$T_d=0.3870$、

$$G_c(s)=\frac{0.2277s^2+0.5883s+0.816}{0.721s}$$

② ISE 积分最小准则校正器：$K_p=0.8377$、$T_i=0.5828$、$T_d=0.4150$、

$$G_c(s)=\frac{0.2026s^2+0.4882s+0.8377}{0.5828s}$$

③ ITAE 积分最小准则校正器：$K_p = 0.7595$、$T_i = 0.7468$、$T_d = 0.2804$、

$$G_c(s)=\frac{0.159s^2+0.5671s+0.7595}{0.7468s}$$

运行程序后还得到三种积分最小准则 PID 校正如图 12-29 所示的阶跃给定响应曲线。三条曲线终了值是一致的。就响应速度而言，三条曲线差不多快；超调量以 ITAE、IAE、ISE 的顺序加大，ISE 的超调量最大。而调节时间以 ITAE 的最短。

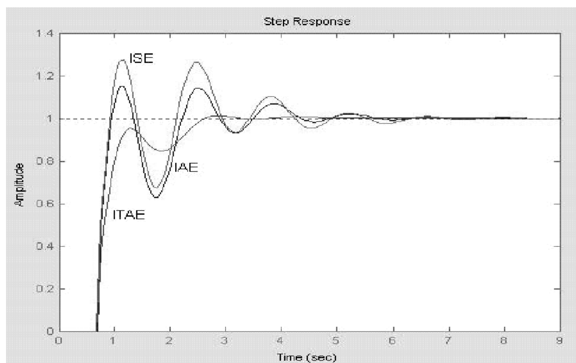


图 12-29　积分最小准则 PID 校正的阶跃响应曲线

12.4.4　控制系统稳定边界法的 P、PI、PID 校正设计的 MATLAB 实现

作者为控制系统稳定边界法 P、PI、PID 校正设计开发的自编函数是 zn02.m，请看示例。

【例 12-11】　已知过程控制系统被控对象传递函数 $G_0(s)=\dfrac{1}{(20s+1)(5s+1)(2s+1)^2}$，试用稳定边界法计算串联调节器 $G_c(s)$ 作 P、PI、PID 校正时的参数，并进行阶跃响应仿真。

解：程序方式下运行以下程序 sx2X1211.m，程序中调用了自编函数 zn02.m。

```
%MATLAB PROGRAM sx2L1211.m
clear;G1 = tf(1,[20 1]);G2 = tf(1,[5 1]);
d3 = conv([2 1],[2 1]);G3 = tf(1,d3);G = G1 * G2 * G3;p = 3;
[Gc1,Kp1] = zn02(1,G,p),[Gc2,Kp2,Ti2] = zn02(2,G,p),
[Gc3,Kp3,Ti3,Td3] = zn02(3,G,p),
Gcc1 = feedback(G * Gc1,1);step(Gcc1);hold on;
Gcc2 = feedback(G * Gc2,1);step(Gcc2);Gcc3 = feedback(G * Gc3,1);step(Gcc3);
gtext('1 P control'),gtext('2 PI control'),gtext('3 PID control'),
```

程序需在 MATLAB 命令窗口中运行，程序运行后有根轨迹图 12-30，图上显示有十字光标，选择根轨迹与虚轴的交点用鼠标左键单击。再回到 MATLAB 命令窗口中，可以见到有计算出的根轨迹增益与极点值（应该力求准确定在根轨迹与虚轴的交点上，尽量使极点实部为 0），还可见到字符“K”。应该在字符“K”后输入指令“return”，然后即可在 MATLAB 命令窗口中看到 km = 9.3797，wm = 0.2422，这就是交点的系统增益 K_m 及其对应的振荡角频率 ω_m。在 MATLAB 命令窗口中还看到用稳定边界法计算出 P、PI、PID 校正的参数。再弹出根轨迹图，再次用鼠标左键单击根轨迹与虚轴的交点，程序三次调用函数 zn02.m，

即这样操作三次，最后得到如图 12-31 所示的 P、PI、PID 三种校正时的阶跃给定响应曲线与校正器计算结果。

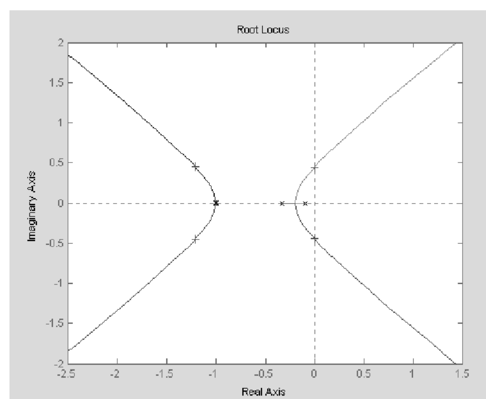


图 12-30 系统闭环根轨迹图

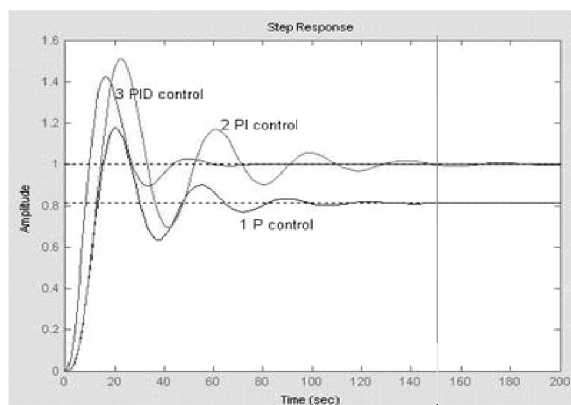


图 12-31 P、PI、PID 校正后系统的阶跃响应曲线

以下是程序执行过程中在 MATLAB 命令窗口中留下的信息记录。

```
>> sx2X1211
Select a point in the graphics window
selected_point =
   0.0012 +0.2283i
km =8.6349
pole =
  -0.6194 +0.2407i
  -0.6194 -0.2407i
  -0.0056 +0.2335i
  -0.0056 -0.2335i
K >> return
wm =0.2335
Gc =4.3174
Gc1 =4.3174
Kp1 =4.3174
Select a point in the graphics window
selected_point =
   0.0012 +0.2283i
km =8.6349
pole =
  -0.6194 +0.2407i
  -0.6194 -0.2407i
  -0.0056 +0.2335i
  -0.0056 -0.2335i
K >> return
wm =0.2335
Transfer function:
```

```
89.87s + 3.929
- - - - - - - - - - - - - - - -
     22.87s
Transfer function:
89.87s + 3.929
- - - - - - - - - - - - - - - -
     22.87s
Kp2 = 3.9289
Ti2 = 22.8748
Select a point in the graphics window
selected_point =
   0.0012 + 0.2376i
km = 9.3100
pole =
   -0.6239 + 0.2463i
   -0.6239 - 0.2463i
   -0.0011 + 0.2394i
   -0.0011 - 0.2394i
K >> return
wm = 0.2394
Transfer function:
240.6s^2 + 73.32s + 5.586
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
             13.13s
Transfer function:
240.6s^2 + 73.32s + 5.586
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
             13.13s
Kp3 = 5.5860
Ti3 = 13.1253
Td3 = 3.2813
>>
```

计算出三种 P、PI、PID 校正时校正器的参数分别为

① P 校正器 $G_{c1}=K_{p1}=4.3174$

② PI 校正器 $K_{p2}=3.9289$、$T_{i2}=22.8748$、$G_c(s)=\dfrac{89.87s+3.929}{22.87s}$

③ PID 校正器 $K_{p3}=5.586$、$T_{i3}=13.1253$、$T_{d3}=3.2813$、

$$G_c(s)=\frac{240.6s^2+73.32s+5.586}{13.13s}$$

从图 12-31 所示稳定边界法计算的 P、PI、PID 校正阶跃给定响应曲线可以看到，P 与 PI 校正的阶跃响应曲线上升的速度差不多快，PID 校正的最快；三条曲线有两个不同的终了值。超调量都较大，以 PI 校正的为最大。

习　题

【12-1】 若系统超调量 $\sigma\% = 20\%$ 按 5% 递增至 60%，求这些超调量对应的系统相角稳定裕度 γ，并用自编函数 gatosi. m 来验算。

【12-2】 若系统超调量 $\sigma\% = 28\%$，而调节时间从 $t_s = 0.1\text{s}$ 至 $t_s = 0.8\text{s}$，求这个超调量与调节时间对应的系统剪切频率 ω_c。

【12-3】 已知单位负反馈系统被控对象的传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{100}{s(0.1s+1)}$，试用 Bode 图常规设计方法对系统进行超前串联校正设计，使系统校正后满足：①开环系统剪切频率 $\omega_c \geqslant 50\text{rad/s}$；②相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 45°$；③对校正补偿器进行有源网络实现的参数计算。

【12-4】 续【12-3】试用 Bode 图设计解析法对系统进行超前串联校正设计，使系统校正后达到同样要求。

【12-5】 已知工业锅炉控制系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{4}{s(s+3)}$，试用 Bode 图设计方法对系统进行串联滞后校正设计，使校正器开环增益 $K_c = 10$，校正后系统阻尼比 $\zeta = 0.4$，自然振荡角频率 $\omega_n = 1.5\text{rad/s}$。

【12-6】 已知单位负反馈系统被控对象的传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$。试用根轨迹几何方法对系统进行超前串联校正设计，使之满足：①静态速度误差系数 $K_v \geqslant 2\text{rad/s}$；②阶跃响应超调量 $\zeta = 0.7$；③阶跃响应的调节时间 $t_s \leqslant 1.4\text{s}$。

【12-7】 已知单位负反馈系统开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{s(0.5s+1)}$，试用根轨迹法对系统进行滞后串联校正设计，使系统满足：①单位斜坡响应稳态误差 $e_{ssv} \leqslant 0.1v_0$；②阶跃响应超调量 $\sigma\% \leqslant 20\%$；③相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 45°$；④阶跃响应调节时间 $t_s \leqslant 3\text{s}$。

【12-8】 已知轧钢车间加热炉的传递函数为 $G_1(s)=\dfrac{9.9}{120s+1}e^{-80s}$，其温度传感器与变送器传递函数为 $G_2(s)=\dfrac{0.107}{10s+1}$，试用 Ziegler－Nichols 整定公式计算系统 P、PI、PID 串联校正器的参数，并进行阶跃给定响应仿真。

【12-9】 已知过程控制系统的被控广义对象为一个带延迟的惯性环节，其传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{0.4s+1}e^{-0.76s}$，试用 Cohen－Coon 整定公式计算系统 P、PI、PD、PID 串联校正器参数，并进行阶跃响应仿真。

【12-10】 已知某被控广义对象的传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{(17s+1)(6s+1)}e^{-30s}$，试用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则计算系统串联 P、PI、PID 校正器的参数，并对其进行阶跃给定响应仿真。

【12-11】 已知一串级过程控制系统的主、副被控对象与副调节器的传递函数分别为

$$G_{p1}(s)=\frac{1}{(10s+1)};\quad G_{p2}(s)=\frac{1}{(3s+1)\ (s+1)^2};\quad G_{c2}(s)=1$$

试用稳定边界法计算系统主调节器 $G_{c1}(s)$ 作 P、PI、PID 串联校正时的参数，并进行阶跃给定响应仿真。

第 13 章　自动控制系统的 MATLAB 计算及仿真

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》介绍了已知系统结构与参数，对单闭环控制、多闭环控制、位置随动控制、过程控制等系统进行 MATLAB 计算及仿真的问题。由于自动控制问题的多样性与复杂性，还有很多问题需要讨论。例如，简单闭环控制调速系统应用作者编写的程序进行 PI 校正设计、带转速微分负反馈的双闭环调速系统及其仿真、位置随动系统的动态校正设计与其稳态误差的计算、过程控制系统的动态校正设计等，都是极其普遍而广泛使用的实际工程问题，本章就来介绍诸如此类的自动控制系统 MATLAB 计算及仿真。

为方便计算与仿真，特别推荐作者编写的函数：closeK. m、dist. m、prxd1. m、prxd2. m。

13.1　简单闭环控制的 MATLAB 计算及仿真

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中对简单闭环控制调速系统进行了各种给定输入信号响应仿真。在此，将对简单闭环控制调速系统，再应用作者自编程序，进行 PI 校正设计，并验算设计后系统时域与频域性能指标是否满足要求。请看以下示例。

【例 13-1】　已知龙门刨床工作台拖动系统采用晶闸管—直流电机单闭环调速系统（V－M 系统）Simulink 动态结构图如图 13-1 所示。图中电机参数：$P_{nom}=60\text{kW}$，$n_{nom}=1000\text{r/min}$，$U_{nom}=220\text{V}$，$I_{nom}=305\text{A}$，电枢电阻 $R_a=0.056\Omega$，V－M 系统主电路总电阻 $R=0.18\Omega$，电枢电磁时间常数 $T_a=0.012\text{s}$，系统运动部分飞轮矩对应的机电时间常数 $T_m=0.097\text{s}$，整流触发装置的放大系数 $K_s=40$，三相桥平均失控时间 $T_s=0.00167\text{s}$。1）试计算额定磁通下电机电动势转速比；2）要求系统调速范围 $D=20$，静差率 $s=5\%$，求闭环系统开环放大系数 K；3）若 $U_n^*=12\text{V}$ 时 $n=n_{nom}=1000\text{r/min}$，求拖动系统测速反馈系数 K_t 或 α；4）计算满足系统调速范围与静差率要求的比例调节器放大系数 K_p；5）试问系统此时能否稳定运行？其临界开环放大系数 K_{cr}为多少？6）试绘制出系统开环放大系数大于 K_{cr}与小于 K_{cr}（改变系统比例调节器 K_p 的设置）时系统单位给定阶跃响应曲线以验证系统能否

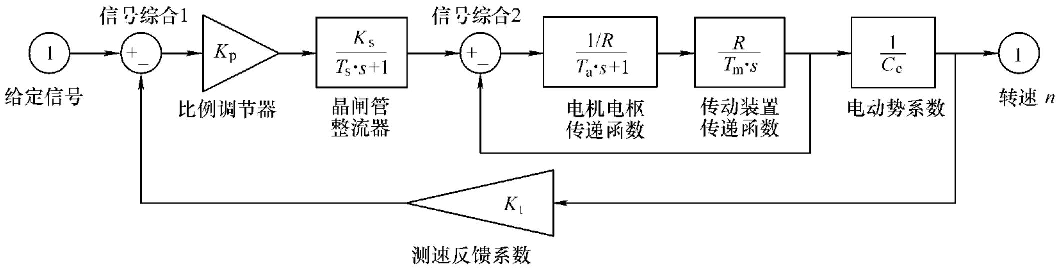


图 13-1　转速单闭环调速系统的 Simulink 动态结构图

稳定运行？7）以相角稳定裕度为校正主要指标对系统进行滞后校正；8）以剪切频率为校正主要指标对系统进行滞后校正；9）用根轨迹校正器对系统进行滞后校正。

解：1）计算 C_e、Δn_{cl}、Δn_{op}、K。

```
clear;Unom=220;Inom=305;nnom=1000;s=0.05;D=20;R=0.18;Ra=0.056;
[Ce,delnnom,delncl,delnop,K]=closeK(Unom,Inom,nnom,Ra,R,D,s);
```

程序运行后得到额定磁通下电机电动势转速比 $C_e=0.2029\text{V}\cdot\text{min/r}$、满足系统调速范围与静差率要求时的闭环系统稳态速降 $\Delta n_{cl}=\Delta n_{nom}=2.6316\text{r/min}$、系统开环额定负载下稳态速降 $\Delta n_{op}=270.55\text{r/min}$、满足系统调速范围与静差率要求的闭环系统开环放大系数 $K=101.8090$。

2）求系统测速反馈系数 $K_t=\alpha=\dfrac{U_n}{n_{nom}}$。

对单闭环调速系统有静态结构图如图 13-2 所示。根据自动控制理论有如下方程组

$$\begin{cases}U_n=K\cdot\Delta U_n\\U_n^*-U_n=\Delta U_n\end{cases}$$

式中，$K=K_pK_s\alpha/C_e$。

图 13-2　单闭环调速系统静态结构图

代入已知条件得到 $\begin{cases}U_n=101.809\cdot\Delta U_n\\12-U_n=\Delta U_n\end{cases}$

用 MATLAB 程序解此方程组

```
clear;syms Un delUn alpha;
[Un,delUn]=solve('Un=101.809*delUn','12-Un=delUn');
alpha=vpa(Un/1000,4),
```

程序运行结果 $K_t=\alpha=0.01188\text{V}\cdot\text{min/r}$（因为 MATLAB 模型图中不能输入希腊字母，图 13-1 中测速反馈系数为 K_t）。

3）计算比例调节器放大系数 K_p。根据自动控制理论，闭环系统开环放大系数 K、测速反馈系数 α、电机电动势转速比 C_e 与放大系数 K_p 之间满足关系式：$K=K_pK_s\alpha/C_e$。

```
clear;syms K Kp Ks Ce alpha;K=101.809;Ks=40;
Ce=0.2029;alpha=0.01188;Kp=(K*Ce)/(Ks*alpha),
```

程序运行结果 $K_p=43.4702$。

4）绘制单闭环调速系统 Simulink 动态结构图模型 sx2L1301.mdl，如图 13-3 所示。

图 13-3　带参数单闭环调速系统的动态结构图模型 sx2L1301.mdl

5）求闭环系统临界开环放大系数。

根据自动控制理论的代数判据，系统稳定的充要条件为 $K<\dfrac{T_m(T_a+T_s)+T_s^2}{T_aT_s}$，其临界

开环放大系数 $K_{cr}=\dfrac{T_m(T_a+T_s)+T_s^2}{T_aT_s}$。式中，$T_m$ 是系统运动部分飞轮矩相应的机电时间常数，T_a 是电枢回路电磁时间常数，T_s 是三相桥平均失控时间。

```
clear;Tm=0.097;Ta=0.012;Ts=0.00167;Kcr=(Tm*(Ta+Ts)+Ts^2)/(Ta*Ts),
```

程序运行后得到闭环系统临界开环放大系数 $K_{cr}=66.3063$。

6）求系统闭环特征根以验证系统能否稳定运行。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301');s1=ss(a,b,c,d);
sys=tf(s1);sys1=zpk(s1);P=sys.den{1};roots(P),
```

程序运行后得到

```
ans =
  1.0e+002 * -7.1466
  0.1626+2.7155i
  0.1626-2.7155i
```

即系统闭环特征根有两个根的实部为正，说明系统不能稳定运行。

7）对应临界开环放大系数 $K_{cr}=66.3063$，计算其对应的 K_p。

```
clear;syms K Kp Ks Ce alpha;K=66.3063;Ks=40;
Ce=0.2029;alpha=0.01188;Kp=(K*Ce)/(Ks*alpha),
```

程序运行后得到 $K_p=28.3113$。以下将绘制临界值两侧（$K_p=28$ 与 $K_p=28.312$）系统的单位给定阶跃响应曲线以验证系统能否稳定运行。

① 绘制比例调节器 $K_p=28$ 时系统模型 sx2L1301a.mdl，如图 13-4 所示，并用程序绘制系统的阶跃响应曲线。

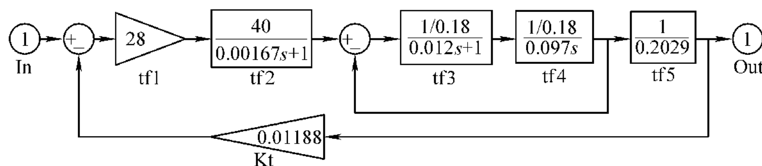


图 13-4　比例调节器 $K_p=28$ 时系统模型 sx2L1301a.mdl

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301a');
s1=ss(a,b,c,d);sys=tf(s1);step(sys),
```

程序运行后得到当 $K_p=28$ 时对应着模型 sx2L1301a.mdl 绘制的系统单位阶跃响应曲线，如图 13-5 所示，呈现剧烈的衰减振荡，尚属于稳定系统范围。

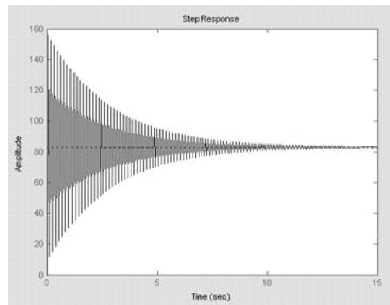


图 13-5　当 $K_p=28$ 时系统阶跃响应

② 绘制比例调节器 $K_p=28.312$ 时系统模型 sx2L1301b.mdl，如图 13-6 所示，并用程序绘制系统的阶跃响应曲线。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301b');s1=ss(a,b,c,d);sys=tf(s1);step(sys),
```

程序运行后得到当 $K_p=28.312$ 时对应着模型 sx2L1301b.mdl 绘制的系统单位阶跃响曲线，如图 13-7 所示，呈现发散的振荡，属于不稳定系统范畴。

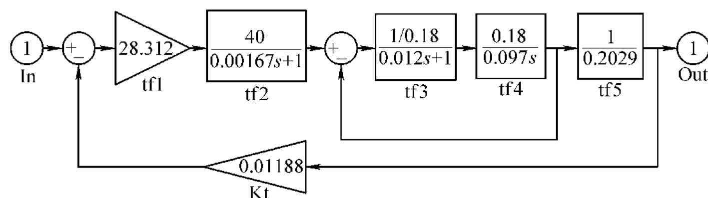


图 13-6 调节器 $K_p=28.312$ 时模型 sx2L1301b. mdl

8）以相角稳定裕度（$\gamma=45°$）为校正主要指标对系统进行滞后校正。

创建 sx2L1301. mdl 的开环模型 sx2L1301op. mdl，如图 13-8 所示，即将模型 sx2L1301. mdl 反馈断开的开环状态。以下调用自编函数 lagc. m 的程序要用到它。

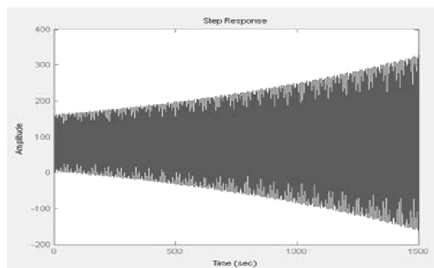


图 13-7 当 $K_p=28.312$ 时系统阶跃响应

① 利用开环模型 sx2L1301op. mdl 并调用自编函数 lagc. m 设计 PI 校正器。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301op');s1=ss(a,b,c,d);s2=tf(s1);gama=48;[Gc]=lagc(1,s2,[gama]),
```

程序运行后得到 $\gamma\geqslant45°$ 的校正器为 $G_c(s)=\dfrac{0.1575s+1}{2.22s+1}$。

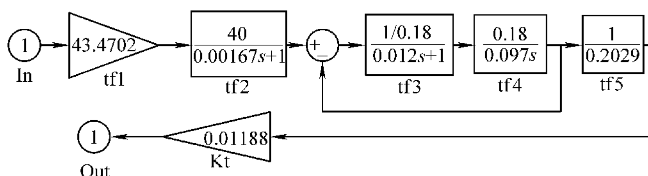


图 13-8 系统开环模型 sx2L1301op. mdl

② 对以相角裕度为校正指标的校正器 $G_c(s)=\dfrac{0.1575s+1}{2.22s+1}$验算设计的校正效果。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301op');
s1=ss(a,b,c,d);s2=tf(s1);gama=48;
[Gc]=lagc(1,s2,[gama]),sys=s2*Gc; margin(sys),
```

程序运行后绘制系统 Bode 图，如图 13-9 所示。从图中可见，校正后系统的相角稳定裕度 $\gamma=47.6°>45°$，达到预期目的。

9）以剪切频率为校正主要指标（$\omega_c=40\text{rad/s}$）对系统进行滞后校正。

① 利用开环模型 sx2L1301op. mdl 并调用自编函数 lagc. m 设计 PI 校正器。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301op');
s1=ss(a,b,c,d);s2=tf(s1);wc=40;[Gc]=lagc(2,s2,[wc]),
```

程序运行后得到 $\omega_c\geqslant40\text{rad/s}$ 的 PI 校正器为 $G_c(s)=\dfrac{0.25s+1}{6.389s+1}$。

② 验算设计的校正器的校正效果。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301op');s1=ss(a,b,c,d);s2=tf(s1);
```

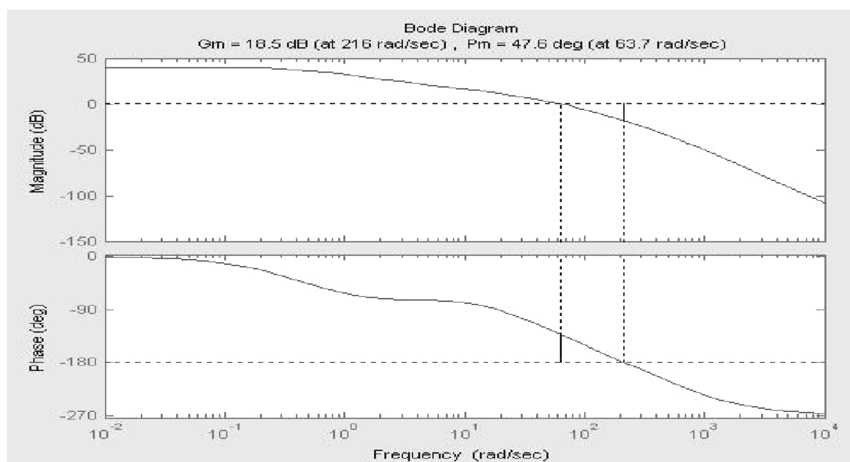


图 13-9　经校正器 $G_c(s)=\dfrac{0.1575s+1}{2.22s+1}$ 校正后的 Bode 图

```
wc = 40;[Gc] = lagc(2,s2,[wc]),sys = s2 * Gc;margin(sys),
```

程序运行后绘制系统 Bode 图，如图 13-10 所示。从图中可以看出，校正后系统的剪切频率 $\omega_c=40.2\text{rad/s}>40\text{rad/s}$，也达到预期目的。

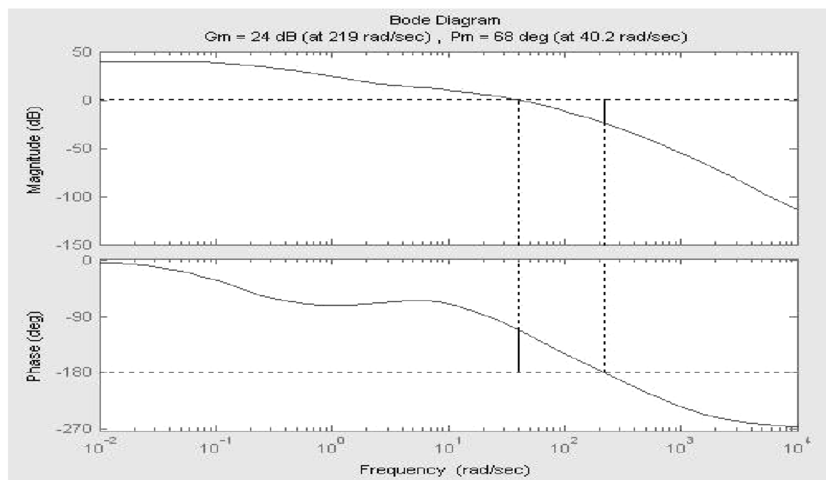


图 13-10　经校正器 $G_c(s)=\dfrac{0.25s+1}{6.389s+1}$ 校正后的 Bode 图

10）用根轨迹校正器对系统进行滞后校正。

没有经过用根轨迹校正器对系统进行滞后校正前，系统模型为 sx2L1301. mdl。利用该模型先绘制其单位阶跃响应曲线，以便与校正后的效果进行比较。

```
clear;[a,b,c,d] = linmod('sx2L1301');s1 = ss(a,b,c,d);
sys = tf(s1);t = 0:0.001:0.3;step(sys,t),
```

程序运行后绘制系统单位阶跃响应曲线，如图 13-11 所示。单位阶跃响应呈现发散的振荡。

根据自动控制理论[14]，给开环传递函数 $G(s)H(s)$ 增加负极点的作用是使根轨迹向右

半 S 平面移动，其系统稳定性变差；而给开环传递函数 $G(s)H(s)$ 增加负零点的作用是使根轨迹向左半 S 平面移动，其系统稳定性会变好。

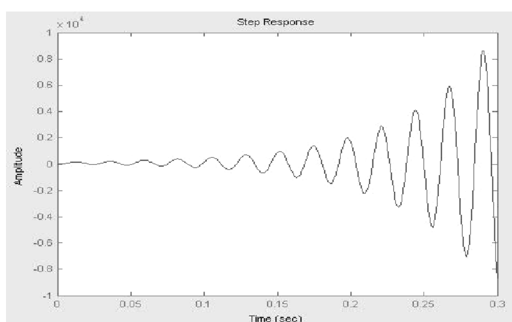


图 13-11　系统单位阶跃响应曲线

在程序方式下(必须如此)运行以下 MATLAB 程序 sx2L131. m，打开系统根轨迹设计器(见图 13-12)与控制和估计工具管理器，按图中选择【Analysis】菜单中的【Response to Step Command】命令，单击后即得到没有经过用根轨迹校正器校正的系统阶跃响应曲线(见图 13-13)，也是发散的振荡，与图 13-11 所示曲线一致。

```
% sx2L131. m
[a,b,c,d] = linmod('sx2L1301op');
s1 = ss(a,b,c,d);s2 = tf(s1);rltool(s2),
```

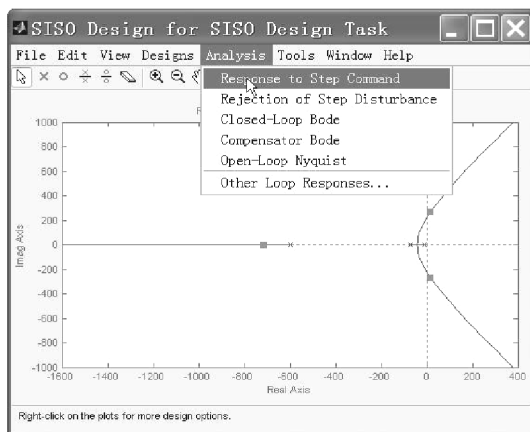


图 13-12　被打开的系统根轨迹设计器

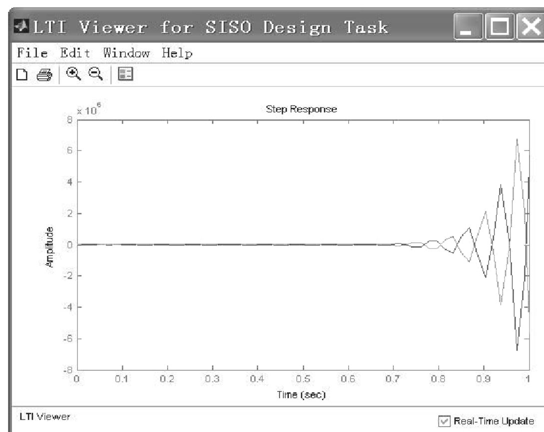


图 13-13　根轨迹校正器中显示的发散振荡

在图 13-14 即控制与估计工具管理器中，选择【Compensator Editor】补偿校正器编辑器卡，单击“Add Pole /Zero”下的“Real Zero”为系统增加一个零点“ – 100”(见图 13-14 与图 13-15)，会使系统从不稳定变成稳定，且具有很好的性能指标。

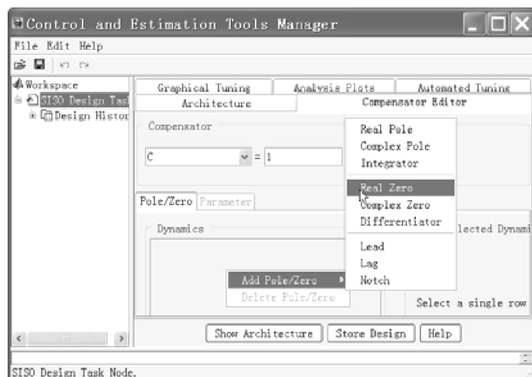


图 13-14　补偿校正器编辑器对话框

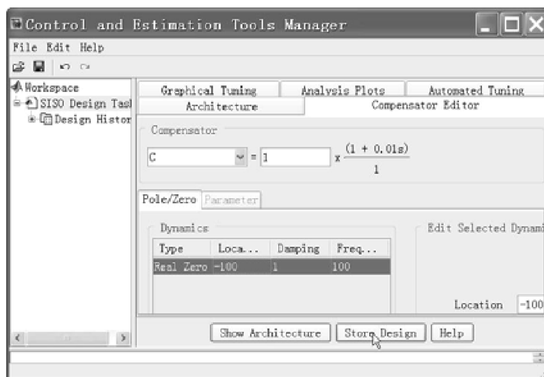


图 13-15　设置零点“ – 100”后的编辑器

增加系统零点“－100”后，经存储且确认后，图 13-12 所示的系统根轨迹改变为图 13-16。图 13-13 显示的发散振荡改变为图 13-17。图中显示，其峰值时间 $t_p = 0.01 \sim 0.02\text{s}$，超调量 $\sigma\% < 30\%$，响应超调一、二次后，即回落到稳态值。这样的时域性能指标是非常理想的单位阶跃响应。

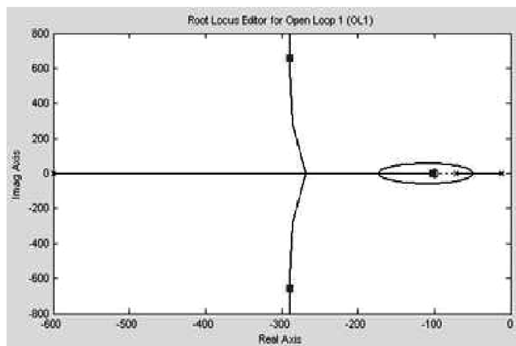


图 13-16　增加零点“－100”后的根轨迹

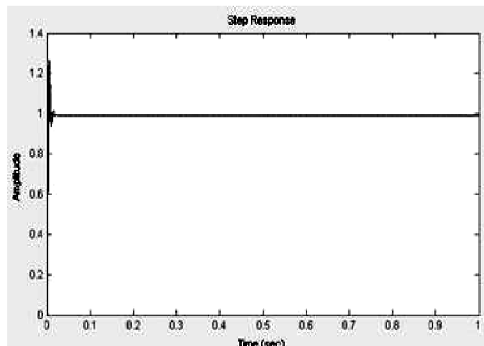


图 13-17　补偿校正后的系统单位阶跃响应

还可将图 13-15 中增加零点后的校正器 $C(s)=\dfrac{1+0.01s}{1}$ 与图 13-3 所示的动态结构图 sx2L1301.mdl 的前向通道串联得到模型 sx2L1301rot.mdl，如图 13-18 所示，并运行以下程序，绘制的阶跃响应曲线（见图 13-19）与图 13-17 一致，只是将横坐标缩短，使超调部分显示清楚。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1301rot');
s1=ss(a,b,c,d);sys=tf(s1);
t=0:0.001:0.06;step(sys,t),
```

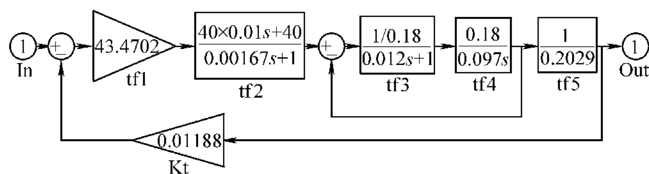


图 13-18　串联校正器的模型 sx2L1301rot.mdl

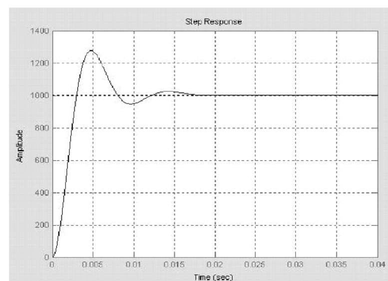


图 13-19　阶跃响应曲线

13.2　多闭环控制系统 MATLAB 计算及仿真

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》对多环调速系统进行了各种给定输入响应仿真，特别是对双闭环控制系统仿真作了全面介绍。在此，着重介绍带转速微分负反馈双闭环调速系统的仿真。

根据自动控制系统设计理论，ACR、ASR 均采用 PI 调节器的双闭环调速系统具有良好的稳态与动态性能，结构简单，工作可靠，设计也很方便，实践证明，它是一种应用最广的调速系统。然而，其动态性能不足之处就是转速超调，而且抗扰性能的提高也受到一定限制。

解决这个问题的一个简单有效办法就是在转速调节器上引入转速微分负反馈，这样就可以抑制转速超调直到消灭超调，同时可以大大降低动态速度降落。请看以下示例。

【例 13-2】 带转速微分负反馈的晶闸管—直流电机双闭环调速 V－M 系统动态结构图如图 13-20 所示。图中电机参数：$P_{nom}=40kW$，$n_{nom}=1000r/min$，$U_{nom}=440V$，$I_{nom}=104A$，电机电枢电阻 $R_a=0.3\Omega$，V－M 系统主电路总电阻 $R=0.5\Omega$，电枢主电路总电感 $L=200mH$，拖动系统运动部分飞轮矩 $GD^2=77.5N\cdot m^2$，过载电流倍数 $\lambda=2$，三相桥平均失控时间 $T_s=0.00167s$，要求系统调速范围 $D=20$，静差率 $s=10\%$，堵转(最大)电流 $I_{dbl}=2.1I_{nom}$，临界截止电流 $I_{dcr}=2I_{nom}$。ACR、ASR 均采用 PI 调节器，ASR 限幅输出 $U_{im}^*=-8V$，ACR 限幅输出 $U_{ctm}=8V$，若 $U_n^*=10V$ 时，$n=n_{nom}=1000r/min$。1）试计算系统参数：电机电动势转速比 C_e、触发整流装置放大系数 K_s、电流反馈系数 β、系统机电时间常数 T_m、系统测速反馈系数 α；2）估算主电路的总电感与电枢回路电磁时间常数 T_a；3）选择几个时间常数 T_{0i}、T_{0n}、T_{0dn} 与中频宽 h；4）计算电流调节器传递函数 $W_{ACR}(s)=K_i\dfrac{T_is+1}{T_is}$；5）计算转速调节器传递函数 $W_{ASR}(s)=K_n\dfrac{T_ns+1}{T_ns}$；6）对双闭环调速系统进行单位阶跃响应仿真与单位阶跃负载扰动响应仿真；7）对转速微分负反馈环节 $\dfrac{\alpha\tau_{dn}s}{T_{0dn}s+1}$ 进行参数计算；8）对带转速微分负反馈双闭环调速系统进行单位阶跃响应仿真与单位阶跃负载扰动响应仿真；9）对 6）与 8）两项仿真作简单比较；10）计算退饱和时间 t_t 与退饱和转速 n_t。

图 13-20　双闭环调速系统原理图

解：1）拖动调速系统几个参数的计算与选择。

① 额定磁通下的电机电动势转速比 $C_e=\dfrac{U_{nom}-I_{nom}R_a}{n_{nom}}$。

```
clear;syms Unom Inom nnom Ra Ce;
Unom=440;Inom=104;Ra=0.3;nnom=1000;
Ce=(Unom-Inom*Ra)/nnom,
```

程序运行后得到额定磁通下电机电动势转速比 $C_e=0.4088V\cdot min/r$。

② 满足系统要求时的触发整流装置放大系数 $K_s=\dfrac{C_en_{nom}+I_{dbl}R}{U_{ctm}}$。

```
clear;syms Ks nnom Ibdl R Ce Uctm;
Ce=0.4088;nnom=1000;Idbl=2*104;R=0.5;Uctm=8;
Ks=(Ce*nnom+Idbl*R)/Uctm,
```

程序运行后得到系统要求的触发整流装置放大系数 $K_s=64$。

③ 满足系统要求的电流反馈系数 $\beta=\dfrac{U_{im}^*}{I_{dm}}=\dfrac{U_{im}^*}{2I_{nom}}$。

```
clear;syms beta Uim Idm Inom;Uim=8;
Inom=104;Idm=2*Inom;beta=Uim/Idm,
```

程序运行后得到满足系统要求的电流反馈系数 $\beta=0.0385$V/A。

④ 电机拖动系统机电时间常数 $T_m=\dfrac{GD^2R}{375C_eC_m}$。

```
clear;syms GDpf R Ce Cm;GDpf=77.5;R=0.5;
Ce=0.4088;Cm=30*Ce/pi;Tm=(GDpf*R)/(375*Ce*Cm),
```

程序运行后得到电机拖动系统机电时间常数 $T_m=0.0648$s。

⑤ 满足系统要求的转速反馈系数 $\alpha=\dfrac{U_n^*}{n_{nom}}$。

```
clear;syms alpha Un nnom;Un=10;nnom=1000;alpha=Un/nnom,
```

程序运行后得到满足系统要求的转速反馈系数 $\alpha=0.01$V · min/r。

⑥ 选取电流环滤波时间常数 $T_{0i}=0.002$s；选取转速环滤波时间常数 $T_{0n}=0.01$s；选取转速微分滤波时间常数 $T_{0dn}=T_{0n}=0.01$s；选择中频宽 $h=5$。

2）电枢回路电磁时间常数 $T_l=\dfrac{L_\Sigma}{R}$。根据参考文献［32］提供的公式，先估算各种电感量，然后计算电枢回路电磁时间常数。

① 电枢电感量 $L_a=K_D\dfrac{U_{nom}}{2n_pn_{nom}I_{nom}}\times10^3$。

式中，U_{nom}为电机额定电压；n_p 为电机磁极对数；n_{nom}为电机额定转速；I_{nom}为电机额定电流；K_D 为计算系数，无补偿绕组时 $K_D=8\sim12$，此处取 $K_D=10$。

```
clear;syms La KD Unom np nnom Inom;
KD=10;Unom=440;np=3;nnom=1000;Inom=104;
La=KD*Unom*10^3/(2*np*nnom*Inom),
```

程序运行后得到电枢电感量 $L_a=K_D\dfrac{U_{nom}}{2n_pn_{nom}I_{nom}}\times10^3=7.0513$mH。

② 整流变压器的电感量 $L_T=K_T\times u_s\%\times\dfrac{U_2}{I_{nom}}$。

式中，$u_s\%$ 为整流变压器短路电压百分数，一般取 $u_s\%=5\%$；U_2 为整流变压器二次侧额定相电压，这里取 $U_2=550/\sqrt{3}$V；I_{nom}为电动机额定电流 $I_{nom}=104$A；K_T 为与整流电路形式有关的计算系数，三相全控桥 $K_T=3.9$，三相零式 $K_T=6.75$，单相全控桥 $K_T=3.18$。取 $K_T=3.9$、$u_s\%=5\%$、$U_2=550/\sqrt{3}$V、$I_{nom}=104$A，则 $L_T=0.5954$mH。

③ 限制电流脉动的电感量 $L_M=\dfrac{\dfrac{U_{dm}}{U_2}\times10^3}{2\pi f_d}\times\dfrac{U_2}{s_iI_{nom}}$。

式中，$\frac{U_{dm}}{U_2}$为整流电压最低谐波的幅值与电源相电压之比，与整流电路的形式有关，三相全控桥为0.46，三相零式为0.88，单相全控桥为1.2；f_d 为整流电流的最低谐波频率，与整流电路的形式有关，三相全控桥 $f_d=300\text{Hz}$，三相零式 $f_d=150\text{Hz}$，单相全控桥 $f_d=100\text{Hz}$；s_i 为电流脉动系数，这里取 $s_i=0.05$。

最后有 $L_M=\dfrac{\frac{U_{dm}}{U_2}\times10^3}{2\pi f_d}\times\dfrac{U_2}{s_iI_{nom}}=\dfrac{0.46\times10^3}{2\pi\times300}\times\dfrac{550}{\sqrt{3}\times0.05\times104}\text{mH}=14.9276\text{mH}$

④ 与负载串联的限制电流脉动的实际电感量 $L=L_M-(L_a+2L_T)$。

$$L=L_M-(L_a+2L_T)=15\text{mH}-(7.0513+2\times0.5954)\text{mH}=6.7579\text{mH}$$

⑤ 主电路总电感量。

$$L_\Sigma=L_a+2L_T+L=7.0513\text{mH}+2\times0.5954\text{mH}+6.7579\text{mH}=15\text{mH}$$

⑥ 电枢回路电磁时间常数 $T_a=\frac{L_\Sigma}{R}$。

```
clear;syms TL R Lsigma;Lsigma=15*10^(-3);R=0.5;TL=Lsigma/R,
```

程序运行后得到电枢回路电磁时间常数 $T_a=0.03\text{s}$。

3）电流调节器 $W_{ACR}(s)=K_i\dfrac{T_is+1}{T_is}$参数计算。根据自动控制系统设计理论，选取电流环滤波时间常数 $T_{0i}=0.002\text{s}$；选取积分时间常数 $T_i=T_a=0.03\text{s}$，三相桥整流电路平均失控时间 $T_s=0.00167\text{s}$，合并电流环小时间常数 $T_{\Sigma i}=T_s+T_{0i}=0.00167\text{s}+0.002\text{s}=0.00367\text{s}$，电流环开环增益 $K_I=\dfrac{1}{2T_{\Sigma i}}=\dfrac{0.5}{0.00367}\text{s}^{-1}=136.2398\text{s}^{-1}$，电流调节器的比例系数 $K_i=K_I\dfrac{T_iR}{\beta\ K_s}=0.8294$，所以电流调节器传递函数为 $W_{ACR}(s)=K_i\dfrac{T_is+1}{T_is}=0.8294\times\dfrac{0.03s+1}{0.03s}=\dfrac{0.03s+1}{0.0362s}$。

选取转速环滤波时间常数 $T_{0n}=0.01\text{s}$、转速微分滤波时间常数 $T_{0dn}=T_{0n}=0.01\text{s}$；选择中频宽 $h=5$。

4）转速调节器 $W_{ASR}(s)=K_n\dfrac{T_ns+1}{T_ns}$参数计算。根据自动控制系统设计理论，选取转速环滤波时间常数 $T_{0n}=0.01\text{s}$；以上已经确定 $T_{\Sigma i}=0.00367\text{s}$，合并转速环小时间常数则为 $T_{\Sigma n}=2T_{\Sigma i}+T_{0n}=2\times0.00367\text{s}+0.01\text{s}=0.0173\text{s}$；选择中频宽 $h=5$；选取转速调节器积分时间常数 $T_n=hT_{\Sigma n}=5\times0.0173\text{s}=0.0865\text{s}$；转速环开环增益 $K_N=\dfrac{h+1}{2h^2T_{\Sigma n}^2}=\dfrac{6}{50\times0.0173^2}\text{s}^{-2}=400.95\text{s}^{-2}$；转速调节器比例系数 $K_n=\dfrac{(h+1)\ \beta C_eT_m}{2h\alpha RT_{\Sigma n}}=\dfrac{6\times0.0385\times0.4088\times0.0648}{10\times0.01\times0.5\times0.0173}\text{s}^{-2}=7.0743\text{s}^{-2}$。所以转速调节器传递函数 $W_{ASR}(s)=K_n\dfrac{T_ns+1}{T_ns}=7.0743\times\dfrac{0.0865s+1}{0.0865s}=\dfrac{0.0865s+1}{0.0122s}$。

5）双闭环调速系统的 Simulink 动态结构图及其仿真。

① 创建带参数双闭环调速系统模型 sx2L1302.mdl，如图 13-21 所示。

根据图 13-20，图 13-21 中$\dfrac{R/C_e}{T_ms}=\dfrac{0.5/0.4088}{0.0648s}=\dfrac{18.8749}{s}$。

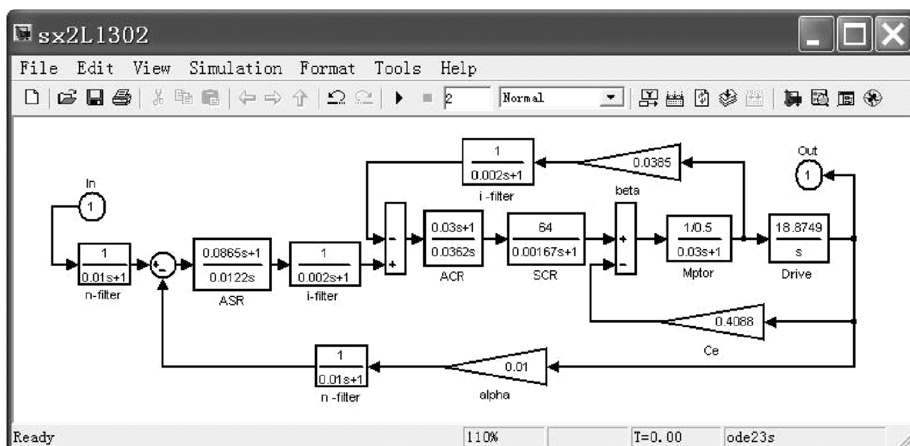


图 13-21　带参数的双闭环调速系统模型 sx2L1302. mdl

② 双闭环调速系统单位阶跃响应仿真。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1302');
s1=ss(a,b,c,d);sys=tf(s1);step(sys),
[y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后绘制的单位阶跃响应曲线如图 13-22所示。还算得双环系统单位阶跃响应的超调 $\sigma\%=36.2266\%$、峰值时间 $t_p=0.0847\text{s}$、调节时间 $t_s=0.2091\text{s}$。

③ 创建双闭环调速系统负载扰动仿真动态结构图 sx2L1302a. mdl，如图 13-23 所示。

④ 双闭环调速系统单位阶跃负载扰动响应仿真。

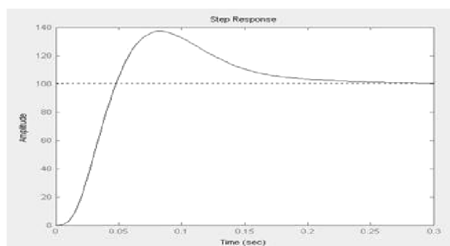


图 13-22　双环调速系统单位阶跃响应曲线

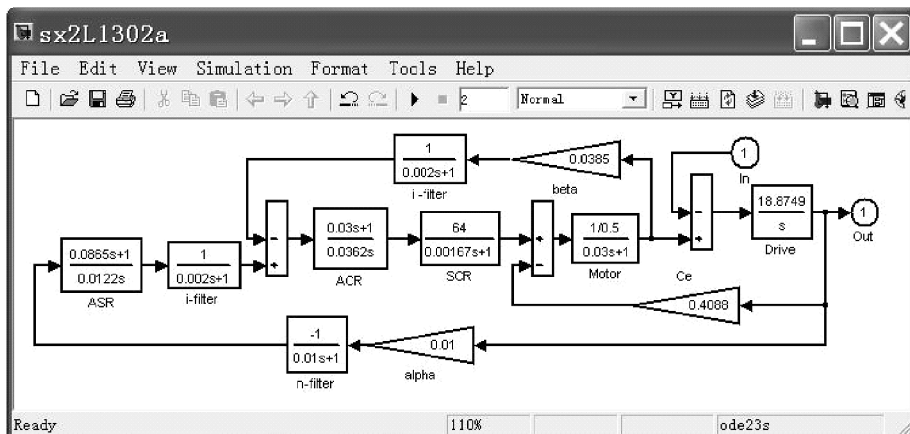


图 13-23　双闭环调速系统负载扰动仿真动态结构图 sx2L1302a. mdl

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1302a');s1=ss(a,b,c,d);t1=[0:0.01:2];
[y,t]=step(s1,t1);step(s1,t1);[detac,tp,tv]=dist(1,y,t),
```

程序运行后绘制单位阶跃负载扰动响应曲线，如图 13-24 所示，并计算出性能指标，即无基准量最大动态降落：$\Delta c_{max}\%=-0.5258\%$，最大动态降落时间：$t_p=0.05\text{s}$，恢复时间：

$t_v=0.16\text{s}$（对应 5% 的误差带）。

特别提请读者注意，如果模型 sx2L1302a. mdl 在 work 目录下的子目录里，运行此程序时，模型 sx2L1302a. mdl 必须处于打开状态。同时 MATLAB 系统必须停留在 work 里。

6）带转速微分负反馈的转速调节器的原理图与电流关系式。

带转速微分负反馈的转速调节器原理图如图 13-25 所示。

由图 13-25，根据欧姆定理，流经 C_{dn}、R_{dn}转速微分负反馈支路电流象函数为

$$i_{dn}(s)=\frac{\alpha n(s)}{R_{dn}+\dfrac{1}{sC_{dn}}}=\frac{\alpha C_{dn}sn(s)}{R_{dn}C_{dn}s+1} \tag{13-1}$$

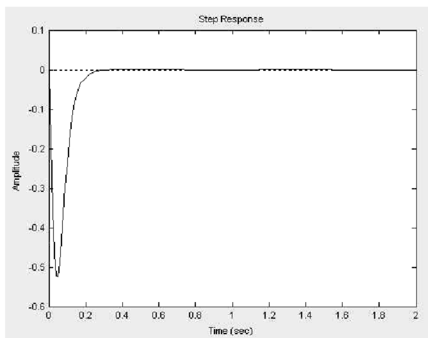


图 13-24　双环系统单位阶跃负载扰动响应曲线

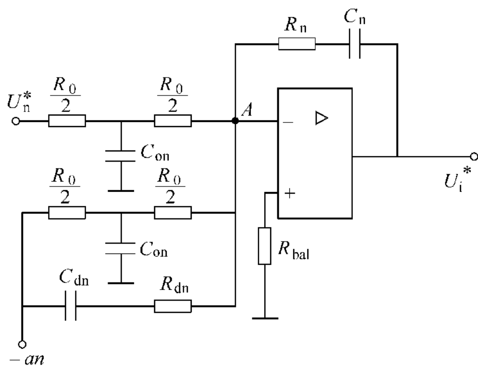


图 13-25　带转速微分负反馈的转速调节器原理图

在图 13-25 中对虚地点 A 写出 Kirchhoff 电流定理[21]：

$$\frac{U_n^*(s)}{R_0(T_{0n}s+1)}-\frac{\alpha n(s)}{R_0(T_{0n}s+1)}-\frac{\alpha C_{dn}sn(s)}{R_{dn}C_{dn}s+1}=\frac{U_i^*(s)}{R_n+\dfrac{1}{sC_n}} \tag{13-2}$$

整理后得

$$\frac{U_n^*(s)}{T_{0n}s+1}-\frac{\alpha n(s)}{T_{0n}s+1}-\frac{\alpha\tau_{dn}sn(s)}{T_{0dn}s+1}=\frac{U_i^*(s)}{K_n+\dfrac{\tau_n s+1}{\tau_n s}} \tag{13-3}$$

式中，$\tau_{dn}=R_0C_{dn}$，为转速微分时间常数；$T_{0dn}=R_{dn}C_{dn}$，为转速微分滤波时间常数。

7）转速微分负反馈环节$\dfrac{\alpha\tau_{dn}s}{T_{0dn}s+1}$参数的计算。

已经计算出转速反馈系数 $\alpha=0.01\text{V}\cdot\text{min/r}$。根据自动控制系统设计理论[21]，选取转速微分滤波时间常数 $T_{0dn}=T_{0n}=0.01\text{s}$。

$$\tau_{dn}\big|_{\sigma=0}\geqslant\frac{4h+2}{h+1}\times T_{\Sigma n}=\frac{20+2}{6}\times0.0173\text{s}=0.0634\text{s}$$

取 $\tau_{dn}=0.0634\text{s}$，那么$\dfrac{\alpha\tau_{dn}s}{T_{0dn}s+1}=\dfrac{0.01\times0.0634s}{0.01s+1}=\dfrac{0.000634s}{0.01s+1}$

8）带参数转速微分负反馈双闭环调速系统的 Simulink 动态结构图。

① 创建转速微分负反馈双环系统负载扰动仿真模型 sx2L1302b. mdl，如图 13-26 所示。

根据图 13-21 所示的模型 sx2L1302. mdl，将算得的转速微分负反馈环节$\dfrac{\alpha\tau_{dn}s}{T_{0dn}s+1}$参数带

入即得模型 sx2L1302b. mdl，以下仿真要用到它。

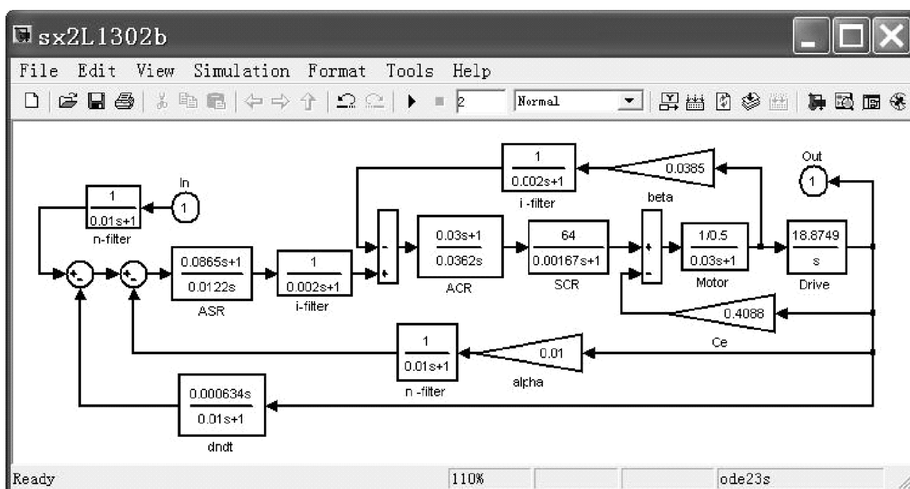


图 13-26　带转速微分负反馈环节$\frac{\alpha\tau_{dn}s}{T_{0dn}s+1}$的系统模型 sx2L1302b. mdl

② 转速微分负反馈双闭环调速系统的单位阶跃响应仿真。

```
clear;[a,b,c,d] = linmod('sx2L1302b');
s1 = ss(a,b,c,d);sys = tf(s1);step(sys),
[y,t] = step(sys);perf(2,y,t);
```

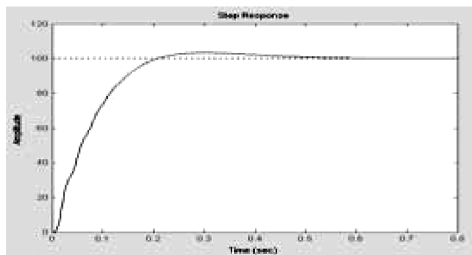


图 13-27　转速微分负反馈双环系统单位阶跃响应曲线

程序运行后绘制的单位阶跃响应曲线如图 13-27 所示。由图可见，双环系统单位阶跃响应的超调 $\sigma\% = 36.2266\%$；而带转速微分负反馈的双环系统 $\sigma\% = 3.2922\%$，超调大为降低，转速微分负反馈作用显示无疑。

③ 创建转速微分负反馈双闭环系统负载扰动仿真模型 sx2L1302c. mdl，如图 13-28 所示，以下仿真要用到它。

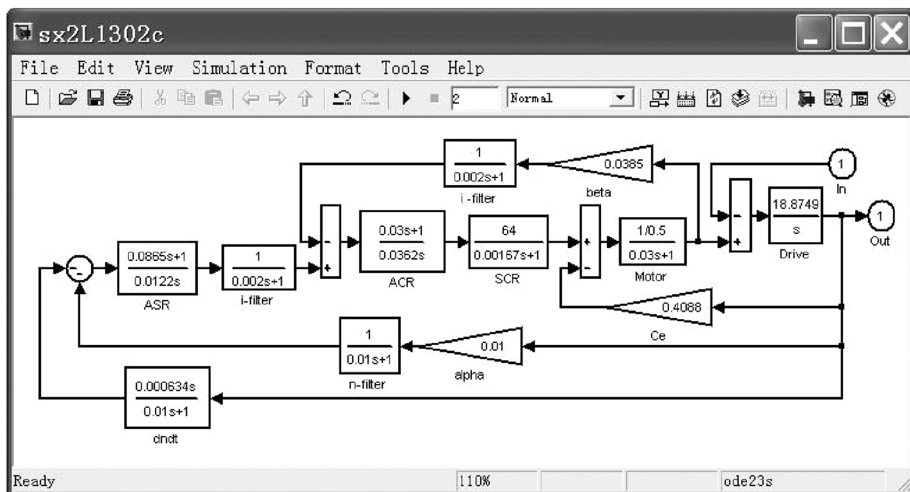


图 13-28　转速微分负反馈双闭环调速系统负载扰动仿真模型 sx2L1302c. mdl

④ 转速微分负反馈双闭环调速系统的单位阶跃负载扰动响应仿真。

```
clear;[a,b,c,d]=linmod('sx2L1302c');
s1=ss(a,b,c,d);t1=[0:0.01:2];
[y,t]=step(s1,t1);step(s1,t1);
[detac,tp,tv]=dist(1,y,t),
```

程序运行后绘制的单位阶跃负载扰动响应曲线如图 13-29 所示，比较图 13-24 与图 13-29及其计算的数据，带转速微分负反馈双环系统比普通双环系统，其单位阶跃负载扰动无基准量最大动态降落从 −0.5258% 下降为 −0.2305%；最大动态降落时间 $t_p=0.05\text{s}$ 上升到 $t_p=0.07\text{s}$，恢复时间 $t_v=0.16\text{s}$ 上升到 $t_v=0.29\text{s}$。

9）计算退饱和时间 t_t 与退饱和转速 n_t。根据自动控制系统设计理论[21]，有退饱和时间计算公式 $t_t=\frac{C_e n^* T_m}{R(I_{dm}-I_{dL})}+T_{\Sigma n}-\tau_{dn}$，还有退饱和转速计算公式 $n_t=n^*-\frac{R}{C_e T_m}(I_{dm}-I_{dL})\tau_{dn}$。这可以用以下 MATLAB 程序来计算退饱和时间 t_t 与退饱和转速 n_t：

```
clear;syms Ce nx Tm R Idm Idbl Inom IdL Tsigman taudn tt;
Ce=0.4088;nx=1000;Tm=0.0648;R=0.5;Inom=104;Idbl=2*Inom;
Idm=Idbl;IdL=0;Tsigman=0.0173; taudn=0.0634;
tt=Ce*nx*Tm/(R*(Idm-IdL))+Tsigman-taudn,
nt=nx-R*(Idm-IdL)*taudn/(Ce*Tm),
```

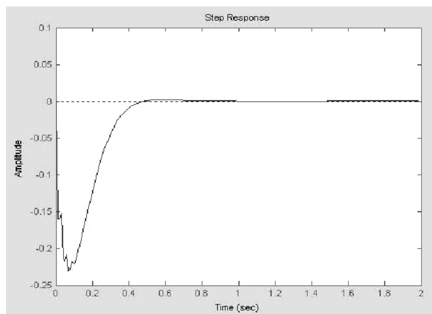


图 13-29　转速微分负反馈双环系统单位阶跃负载扰动响应曲线

程序执行后得到退饱和时间 $t_t=0.2086\text{s}$，退饱和转速 $n_t=751.0932\text{r/min}$。

13.3　转速负反馈闭环直流调速系统的 SimPowerSystems 模型仿真

电气系统 SimPowerSystems 模型与数学模型是 MATLAB 两类并行的仿真模型。《控制系统 MATLAB 计算及仿真》已详尽介绍，本书第 3 章又作了复习。在此再介绍两个特具代表性与广泛应用的系统：转速负反馈闭环直流脉宽 PWM−M 调速系统、带转速微分负反馈的双闭环直流调速系统仿真。熟悉并掌握系统使用模块的功能、连接、使用方法等是使用电气系统 SimPowerSystems 模型仿真的精髓，关注模块提取的路径与正确设置参数，则是成功仿真的基本功。

13.3.1　单闭环直流脉宽 PWM−M 调速系统的 SimPowerSystems 模型仿真

在第 3 章已经示例建立过类似的模型。

【例 13-3】　试用 SimPowerSystems 模型库模块，1）针对图 13-30 给定参数的直流电机，建立转速闭环直流脉宽 PWM−M 调速系统的仿真模型，要求电力电子器件采用绝缘栅双极型晶体管（IGBT），驱动装置为脉宽调制 PWM 脉冲发生器；2）对模型进行仿真。

解：1）对图 13-30 给出的直流电机，建立转速闭环直流脉宽 PWM−M 调速系统仿真模型，如第 3 章的 sx2L0301.mdl，现改名为 sx2L1303.mdl，如图 13-31 所示。

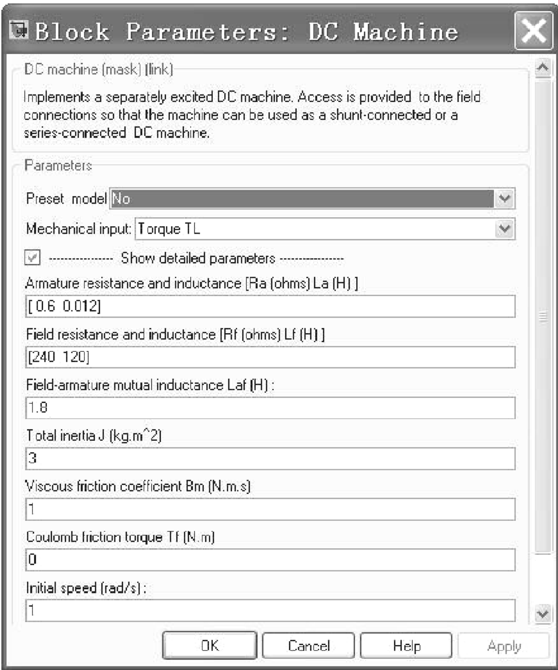


图 13-30　给定参数的直流电机

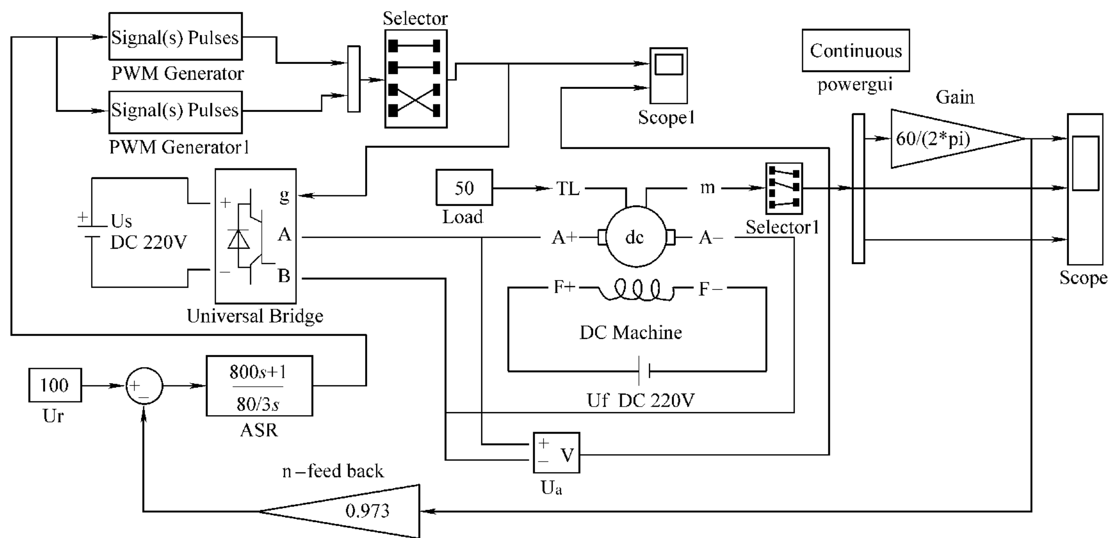


图 13-31　给定直流电机的转速闭环脉宽 PWM－M 调速系统仿真模型 sx2L1303. mdl

2）仿真模型使用模块的提取路径与参数设置。

① 仿真模型使用模块的提取路径。

直流电源 DC240V	Simulink\SimPoweSystem\Electrical Sources\DC Voltage Source
直流电机 DC Machine	Simulink\SimPoweSystem\Machines\DC Machine
电压测量 Ua	Simulink\SimPoweSystem\Measurements\Voltage Measurement
选路器 Selector	Simulink\Simulink\Signal Routing\Selector

增益模块 Gain　Simulink\Commonly Used Blocks\Gain
示波器 Scope　Simulink\Simulink\Sinks\Scop
分路器 Demux　Simulink\Commonly Used Blocks\Demux
代数求和模块 Sum　Simulink\Commonly Used Blocks\Sum
传递函数模块 Transfer Fcn　Simulink\Continuous\Transfer Fcn
常量模块 Constant　Simulink\Commonly Used Blocks\Constant
多功能桥式整流电路 Universal Bridge
　Simulink\SimPoweSystem\Power Electronics\Universal Bridge
脉宽调制 PWM 脉冲发生器
　Simulink\SimPoweSystem\Power Electronics\Control Blocks\PWM Generator

② 选路器 Selector 与 Selector1 参数设置如图 13-32 所示。

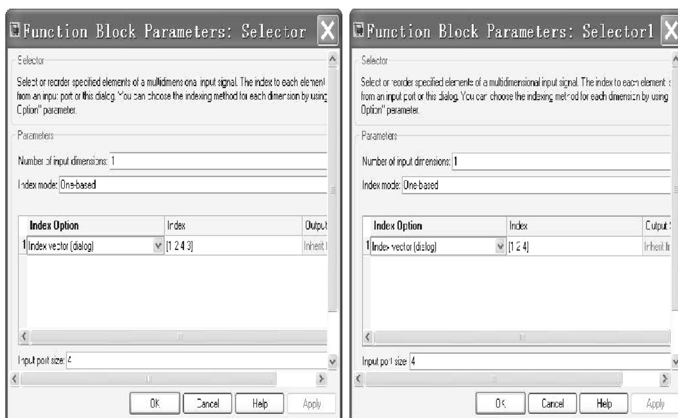


图 13-32　选路器 Selector 与 Selector1 参数设置

③ 直流电压 $U_s = 220\text{V}$，$U_f = 220\text{V}$。

④ 两组 PWM 发生器参数设置：Generator Mode 发生器工作模式选择为单桥臂（1 – arm bridge，2 pulses）、Carrier frequency（Hz）载波频率设置为 1080Hz。

⑤ 多功能桥 Universal Bridge 参数设置：Number of bridge arms 多功能整流桥模型桥臂的相数选为 2，Snubber resistance Rs（Ohms）吸收电阻设置为 1e5Ω，Snubber capacitance Cs（F）吸收电容设置为∞，Power Electronic device 电力电子器件种类选设为 MSFET/Diodes，Ron（Ohms）桥中电力电子器件内电阻设置为 1e – 3Ω。

3）转速调节器 ASR 的传递函数 $W_{\text{ASR}}(s) = 3 \times \dfrac{800s + 1}{80s}$。

4）模型仿真及仿真结果。在仿真模型图 13-31 中，首先在主菜单【Simulation】下【Configuration Parameters】设置模型图参数里，选择算法 Ode23tb，仿真时间 1s，其他设置取默认值；再单击主菜单【Simulation】下的【Start】子菜单或按下工具栏中的【▶】按钮，即刻可对 sx2L1303. mdl 模型进行仿真，仿真波形如图 13-33 所示。图中波形自上而下为转速 n、电枢电流 I_a 与电磁转矩 T_e。由图可见，在恒定直流控制电压 U_r 作用下，拖动恒定负载，电机转速 n 从 0 逐步上升到 100r/min 稍超调，振荡一次后逐渐稳定到与控制电压相对应的 100r/min 速度上。本系统仿真所得单位阶跃响应性能非常优良。

13.3.2　转速微分负反馈双环直流 V－M 调速系统的 SimPowerSystems 模型仿真

针对【例 13-3】给出的直流电机，再举一带转速微分负反馈的双环系统例子。

【例 13-4】　试用 SimPowerSystems 模型库模块，1）针对图 13-30 给出的直流电机，建立带转速微分负反馈的双闭环直流 V－M 调速系统仿真模型；2）对模型进行仿真。

解：1）对图 13-30 给出的直流电机，建立带转速微分负反馈的双闭环直流 V－M 调速系统仿真模型，如第 3 章的 sx2L0302. mdl，现改名为 sx2L1304. mdl，如图 13-34 所示。

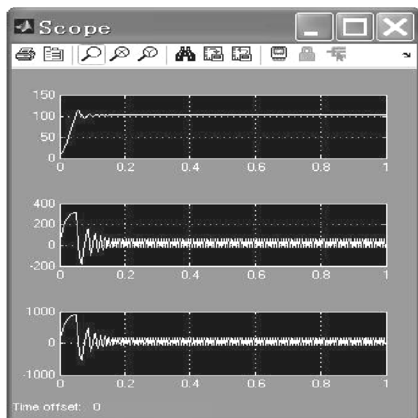


图 13-33　sx2L1303. mdl 仿真波形

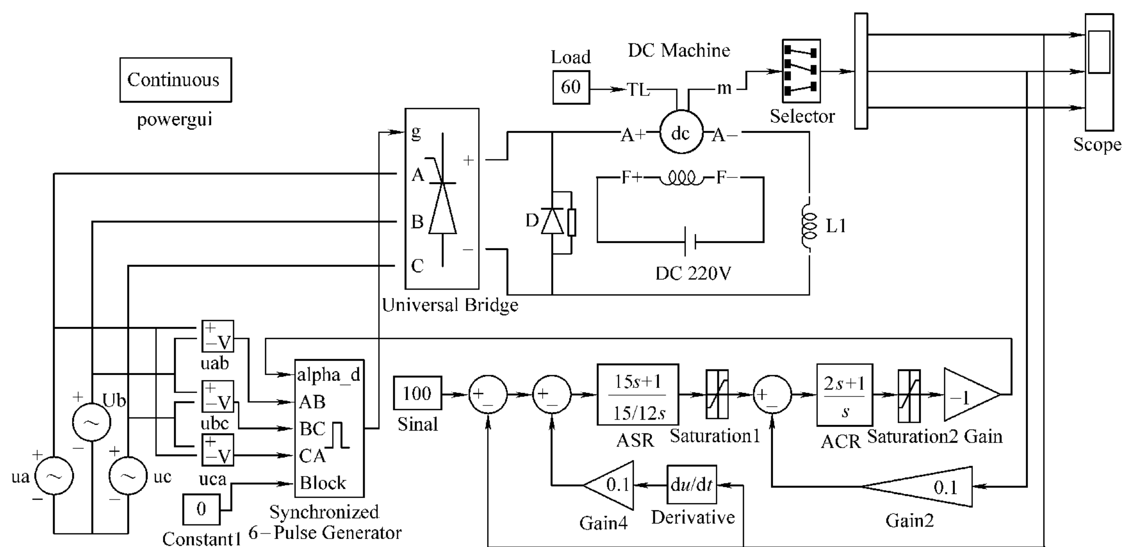


图 13-34　带转速微分负反馈的双闭环直流调速系统的模型 sx2L1304. mdl

2）仿真模型中几个主要模块的参数设置。

交流电压源模块如图 13-35 所示，同步 6 脉冲触发器如图 13-36 所示，多功能整流桥如图 13-37 所示，选路器如图 13-38 所示。

3）电流与转速调节器 ACR、ASR 传递函数分别为 $W_{ACR}(s)=\dfrac{2s+1}{s}$、$W_{ASR}(s)=\dfrac{1.5s+1}{1.5/12s}$。

4）模型仿真及仿真结果。在仿真模型图 13-34 中，选择算法 Ode23tb，仿真时间 2s，其他设置取默认值；对 sx2L1304. mdl 模型进行仿真，仿真波形如图 13-39 所示。图中波形自上而下为转速 n、电枢电流 I_a 与电磁转矩 T_e。由图可见，拖动恒定负载，电机转速 n 从 0 上升不超调也不振荡，逐渐上升到与控制电压相对应的 100r/min 速度上，转速微分负反馈的作用明显。

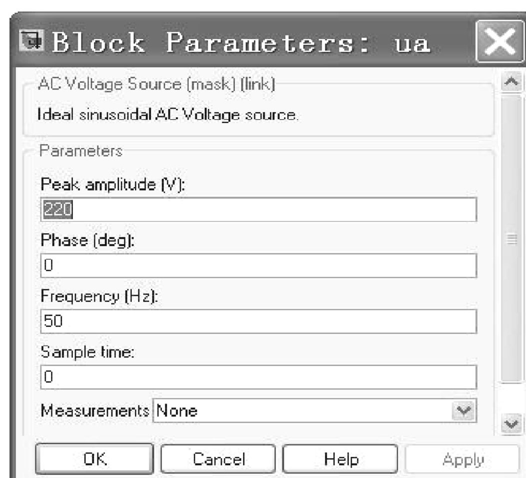


图 13-35　A 相交流电压源模块

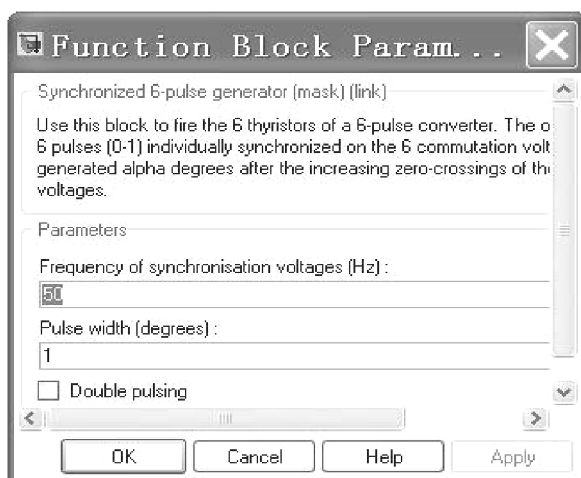


图 13-36　同步 6 脉冲触发器

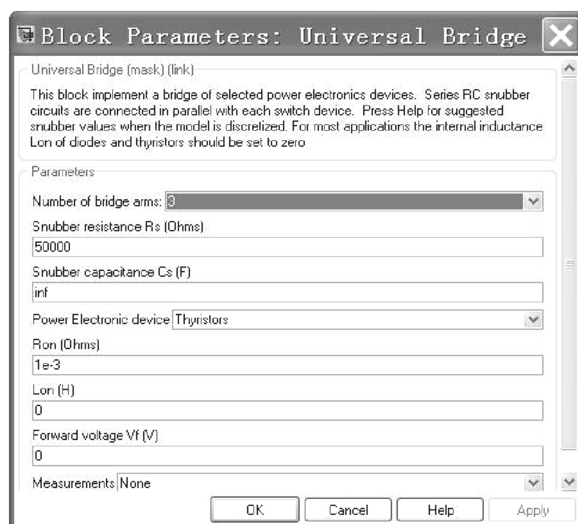


图 13-37　多功能整流桥

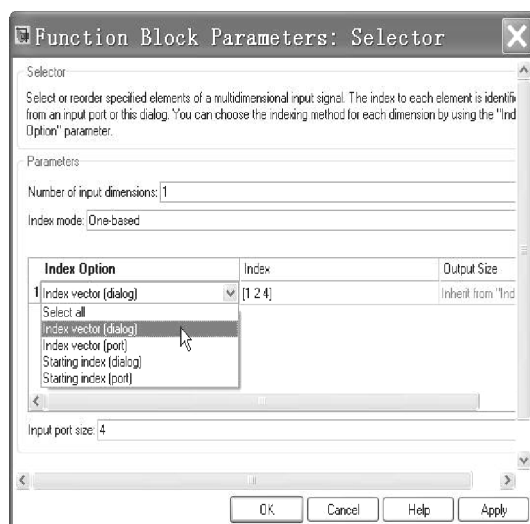


图 13-38　选路器

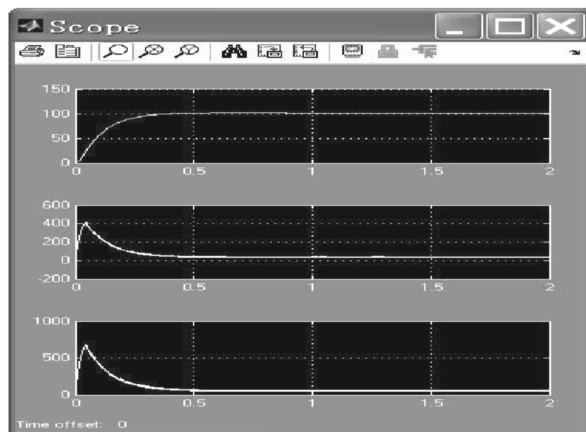


图 13-39　模型 sx2L1304. mdl 仿真波形

13.4　位置随动系统的 MATLAB 仿真与稳态误差分析

在《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中，对位置随动系统的概念、控制特点、位置随动系统的分析方法与品质指标已复习，并且对不同结构的随动系统进行了仿真。在此要对位置随动系统的串联动态校正设计进行举例，两个示例对应着两种不同被控对象的随动系统。此外，还要着重复习位置随动系统的稳态误差分析，并示例进行参数计算。

13.4.1　位置随动系统的动态校正设计

【例 13-5】 某小功率随动系统，采用位置、转速与电流多环结构，其位置环结构如图13-40所示。图中相敏整流与滤波环节传递函数为 $W_1(s)=\dfrac{K_{bs}}{T_{ph}s+1}$，转速环等效闭环传递函数为 $W_2(s)=\dfrac{1}{K_2\ (2T_{\Sigma n}s+1)}$，减速器传递函数 $W_3(s)=\dfrac{1}{is}$。已知其中参数：$K_{bs}=0.007\text{V}/(°)$；$T_{ph}=0.002\text{s}$；$T_{\Sigma n}=0.01\text{s}$；$K_2=0.00025\text{V}\cdot\text{s}/(°)$；$i=4$。1）试设计一位置调节器，使系统满足下述指标：①在单位速度输入信号 $\theta_m^*=t(°)$（t 的单位为 s）作用下，系统原理误差 $e_{sv}\leqslant 0.01°$；②系统阶跃响应动态性能指标超调量 $\sigma\%\leqslant 30\%$；调节时间 $t_s\leqslant 0.3\text{s}$。2）再设计一位置调节器，使系统满足下述指标：①在单位加速度信号 $\theta_m^*=t^2/2(°)$（t 的单位为 s）作用下，系统误差 $e_{sa}\leqslant 0.01°$；②系统阶跃响应动态性能指标超调量 $\sigma\%\leqslant 30\%$；调节时间 $t_s\leqslant 0.3\text{s}$。

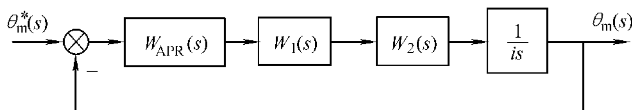


图 13-40　某小功率随动系统结构图

解：1）带入参数的系统环节传递函数。$W_1(s)=\dfrac{K_{bs}}{T_{ph}s+1}=\dfrac{0.007}{0.002s+1}$、$W_2(s)=\dfrac{1}{K_2\ (2T_{\Sigma n}s+1)}=\dfrac{1}{0.00025\times\ (0.02s+1)}$、$W_3(s)=\dfrac{1}{is}=\dfrac{1}{4s}$。

未校正系统的开环传递函数为

$$W_0(s)=W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot W_3(s)=\frac{0.007}{0.002s+1}\times\frac{1}{0.00025\ (0.02s+1)}\times\frac{1}{4s}$$

$$=\frac{7}{s\ (0.02s+1)\ (0.002s+1)}。$$

2）求 K、K_0 与 K_c。

根据自动控制理论与题意，本题给定系统为 Ⅰ 型系统，单位斜坡输入时，系统原理误差 $e_{ss}\leqslant 0.01°$，即有 $e_{sv}=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{K_v}\leqslant 0.01°$。

$$K_v=K\geqslant\frac{1}{e_{ss}}=\frac{1}{0.01}=100\text{s}^{-1}$$

式中，K 是系统开环增益，那么满足系统稳态性能指标要求的开环传递函数为

$$W_0(s)=\frac{100}{s(0.02s+1)(0.002s+1)}$$

由 $K_0=7$，位置调节器的增益 $K_c=\frac{K}{K_0}=\frac{100}{7}=14.2857$。

3）被控对象的传递函数。被控对象传递函数为 $W_0(s)=\frac{7}{s(0.02s+1)(0.002s+1)}$，而满足系统稳态性能指标要求的开环传递函数为 $W_0(s)=\frac{100}{s(0.02s+1)(0.002s+1)}$。

4）作原系统的 Bode 图与阶跃响应曲线，检查是否满足题目要求。根据系统校正设计的步骤，首先检查原系统的频域性能指标是否满足题目要求，并观察其阶跃响应曲线形状。为此给出如下调用自编函数 chec. m 列写的程序。

```
clear;K = 100;n1 = 1;d1 = conv(conv([1 0],[0.02 1]),[0.002 1]);
s1 = tf(K * n1,d1);s2 = [ ];chec(1,s1,s2);
```

程序运行后，可得未校正系统的 Bode 图与频域性能如图 13-41 所示，还有如图 13-42 所示的未校正系统的阶跃响应曲线。

由计算数据可知未校正系统的频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_h=14.8\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=158\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma=31.7°$　　剪切频率：$\omega_c=62.2\text{rad/s}$

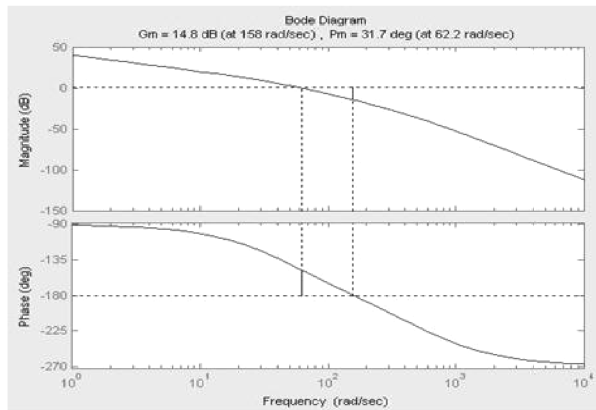


图 13-41　未校正系统的 Bode 图与频域性能

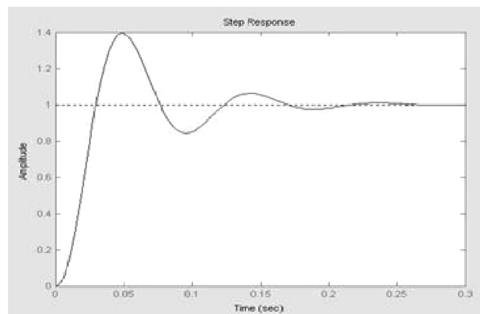


图 13-42　未校正系统的单位阶跃响应曲线

从计算的数据看，频域性能指标尚可，但是图 13-42 所示系统阶跃响应曲线表明，系统超调量 $\sigma\%\approx40\%>30\%$，不满足题目要求，必须校正。

5）求滞后校正器的传递函数。可将时域性能指标超调量 $\sigma\%=30\%$ 转换为频域性能指标相角裕度 γ。

```
clear;sigma =30; [gama] = sitoga(sigma);gama = vpa(gama * 180/pi,4),
```

程序运行后可知超调量 $\sigma\%=30\%$，相当于相角裕度 $\gamma=43.42°$。

将惯性环节时间常数 0.002s 改为 0.2s 并作恒等变换后，MATLAB 7.5 版本系统能运行以下调用自编函数 lagc. m 的程序求校正补偿器传递函数。

$$W_0(s)=\frac{100}{s(0.02s+1)(0.002s+1)}=\frac{10000}{s(0.02s+1)(0.2s+100)}$$

```
clear;K = 10000;n1 = 1;d1 = conv(conv([1 0],[0.02 1]),[0.2 100]);
sope = tf(K * n1,d1);gama = 48;[Gc] = lagc(1,sope,[gama]),
```

程序运行后得到的传递函数(包括增益)为 $G_c(s)=14.2857\times\dfrac{0.3051s+1}{0.7766s+1}$。

6）校验系统校正后频域与时域性能指标是否满足题目要求。系统包含有校正器的系统传递函数为

$$W_0(s)G_c(s)=\frac{7}{s(0.02s+1)(0.002s+1)}\times14.2857\times\frac{0.3051s+1}{0.7766s+1}$$
$$=100\times\frac{0.3051s+1}{s(0.02s+1)(0.002s+1)(0.7766s+1)}$$

① 由系统的开环增益 $K=100$，可知系统原理误差 $e_{sv}=\dfrac{1}{K}=0.01°$；

② 根据校正后系统的结构与参数，计算系统校正后频域与时域性能指标。

```
clear;K = 100;n1 = 1;d1 = conv(conv([1 0],[0.02 1]),[0.002 1]);s1 = tf(K * n1,d1);
n2 = [0.3051 1];d2 = [0.7766 1];s2 = tf(n2,d2);chec(2,s1,s2);
```

程序运行后，可得校正后系统的 Bode 图如图 13-43 所示。由图可知系统的：

幅值稳定裕度：$L_h=22.5\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g=155\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma=49.5°$　　剪切频率：$\omega_c=32.9\text{rad/s}$

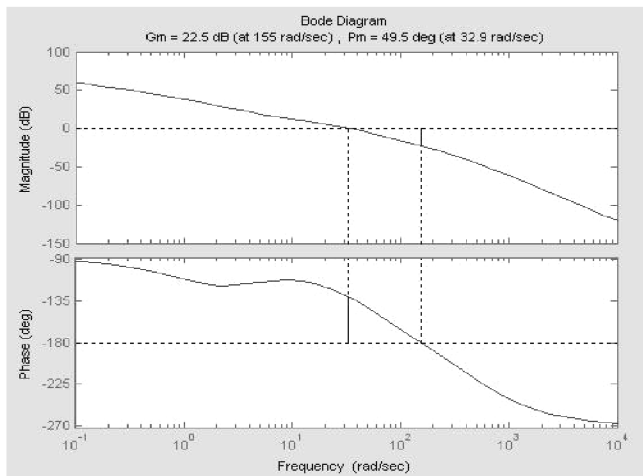


图 13-43　校正后系统的 Bode 图

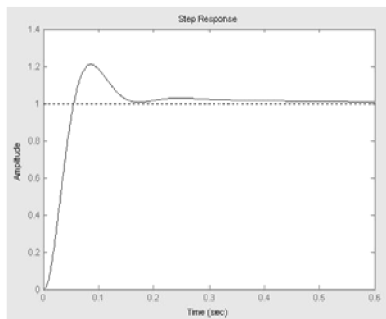


图 13-44　校正后系统单位阶跃响应曲线

程序运行后，有校正后系统的单位阶跃响应曲线（见图 13-44）及校正后系统的阶跃响应品质指标：超调量 $\sigma\%=19.8085\%$；峰值时间 $t_p=0.0920\text{s}$；调节时间(5%) $t_s=0.1227\text{s}$。

7）位置调节器 $G_c(s)=14.2857\times\dfrac{0.3051s+1}{0.7766s+1}$的说明。此位置调节器能使系统在跟踪单位速度输入信号 $\theta_m^*=t(°)$时，系统原理误差 $e_{ss}\leqslant0.01°$。系统校正前为Ⅰ型系统，经串联滞后校正后，仍为Ⅰ型系统，即系统对于给定输入信号只有Ⅰ型稳态精度。当然，系统也满足了其他指标要求。

8）将系统校正成Ⅱ型系统。根据题目要求系统能跟踪加速度输入，故应把系统校正成Ⅱ型系统。系统对象 $W_0(s)=\dfrac{100}{s(0.02s+1)(0.002s+1)}$，两个惯性环节时间常数均较小，根据自控系统理论[21]，位置调节器 APR 应选用 PI 调节器，其传递函数为 $W_{APR}(s)=K_p\dfrac{\tau_p s+1}{\tau_p s}$。

根据自动控制理论[21]，由给定系统阶跃响应超调量，根据系统被控对象为积分环节加两个惯性环节，选择系统中频宽度的设计方法，给出调用以下自编函数 prxd1. m 的 MATLAB 程序来计算位置调节器传递函数。

```
clear;Kbs=0.007;K2=0.00025;i=4;Kobj=Kbs/(K2*i);
Tph=0.002;Tsigman=0.01;Tsigma=2*Tsigman+Tph;
sigma=0.3;[Kp,taup]=prxd1(sigma,[Kobj,Tsigma]);
```

程序运行后得到位置调节器 APR 的传递函数为

$$W_{APR}(s)=K_p\frac{\tau_p s+1}{\tau_p s}=3.7106\times\frac{0.154s+1}{0.154s}=\frac{0.154s+1}{0.0415s}=24.0948\times\frac{0.154s+1}{s}$$

9）校正成的Ⅱ型系统是否满足题目要求。

① 检验在单位加速度信号 $\theta_m^*=t^2/2(°)$ 作用下的系统原理误差。

根据自动控制理论，由单位加速度信号 $\theta_m^*=t^2/2(°)$ 作用下的系统原理误差计算公式以及系统开环增益的概念，给出以下 MATLAB 程序。

```
clear;Kbs=0.007;K2=0.00025;i=4;Kp=3.7106;
taup=0.1540;K=Kbs*Kp/(K2*i*taup),esa=1/K,
```

程序运行后得到开环增益 $K=168.6636\text{s}^{-2}$，原理误差 $e_{sa}=0.0059°\leqslant0.01°$。

② 检验系统阶跃响应动态性能指标（超调量与调节时间）。

用以下 MATLAB 程序来计算系统阶跃响应的超调量与调节时间。

```
clear;K=7;n1=1;d1=conv(conv([1 0],[0.02 1]),[0.002 1]);s1=tf(K*n1,d1);
n2=[0.154 1];d2=[0.0415 0];s2=tf(n2,d2);chec(2,s1,s2);
```

程序运行后，可得校正后系统 Bode 图如图 13-45 所示。程序运行后还绘制校正后系统

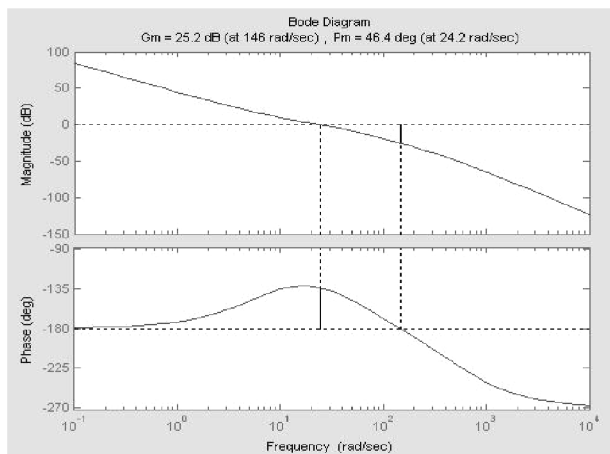


图 13-45　校正成Ⅱ型系统的 Bode 图

单位阶跃响应曲线（见图 13-46）及校正后系统阶跃响应品质指标：超调量 $\sigma\% = 29.7144\% < 30\%$；峰值时间 $t_p = 0.1176\text{s}$；调节时间（5%）$t_s = 0.2353\text{s} < 0.3\text{s}$。

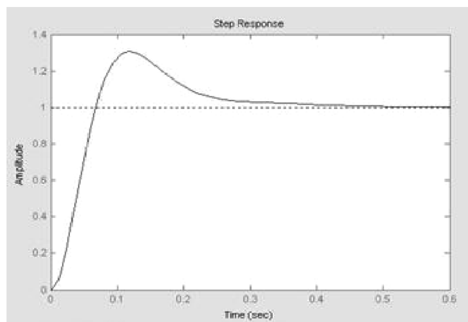


图 13-46　校正成Ⅱ型系统的单位阶跃响应曲线

【例 13-6】 已知随动系统固有部分传递函数为 $W_{obj}(s) = \dfrac{K_{obj}}{s\ (T_m s+1)\ (T_1 s+1)}$，式中 $K_{obj} = 15$；$T_m = 0.2\text{s}$；$T_1 = 0.02\text{s}$。要求设计一调节器，使系统满足下述性能指标：1）加速度品质因数 $K_a \geqslant 120\text{s}^{-2}$；2）系统阶跃响应超调量 $\sigma\% \leqslant 30\%$；调节时间 $t_s \leqslant 0.3\text{s}$。

解：1）被控对象传递函数为 $W_{obj}(s) = \dfrac{K_{obj}}{s(T_m s+1)(T_1 s+1)} = \dfrac{15}{s(0.2s+1)(0.02s+1)}$。

根据题意，有 $K_a = K \geqslant 120\text{s}^{-2}$。满足系统稳态性能指标要求的开环传递函数应为 $W_{obj}(s) = \dfrac{120}{s\ (0.2s+1)\ (0.02s+1)}$。

需要说明的是，系统加速度品质因数为 120s^{-2}，对应着Ⅱ型系统。未校正系统为Ⅰ型系统，现将此数据作为设计系统调节器的 Bode 图与阶跃响应的参考依据。

2）作原系统的 Bode 图与阶跃响应曲线，检查是否满足题目要求。根据系统校正设计的步骤，首先检查原系统的频域性能指标是否满足题目要求，并观察其阶跃响应曲线形状。为此给出如下调用自编函数 chec. m 列写的程序。

```
clear;K = 120;n1 = 1;d1 = conv(conv([1 0],[0.2 1]),[0.02 1]);
s1 = tf(K * n1,d1);s2 = [ ];chec(1,s1,s2);
```

程序运行后，可得未校正系统的 Bode 图与频域性能如图 13-47 所示，还有如图 13-48 所示的未校正系统阶跃响应曲线。由计算数据可知未校正系统的频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_h = -6.78\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = 15.8\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma = -12.5°$　　剪切频率：$\omega_c = 23.1\text{rad/s}$

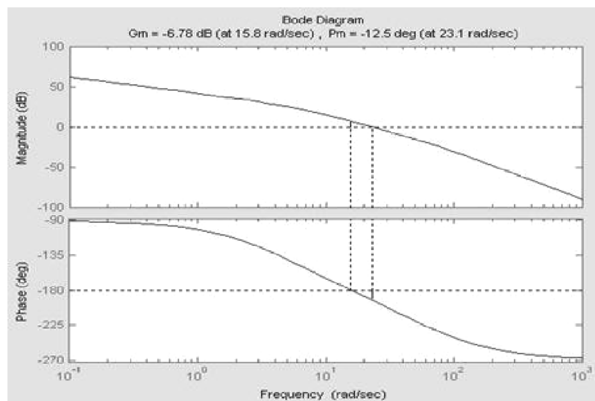


图 13-47　未校正系统的 Bode 图

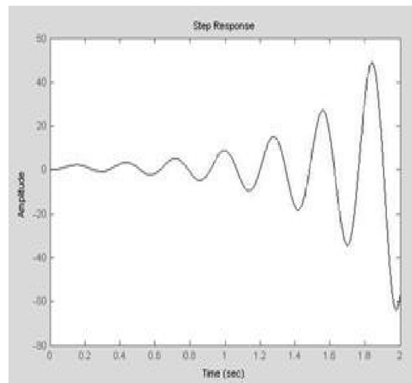


图 13-48　未校正系统单位阶跃响应曲线

计算表明，幅值稳定裕度与相角稳定裕度都为负值，这样的系统是不稳定的。再从图 13-48 可以看到，系统阶跃响应曲线呈现发散的振荡。这都说明系统不满足要求，必须校正。

3）将系统校正成Ⅱ型系统。因为要求系统能跟踪加速度输入，故应把系统校正成Ⅱ型系统，位置调节器 APR 应选用 PID 调节器，其传递函数为 $W_{\mathrm{APR}}(s)=\dfrac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{\tau_0 s(\tau_3 s+1)}$。

根据随动系统校正设计理论，由给定系统阶跃响应超调量与系统被控对象为积分环节加两个惯性环节，选择系统中频宽度的设计方法，给出以下调用自编函数 prxd2. m(当位置环的控制对象为 $W_{\mathrm{obj}}(s)=\dfrac{K_{\mathrm{obj}}}{s(T_{\mathrm{m}}s+1)(T_{\mathrm{l}}s+1)}$时，由给定系统阶跃响应超调量 $\sigma\%$，选择系统中频宽度 h，并将系统校正成Ⅱ型系统时，设计位置随动系统位置调节器的函数)的 MATLAB 程序来计算位置调节器传递函数。

```
clear;Kobj = 15;Tm = 0. 2;Tl = 0. 02;tau3 = 0. 005;sigma = 0. 3;
T2 = Tl + tau3;[tau0,tau1,tau2] = prxd2(sigma,[Kobj,Tm,Tl,tau3]);
```

程序运行后得到位置调节器 APR 传递函数为

$$W_{\mathrm{APR}}(s)=\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{\tau_0 s(\tau_3 s+1)}=\frac{(0.2s+1)(0.175s+1)}{0.1148s(0.005s+1)}$$

4）校正成的Ⅱ型系统是否满足题目要求。

① 检验系统加速度品质因数。根据自动控制理论，Ⅱ型系统加速度品质因数与系统开环增益概念，给出以下程序。

```
clear;Kobj = 15;tau0 = 0. 1148;K = Kobj/tau0;Ka = K,
```

程序运行后得到加速度品质因数 $K_{\mathrm{a}}=K=130.6620\mathrm{s}^{-2}>120\mathrm{s}^{-2}$，满足题目要求。

② 检验系统阶跃响应动态性能指标（超调量与调节时间）。

```
clear;K = 15;n1 = 1;d1 = conv(conv([1 0],[0.2 1]),[0.02 1]);
s1 = tf(K * n1,d1);K2 = 1/0. 1148;n2 = conv([0. 2 1],[0. 175 1]);
d2 = conv([1 0],[0. 005 1]);s2 = tf(K2 * n2,d2);chec(2,s1,s2);
```

程序运行后，可得校正系统的 Bode 图与频域性能如图 13-49 所示，还有如图 13-50 所示的校正系统阶跃响应曲线。由计算数据可知未校正系统的频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_{\mathrm{h}}=19.4\mathrm{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_{\mathrm{g}}=92.6\mathrm{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma=45.7°$　　剪切频率：$\omega_{\mathrm{c}}=21.6\mathrm{rad/s}$

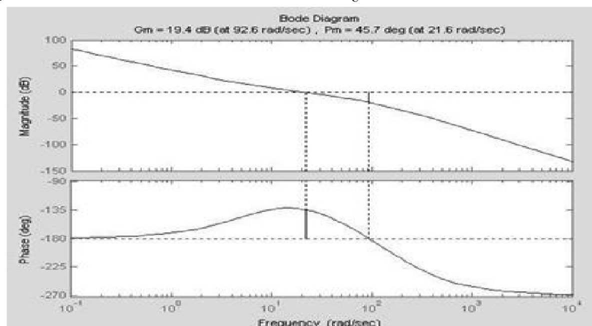


图 13-49　校正成Ⅱ型系统的 Bode 图

计算数据表明，校正后系统稳定裕度足够大。程序运行后还得到校正后系统的单位阶跃响应曲线（见图 13-50）及其系统的阶跃响应指标：超调量 $\sigma\% = 30.5729\% \approx 30\%$；峰值时间 $t_p = 0.1332$s；调节时间（5%）$t_s = 0.2715\text{s} < 0.3$s。可见校正后系统基本满足题目要求。

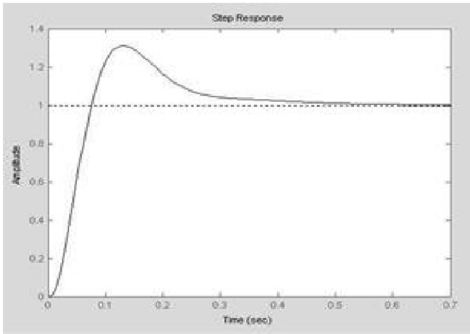


图 13-50　校正成Ⅱ型系统的单位阶跃响应曲线

13.4.2　位置随动系统的稳态误差分析

由位置随动系统基本概念可知，位置随动系统的位置指令是经常变化的，是一个随机变量，而要求系统输出量准确跟随给定量的变化，系统输出响应的快速性、灵活性、准确性成了位置随动系统的主要特征。也就是说，系统跟随性能成了主要性能指标。

位置随动系统稳态运行时，希望输出量尽量复现输入量，即要求系统有一定的稳态误差精度，产生的位置误差越小越好，系统动态响应过程越快越好。影响系统稳态精度，导致系统产生稳态误差的原因有三种：一是由检测元件引起的检测误差；二是由系统结构与输入信号产生的原理误差；三是负载扰动产生的扰动误差。

1. 检测误差

检测误差取决于检测元件本身精度，位置随动系统中常用位置检测元件如自整角机、旋转变压器、感应同步器等自身都有一定的精度等级，系统精度不可能高于所用位置检测元件的精度。检测误差是位置随动系统稳态误差的主要部分，是系统无法克服的。现将常用检测元件的误差列于表 13-1 中，以便选择使用时参考。

表 13-1　常用检测元件的误差

检测元件	误差范围
电位器	几度（°）
自整角机	≤1 度（°）
旋转变压器	几角分（′）
圆盘式感应同步器	几角秒（″）
直线式感应同步器	几微米（μm）
光电编码盘	360/N

2. 原理误差

选择自整角机位置随动系统作为分析对象，其动态结构如图 13-51 所示。

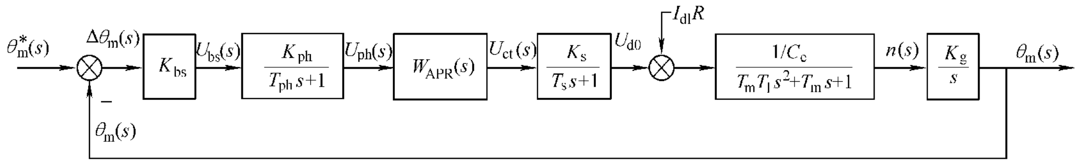


图 13-51　自整角机位置随动系统动态结构图

图 13-51 中，1）自整角机传递函数为比例环节，其比例(放大)系数为

$$K_{bs}=\frac{U_{bs}}{\Delta\theta_m}\approx U_{bsm}\Big|_{|\Delta\theta_m\leqslant 10^\circ|}\text{V/rad}=\frac{U_{bsm}}{57.3}\text{V/(°)}$$

通常在 $|\Delta\theta_m|\leqslant 10^\circ$ 的范围里，K_{bs} 可认为是一恒值，常用的自整角机 K_{bs} 值约为 0.6～1.2V/(°)。U_{bsm} 是自整角机输出正弦电压振幅。$\theta_m^* - \theta_m = |\Delta\theta_m|$，$\theta_m^*$ 是发送机机械转角，θ_m 是接收机机械转角。

2）相敏整流（放大）器为惯性环节，其传递函数为

$$W_{URP}(s)=\frac{K_{ph}}{T_{ph}s+1}$$

式中，K_{ph} 为相敏整流（放大）器放大系数；T_{ph} 为阻容滤波时间常数。

3）可逆功率放大器既可采用可逆晶闸管可控整流器（大功率随动系统），也可采用晶闸管脉冲调宽型（PWM）开关放大器（小功率随动系统），其传递函数为

$$W_s(s)=\frac{K_s}{T_s s+1}$$

式中，K_s 为晶闸管装置放大系数；T_s 为晶闸管失控时间。

4）执行电机常采用直流伺服电机，其传递函数为振荡环节 $W_{MOT}(s)=\dfrac{1/C_e}{T_m T_l s^2+T_m s+1}$。

5）减速器对随动系统的工作有重大影响，减速器速比的选择与分配将影响到系统的惯性矩，并进而影响系统快速性。一般地说，减速器输入量是执行电机转速 n，其单位常为 r/min，减速器输出量是机械转角 θ_m(°)，其传递函数为一积分环节，即

$$W_g(s)=\frac{6}{is}=\frac{K_g}{s}$$

式中，$K_g=\dfrac{6}{i}$，为减速器放大系数；i 为减速器减速比。

6）如果把系统校正成Ⅱ型系统（一般情况都是如此），位置调节器 APR 应选用 PI 调节器，其传递函数为 $W_{APR}(s)=K_p\dfrac{\tau_p s+1}{\tau_p s}$。

再将《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中系统原理误差列于表 13-2 中。

表 13-2　系统给定输入信号作用下的稳态误差

型别	K_p	K_v	K_a	$r(t)=r_0$	$r(t)=v_0t$	$r(t)=a_0t^2/2$
0	K	0	0	$r_0/(1+K)$	∞	∞
Ⅰ	∞	K	0	0	v_0/K	∞
Ⅱ	∞	∞	K	0	0	a_0/K
Ⅲ	∞	∞	∞	0	0	0

表 13-2 中的 K 为闭环系统的开环增益，K_p、K_v、K_a 分别为系统的静态位置误差系数、静态速度误差系数与静态加速度误差系数，并注意输入信号的量值系数 r_0、v_0 与 a_0。需要指出的是，表 13-2 中的数据是用 Laplace 变换终值定理推导出的，所以，有时直接用 Laplace 变换终值定理求解稳态误差也是常见的。

3. 扰动误差

表 13-2 中数据是系统原理误差，实际上随动系统所承受的各种扰动都会影响到系统的跟踪精度。最常见的扰动作用如图 13-52 所示。第一类是负载扰动，例如阵风对雷达天线是一种随机性负载扰动，轧机轧辊压下时的阻力是对压下随动系统的恒值负载扰动；第二类是系统参数发生变化，例如放大器零漂与元件老化或温度变化所引起的参数变化，以及电源电压波动等；第三类是噪声干扰，各种噪声干扰大都是从检测装置经反馈通道进入系统的。

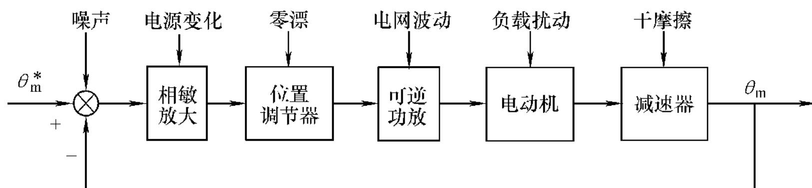


图 13-52　位置随动系统中的扰动

除噪声干扰外，无论负载扰动还是参数扰动，尽管扰动的形式不同，但它们都作用在前向通道上，只是作用点不同，所以它们对系统产生的影响是相似的。

各种扰动引起的扰动误差，只要明确扰动的具体作用点，根据系统动态结构图，求出误差相对于扰动之间的传递函数，都可以用拉氏变换的终值定理来进行计算。

下面以恒负载扰动为例来说明其稳态误差的计算。

【例 13-7】　自整角机位置随动系统结构如图 13-53 所示。已知系统数据如下：伺服电机为 S661 型，230W，110V，2.9A，2400r/min，$R_a=3.4\Omega$；电枢回路总电阻 $R=5.1\Omega$，减速器速比 $i=60$；自整角机放大系数 $K_{bs}=1.25\text{V}/(°)$；相敏与功放总增益 $K_{ph}K_s=200$；自整角机的检测误差 $e_d=0.5°$；实际负载转矩为 $T_L=20\text{N}\cdot\text{m}$。试求输入轴为最高转速 $\dot{\theta}_m^*=200(°)/\text{s}$ 时系统的稳态误差是多少？

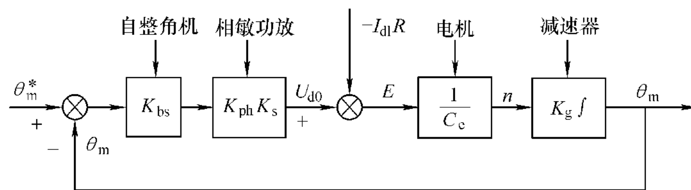


图 13-53　自整角机位置随动系统静态结构图

解： 1）系统检测误差 e_d。系统的检测误差就是自整角机的检测误差 $e_d=0.5°$。

2）系统原理误差 e_{sv}。根据系统开环增益的概念，由图 13-53 可知，系统的开环增益为

$$K=K_{bs}K_{ph}K_s\text{K}_g/C_e$$

已知 $K_{bs}=1.25\text{V}/(°)$；$K_{ph}K_s=200$；$K_g=6/i=6/60$。

$$C_e=\frac{U_{nom}-I_{nom}R_a}{n_{nom}}=\frac{110-2.9\times3.4}{2400}\text{V}\cdot\text{min/r}=0.0417\text{V}\cdot\text{min/r}$$

当 $\theta_m^*=200t(°)$ 时，$\dot{\theta}_m^*=200(°)/\text{s}$。若输入写成 $v(t)=v_0t$ 时，则 $v_0=200(°)$。那么 e_{sv}

$$=\frac{v_0}{K}=\frac{200}{1.25\times200\times0.1\times\dfrac{1}{0.0417}}=0.3336°。$$

3）系统扰动误差 e_t。根据自动控制原理[15]，系统扰动误差 $e_t=\dfrac{I_{dL}R}{K_1}=\dfrac{I_{dL}R}{K_{bs}K_{ph}K_s}$。式中，$K_1$ 是误差信号到干扰作用点之间的增益。

$$C_m=9.55C_e=9.55\times0.0417\text{N}\cdot\text{m/A}=0.398\text{N}\cdot\text{m/A}$$

负载转矩折算到电动机轴上的等效转矩 $T_L=\dfrac{20}{i}=20/60\text{N}\cdot\text{m}=0.333\text{N}\cdot\text{m}$，对应的负载电流 $I_{dL}=\dfrac{T_L}{C_m}=\dfrac{0.333}{0.398}\text{A}=0.838\text{A}$。

系统扰动误差 $e_t=\dfrac{I_{dL}R}{K_{bs}K_{ph}K_s}=\dfrac{0.838\times5.1}{1.25\times200}=0.0171°$。

4）系统稳态误差 e_{ss}。

$$e_{ss}=e_d+e_{sv}+e_t=0.5°+0.3336°+0.0171°=0.8507°。$$

13.5 过程控制系统的 MATLAB 计算及仿真

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》对生产过程控制的特点、过程控制中被控对象的动态特性、过程控制系统的性能指标、控制系统中延迟特性的处理等内容作了复习，还对 Smith（史密斯）预估器控制作了重点介绍，并且对不同结构的过程控制系统进行了仿真。教材示例都是已知调节器结构与参数。在此要对过程控制系统串联动态校正设计进行举例，即要着重介绍如何求得调节器结构与参数。这部分内容要用到《控制系统 MATLAB 计算及仿真》校正设计的有关概念与自编函数。

13.5.1 简单回路控制系统的动态校正设计

过程控制中的单回路控制即简单控制系统，是由广义对象与调节器构成的负反馈闭环控制系统。工程实际中，单回路控制系统仍占过程控制总量的 85% 以上。

【例 13-8】 已知过程控制系统被控广义对象为一个带延迟的惯性环节，其传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{20s+1}e^{-2.5s}$，试用 Ziegler – Nichols 整定公式对系统进行 PI、PID 校正设计，校正后再施行 Smith 预估器控制并仿真。

解： 1）检测未校正过程控制系统的频域性能指标。

```
clear; K=1;T=20;tau=2.5;n1=[K];d1=[T 1];G1=tf(n1,d1);
[np,dp]=pade(tau,2);Gp=tf(np,dp);G=G1*Gp;margin(G);
```

程序运行后得到未校正过程控制系统的 Bode 图如图 13-54 所示。图中显示，未校正过程控制系统的相角稳定裕度为 –180°，这样的系统不校正是绝对不行的。

2）用 Ziegler – Nichols 整定公式进行 PI、PID 校正设计。用 Ziegler – Nichols 整定公式进行 PI、PID 校正设计的 MATLAB 程序如下。

```
clear;K=1;T=20;tau=2.5;n1=[K];d1=[T 1];G1=tf(n1,d1);
[np,dp]=pade(tau,2);Gp=tf(np,dp);
[Gc2,Kp2,Ti2]=zn01(2,[K,T,tau]);
[Gc3,Kp3,Ti3,Td3]=zn01(3,[K,T,tau]);
```

```
Gcc2 = feedback(G1 * Gc2,Gp);
set(Gcc2,'Td',tau);step(Gcc2);hold on;
Gcc3 = feedback(G1 * Gc3,Gp);
set(Gcc3,'Td',tau);step(Gcc3);
gtext('1 PI control'),gtext('2 PID control'),
```

程序运行后得到 PI 与 PID 调节器的传递函数分别为

$$G_c(s)=\frac{59.94s+7.2}{8.325s}、G_c(s)=\frac{60s^2+48s+9.6}{5s}$$

程序运行后还绘制出校正系统的阶跃响应曲线，如图 13-55 所示。由曲线可看出，系统的超调量都超过 60%，这样的时域响应指标是不能令人满意的。

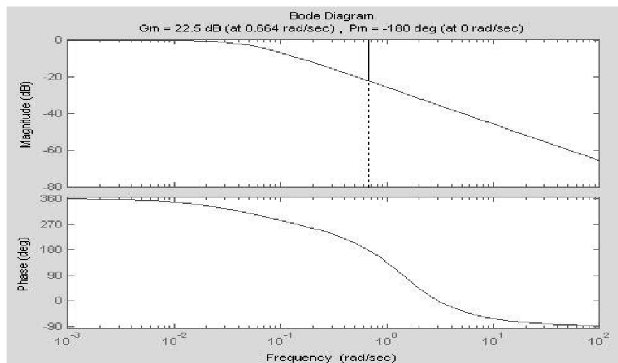


图 13-54　未校正过程控制系统的 Bode 图

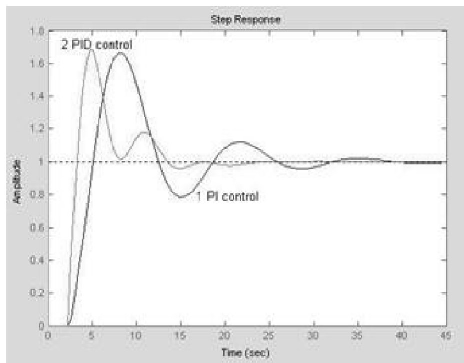


图 13-55　校正后控制系统阶跃响应曲线

3）Smith 预估器控制。

① Smith 预估器控制原理等效变换。由《控制系统 MATLAB 计算及仿真》可知，Smith 预估器控制的原理如图 13-56 所示。图中，$G_0(s)e^{-\tau s}$为广义对象数学模型，其中 $G_0(s)$为不包含延迟时间 τ 的对象模型；$G_c(s)$为系统的一般 PID 调节器；$G_s(s)$为 Smith 预估补偿器，$G_s(s)=G_0(s)(1-e^{-\tau s})$。

设 $C(s)=X_1$，$G_s(s)$的输出为 X_2，那么 $G_c(s)$的输入量为 $R(s)-X_1-X_2$。

当 Smith（史密斯）预估器控制原理（见图 13-56）画成图 13-57 时，$G_c(s)$的输入量仍然为 $R(s)-X_1-X_2$，系统中其他方框传递函数与其输入输出量都不变，故两图等效。

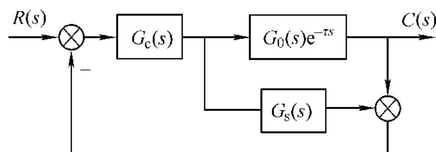


图 13-56　Smith 预估器控制原理图

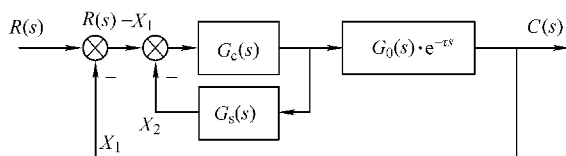


图 13-57　Smith 预估器控制原理等效变换图

根据图 13-57，有关系式

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{G_c(s)}{1+G_c(s)G_s(s)}G_0(s)e^{-\tau s}}{1+\dfrac{G_c(s)}{1+G_c(s)G_s(s)}G_0(s)e^{-\tau s}}=\frac{G_c(s)G_0(s)e^{-\tau s}}{1+G_c(s)G_s(s)+G_c(s)G_0(s)e^{-\tau s}}$$

$$= \frac{G_c(s)G_0(s)e^{-\tau s}}{1+G_c(s)G_0(s)(1-e^{-\tau s})+G_c(s)G_0(s)e^{-\tau s}}$$

$$= \frac{G_c(s)G_0(s)e^{-\tau s}}{1+G_c(s)G_0(s)} = \frac{G_c(s)G_0(s)}{1+G_c(s)G_0(s)}e^{-\tau s}$$

此关系式对应的等效动态结构图为图 13-58，该图是以下仿真程序的依据。

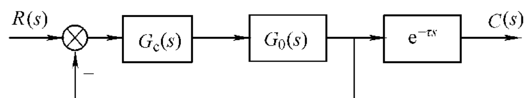


图 13-58　Smith 预估器等效控制原理图

② PI 与 PID 调节器校正后再施行 Smith 预估器控制。施行 Smith 预估器控制并仿真的 MATLAB 程序如下。

```
clear;K=1;T=20;tau=2.5;n1=[K];d1=[T 1];G1=tf(n1,d1);[np,dp]=pade(tau,2);Gp=tf(np,dp);
n21=[59.94 7.2];d21=[8.325 0];G21=tf(n21,d21);n22=[60 48 9.6];d22=[0 5 0];G22=tf(n22,
d22);
Gc1=feedback(G1*G21,1);Gc2=feedback(G1*G22,1);set(Gc1,'Td',tau);step(Gc1);hold on;
set(Gc2,'Td',tau);step(Gc2),gtext('1 PI control'), gtext('2 PID control'),
```

程序运行后，还绘制出校正系统的阶跃响应曲线，如图 13-59 所示。由曲线可看出，系统阶跃响应的超调量都不超过 10%，这样的时域指标非常优良，可见 Smith 控制的特殊作用。

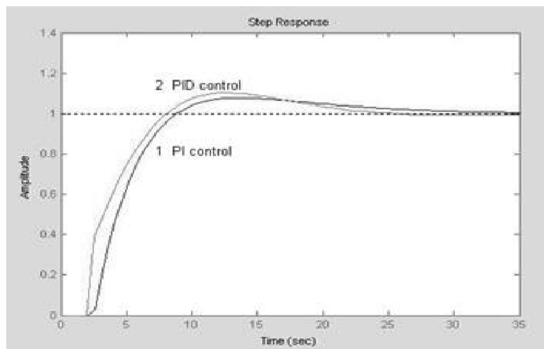


图 13-59　校正后施行 Smith 控制系统阶跃响应曲线

4）在 Simulink 中进行仿真。根据图 13-57，做出系统用 PI 调节器校正后再施行 Smith 预估器控制的动态模型图 sx2L1308. mdl（见图 13-60）。

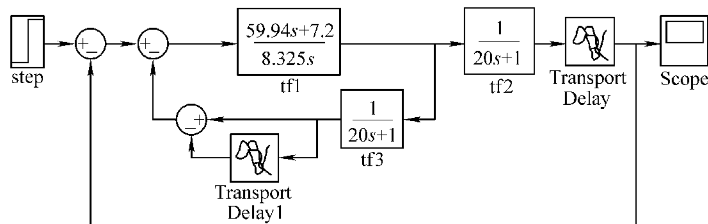


图 13-60　系统动态模型 sx2L1308. mdl

图 13-60 中模块“Step”为单位阶跃信号模块，即“Step time”设置为“0”，“Initial value”设置为“0”，“Final value”设置为“1”，“Sample time”设置为“0”；图中模块“Transport Delay”均为延迟模块，设置相同即“Time delay”设置为“2.5”，“Initial input”设置为“0”。图中模块“Scope”为示波器模块，将示波器模块工具栏按钮【Parameters】的卡片“General”中的“Time range”设置为“auto”，其他均为默认设置。如果需要，有时还要单击一下工具栏按钮【Autoscale】。

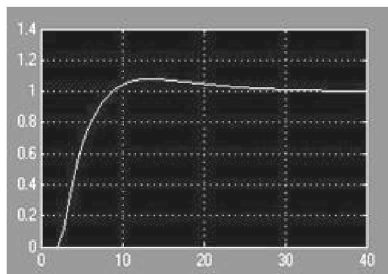


图 13-61　单位阶跃响应仿真

在“sx2L1308.mdl”模型窗口（见图 13-60）中，先将工具栏的空白框【Simulationstop time】设置为“40”(秒)；然后执行菜单【Simulation】中的【Start】命令，即对模型系统进行阶跃给定响应仿真，再双击示波器图标即可得仿真结果曲线，如图 13-61 所示。可见，图 13-61 所示仿真曲线与通过程序仿真的阶跃响应(图 13-59 中的曲线 1)是一样的。

13.5.2　前馈控制系统的 MATLAB 计算及仿真

前馈控制是将扰动信号经前馈控制器处理后用以消除扰动对被调量的影响，它是按扰动进行的补偿控制。不变性原理是实现前馈控制的理论基础。“不变性”是指控制系统的被调量不受扰动作用的影响，与扰动完全无关，或在一定准确度下无关。

前馈控制系统框图如图 13-62 所示。图中 $G_f(s)$ 是扰动通道的传递函数，$G_M(s)$ 是前馈校正器的传递函数，由图可知 $C(s)=G_f(s)F(s)+G_M(s)G_0(s)F(s)$。根据不变性原理，应有 $\frac{C(s)}{F(s)}=0$，得前馈校正器的模型为 $G_M(s)=-\frac{G_f(s)}{G_0(s)}$。

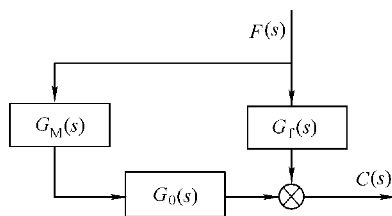


图 13-62　前馈控制系统框图

【例 13-9】　已知一前馈—反馈复合控制系统如图13-63 所示，系统的控制通道特性、扰动通道特性传递函数分别为 $G_0(s)=20\frac{1}{s(s+2)(2s+3)}$；$G_f(s)=\frac{5}{s+2}$。试对系统进行滞后校正，使系统的相角稳定裕度 $\gamma\geqslant45°$；设计前馈控制系统，使系统能克服扰动对系统的影响。

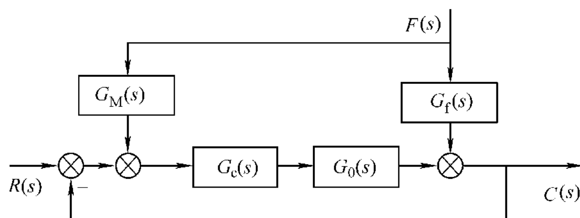


图 13-63　前馈—反馈复合控制系统结构框图

解：1）检查原系统跟随性能指标。

```
clear;k0 =20;n1 =[1];d1 =conv(conv([1 2],[2 3]),[1 0]);
s1 =tf(k0 * n1,d1);figure(1);margin(s1);pause;
figure(2);sys =feedback(s1,1);step(sys),
```

程序运行后，可得未校正系统 Bode 图(见图 13-64)与频域性能指标，还有如图 13-65 的未校正系统阶跃响应曲线。由计算数据可知未校正系统频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_h = 0.424\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = 1.73\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma = 1.39°$　　剪切频率：$\omega_c = 1.69\text{rad/s}$

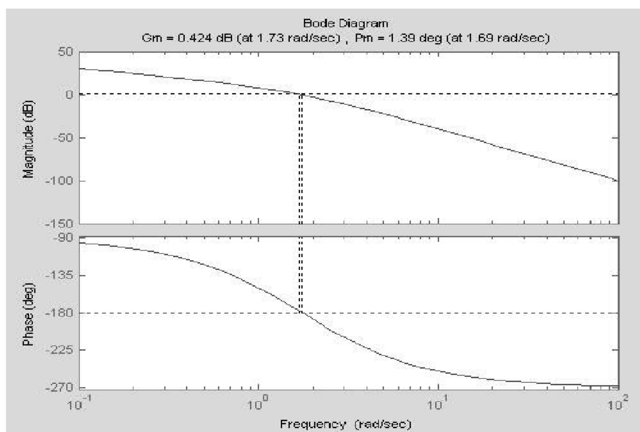


图 13-64　未校正系统的 Bode 图

由图 13-65 可见，未校正系统相角稳定裕度 $\gamma = 1.39° < 45°$ 不满足要求，阶跃响应振荡曲线虽然衰减，但振荡剧烈，故必须校正。

2）对原系统进行滞后校正。按系统相角稳定裕度的要求，对系统进行滞后校正，并用以下 MATLAB 程序实现。

```
clear;k0 =20;n1 =[1];d1 =conv(conv([1 2],[2 3]),[1 0]);
sope =tf(k0 * n1,d1);gama =45;[Gc] =lagc(1,sope,[gama]),
```

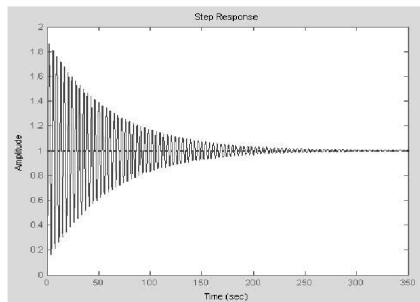


图 13-65　未校正系统阶跃响应曲线

程序运行后得到 PI 调节器 $G_c(s)=\dfrac{15.99s+1}{75.06s+1}$。

3）检查校正后系统跟随性能指标。用以下 MATLAB 程序检查校正后系统跟随性能指标。

```
clear;k0 =20;n1 =[1];d1 =conv(conv([1 2],[2 3]),[1 0]);s1 =tf(k0 * n1,d1);
n2 =[15.99 1];d2 =[75.06 1];s2 =tf(n2,d2);chec(2,s1,s2);
```

程序运行后，可得校正后系统 Bode 图(见图 13-66)与频域性能指标，还有如图 13-67 的校正后系统阶跃响应曲线。由计算数据可知校正系统频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_h = 13.3\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = 1.68\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma = 45.4°$　　剪切频率：$\omega_c = 0.628\text{rad/s}$

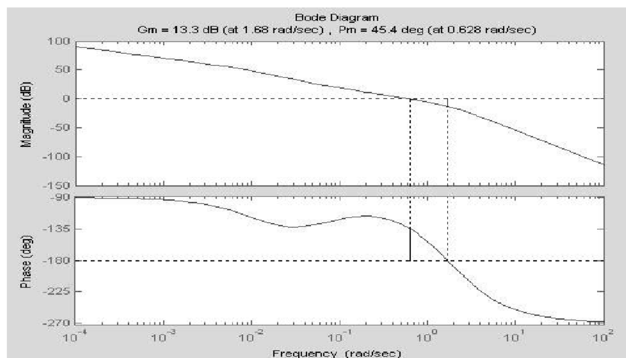


图 13-66　校正后系统的 Bode 图

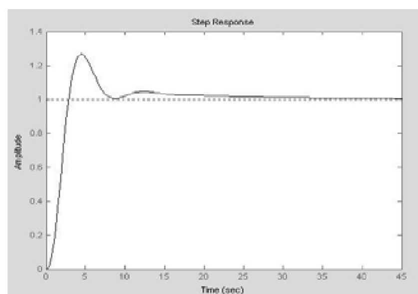


图 13-67　校正后系统阶跃响应曲线

由图 13-67 可见，校正后系统相角稳定裕度 $\gamma = 45.4° > 45°$，满足要求；阶跃响应曲线超调量超过 $\sigma\% = 26.314\% < 30\%$，而且超调一次后，即刻衰减到稳态值。

4）进行阶跃扰动响应仿真。对系统图 13-63 所示的扰动，作等效变换，如图 13-68 所示。

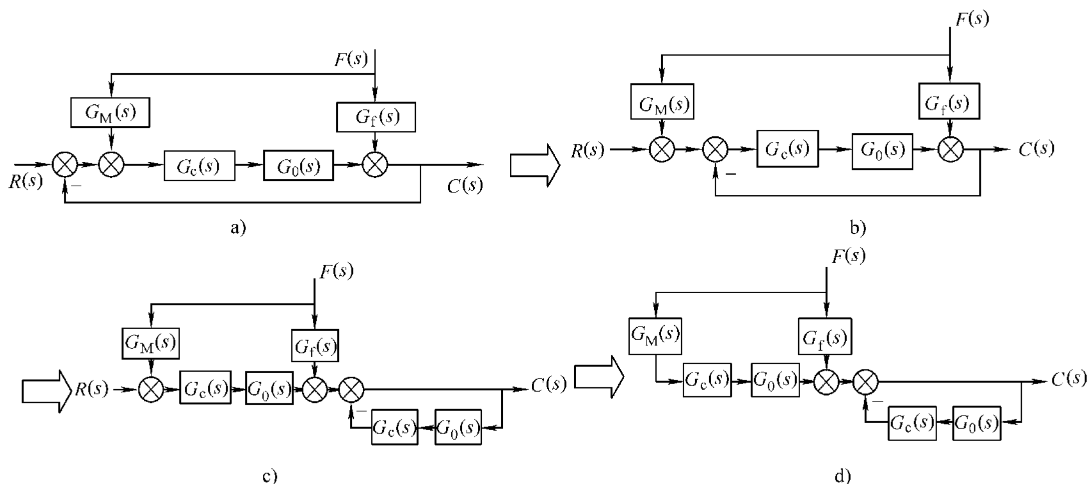


图 13-68　对系统图 13-63 扰动的等效变换

在图 13-68d 中，$R(s)=0$。根据不变性原理，要实现对扰动的完全补偿，则有$\dfrac{C(s)}{F(s)}=0$，

需$\dfrac{C(s)}{F(s)} = [G_f(s) + G_M(s)G_0(s)G_c(s)] \times \left[\dfrac{1}{1+G_c(s)G_0(s)}\right] = 0$。

若 $G_f(s) + G_M(s)G_0(s)G_c(s) = 0$，就有$\dfrac{C(s)}{F(s)}=0$，即要实现对扰动全补偿，需满足

$$G_M(s) = -\frac{G_f(s)}{G_c(s)G_0(s)} = -\frac{5}{s+2} \cdot \frac{75.06s+1}{15.99s+1} \cdot \frac{s(s+2)(2s+3)}{20}$$
$$= -\frac{s(2s+3)(75.06s+1)}{4(15.99s+1)}$$

为方便进行阶跃扰动响应的仿真，绘制出系统对于扰动的 Simulink 结构(见图 13-69)

即模型 sx2L1309. mdl，图中 PI 调节器 $G_c(s)$ 与 $G_0(s)$ 串联。

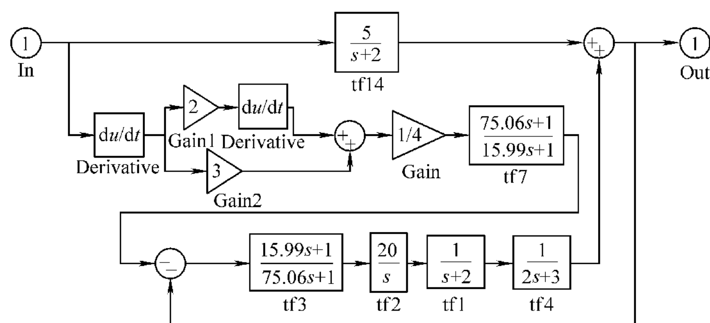


图 13-69　扰动信号作用的模型 sx2L1309. mdl

根据过程控制原理[25]，前馈—反馈控制系统对扰动完全补偿条件与前馈控制完全相同。

```
clear;[a,b,c,d] = linmod('sx2L1309');
sys = ss(a,b,c,d);step(sys),
```

程序执行后得到复合控制模型 sx2L1309. mdl 如图 13-70 所示的阶跃扰动响应曲线。由图可知，响应开始有些振荡，随着时间延续，阶跃扰动响应趋于零。这是根据不变性原理，实现了前馈控制对扰动的完全补偿，即系统被调量与对扰动作用完全无关。

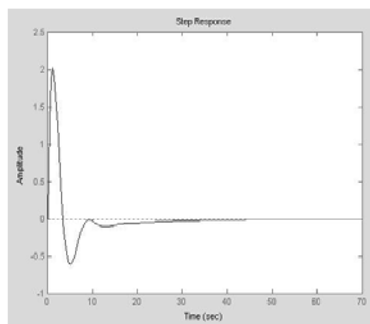


图 13-70　复合控制阶跃扰动响应曲线

13. 5. 3　大延迟控制系统的 MATLAB 动态校正设计

当过程的纯延迟时间 τ 与其动态时间常数 T 满足 $\tau/T \geqslant 0.3$ 时，则为大延迟系统。带有延迟特性的过程是较难控制的。当 τ/T 值增大，控制过程中的相位滞后也增大，使得被调量不能及时反映系统所遇到或承受的扰动，即使检测信号到达调节器使之动作，也需要经延迟时间 τ 后，才会改变被调量使系统得到控制。于是，系统控制过程必然会经过较长的调节时间并产生明显超调。带延迟特性过程控制的难度随着延迟时间 τ 的增大而加大。大延迟系统的控制，行之有效的方法之一当属 Smith(史密斯)预估器控制。

【例 13-10】　已知过程控制系统被控广义对象为一个带延迟的惯性环节，其传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{2}{4s+1}e^{-4s}$，试用 Cohen－Coon 整定公式对系统进行串联 PI、PID 校正器设计；校正后再施行 Smith 预估器控制并仿真。

解： 1）检测未校正过程控制系统频域性能指标。

```
clear;K = 2;T = 4;tau = 4;n1 = [K];d1 = [T 1];G1 = tf(n1,d1);
[np,dp] = pade(tau,2);Gp = tf(np,dp);s = G1 * Gp;
figure(1);margin(s); pause;
figure (2); sys = feedback (s, 1); step (sys),
```

程序运行后得未校正系统的 Bode 图(见图 13-71)与图 13-72 所示的未校正系统阶跃响应曲线。由计算数据可知未校正系统的频域性能指标：

幅值稳定裕度：$L_h = 1.18\text{dB}$　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = 0.515\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma = 21.8°$　　剪切频率：$\omega_c = 0.433\text{rad/s}$

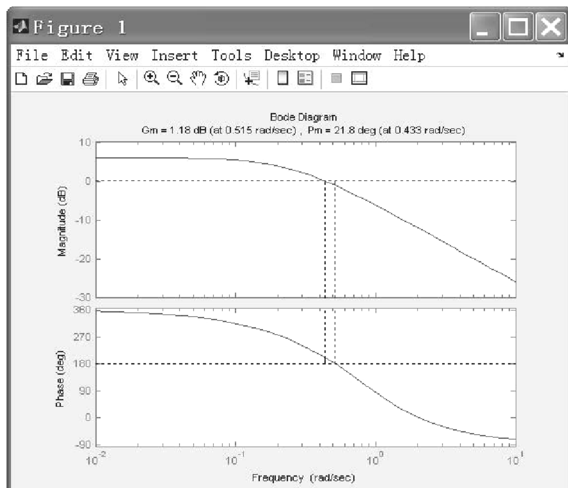


图 13-71　未校正控制系统的 Bode 图

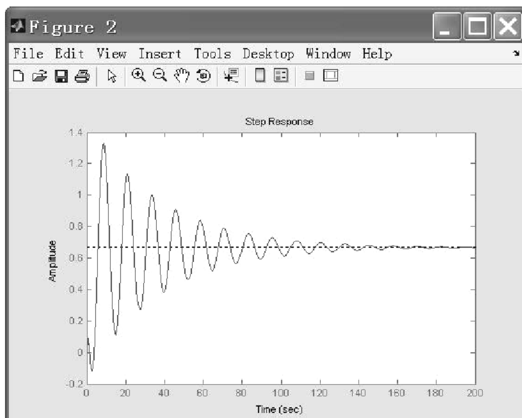


图 13-72　未校正控制系统阶跃响应曲线

由图 13-72 可见，未校正系统相角稳定裕度 $\gamma = 21.8° < 45°$，不满足一般要求，阶跃响应曲线超调量超过 30%，而且呈现剧烈振荡，故必须校正。

2）用 Cohen – Coon 整定公式进行 PI 与 PID 校正设计。

用 Cohen – Coon 整定公式进行 PID 校正设计的 MATLAB 程序如下。

```
clear;K=2;T=4;tau=4;n1=[K];d1=[T 1];G1=tf(n1,d1);
[np,dp]=pade(tau,2);Gp=tf(np,dp);G=G1*Gp;
[K,T,tau]=kttau(G);[Gc2]=cc01(2,[K,T,tau]),
[Gc4]=cc01(4,[K,T,tau]),Gcc2=feedback(G1*Gc2,Gp);
set(Gcc2,'Td',tau);step(Gcc2);hold on;
Gcc4=feedback(G1*Gc4,Gp);set(Gcc4,'Td',tau);step(Gcc4);
gtext('1 PI control'), gtext('2 PID control'),
```

程序运行后得到 PI 与 PID 调节器的传递函数分别为

$$G_{PIc}(s)=\frac{2.25s+0.4998}{4.503s}$$

$$G_{PIDc}(s)=\frac{7.379s^2+6.08s+0.8231}{7.386s}$$

程序运行后还绘制出校正系统的阶跃响应曲线，如图 13-73 所示。由曲线可看出，系统的超调量都超过 30%，这样的时域响应指标还是不能令人满意的。

3）Smith 预估器控制。在 Simulink 中进行 Smith 预估器控制仿真。根据 Smith 预估器控制原理，做出系统用 PI 调节器校正后再施行 Smith 预估器控制的动态模型图 sx2L1310. mdl（见图 13-74）。图中模块“Step”为单位阶跃信号模块，即“Step time”设置为“0”，“Initial value”设置为“0”，“Final value”设置为“1”，“Sample time”设置为“0”，模块“Transport Delay”均为延迟模块，设置相同，即“Time delay”设置为“4”，“Initial input”设置为“0”。模块“Scope”为示波器模块，将示波器模块工具栏按钮【Parameters】的卡片“General”中的“Time

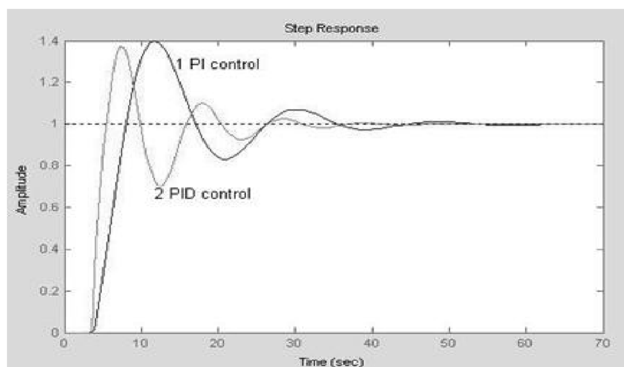


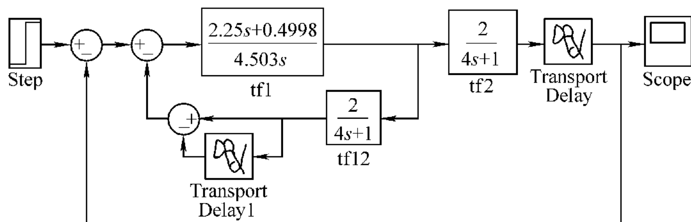
图 13-73　校正后控制系统的阶跃响应曲线

range”设置为“auto”，其他均为默认设置。

在“sx2L1310. mdl”模型窗口(见图 13-74)中，先将工具栏的空白框【Simulation stop time】设置为“50”(秒)；然后执行菜单【Simulation】中的【Start】命令，即对模型系统进行阶跃给定响应仿真，再双击示波器图标即可得仿真结果曲线，如图 13-75 所示。可见，系统 Smith 预估器控制的仿真曲线单调上升，既不振荡，也不超调，单位阶跃响应非常理想。

根据图 13-58，执行以下程序得到的仿真阶跃响应与图 13-75 中的曲线完全一样。

```
clear;K=2;T=4;tau=4;n1=[K];d1=[T 1];G1=tf(n1,d1);
[np,dp]=pade(tau,2);Gp=tf(np,dp);n21=[2.25 0.4998];
d21=[4.503 0];G21=tf(n21,d21);Gc1=feedback(G1*G21,1);
t1=[0:0.01:60]';set(Gc1,'Td',tau);step(Gc1);gtext('PI control'),
```



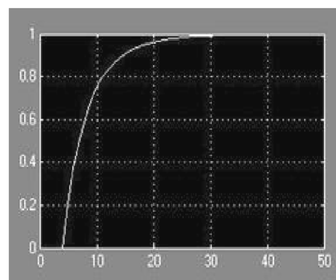


图 13-74　系统 Smith 预估器控制模型 sx2L1310. mdl　　图 13-75　预估控制单位阶跃响应曲线

【例 13-11】　若一串级过程控制系统的主、副被控对象与副调节器的传递函数分别为

$$G_{p1}(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)};\ G_{p2}(s)=\frac{1}{(s+3)(s+4)(s+5)};G_{c2}(s)=10$$

试用稳定边界法计算系统主调节器 $G_{c1}(s)$ 作 P、PI、PID 校正时的参数，并进行阶跃给定响应的仿真。

解：根据题意，利用 zn02. m 函数求系统 PI 校正器参数的程序 sx2L1311. m 如下。

```
% MATLAB PROGRAM sx2L1311.m
clear;G1=tf(10,[1 1]);G2=tf(1,[1 2]);G3=tf(1,[1 3]);
G4=tf(1,[1 4]);G5=tf(1,[1 5]);G=G1*G2*G3*G4*G5;
[Gc1,Kp1]=zn02(1,G,4),[Gc2,Kp2,Ti2]=zn02(2,G,4),
```

```
[Gc3,Kp3,Ti3,Td3] = zn02(3,G,4),
Gcc1 = feedback(G * Gc1,1);step(Gcc1);hold on
Gcc2 = feedback(G * Gc2,1);step(Gcc2);
Gcc3 = feedback(G * Gc3,1);step(Gcc3)gtext('1 P control'),
gtext('2 PI control'),gtext('3 PID control'),
```

程序需在 MATLAB 命令窗口中运行，程序运行后有根轨迹，如图 13-76 所示。图上显示有十字光标，选择根轨迹与虚轴的交点用鼠标左键单击。

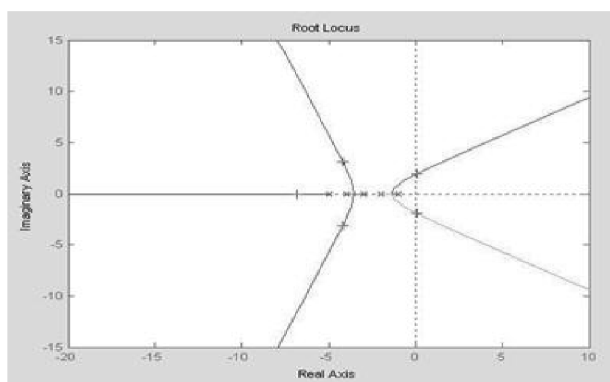


图 13-76　函数 zn02( )执行过程中绘制的系统根轨迹

再回到 MATLAB 命令窗口中，可以见到有计算出的根轨迹增益与极点值(应该力求准确定在根轨迹与虚轴的交点上，尽量使极点实部为 0)，还可见到字符“K”。应该在字符“K”后输入指令“return”后并按 Enter 键，然后即可在 MATLAB 命令窗口中看到 km = 46.5515，wm = 1.8313，这就是交点的系统增益 K_m 及其对应的振荡角频率 ω_m。在 MATLAB 命令窗口中还看到用稳定边界法计算出的 P、PI、PID 校正的参数。再弹出根轨迹图，再次用鼠标左键单击根轨迹与虚轴的交点，程序三次调用函数 zn02. m，这样操作三次，最后得到如图 13-77 所示的 PID 三种校正时的阶跃给定响应曲线与校正器计算结果。

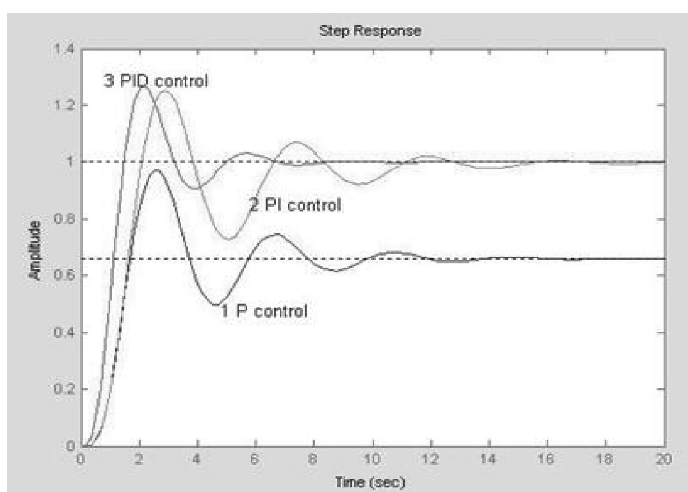


图 13-77　稳定边界法 P、PI、PID 三种校正后系统阶跃响应曲线

从图 13-77 中看到，P 与 PI 校正的阶跃响应曲线上升的速度差不多快，PID 校正的最快；三条曲线有两个不同的终了值。超调量不是很大，以 PID 校正的为最大。

由 MATLAB 命令窗口中记录的信息得到三种 P、PI、PID 校正时校正器参数分别为

① P 校正器：$G_{c1}=K_{p1}=23.2757$

② PI 校正器：$K_{p2}=21.1809$；$T_{i2}=2.9163$

```
Transfer function:
61.77s + 21.18
    - - - - - - - - - - - - - -
       2.916s
```

③ PID 校正器：$K_{p3}=27.9309$；$T_{i3}=1.7155$；$T_{d3}=0.4289$

```
Transfer function:
20.55s^2 + 47.91s + 27.93
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
         1.715s
```

习　题

【13-1】 已知晶闸管—直流电机转速负反馈单闭环调速系统（V-M 系统）的 Simulink 动态结构如图 13-78 所示。图中电机 $P_{nom}=2.2\text{kW}$，$n_{nom}=1500\text{r/min}$，$U_{nom}=220\text{V}$，$I_{nom}=12.5\text{A}$，电机电枢电阻 $R_a=1\Omega$，V-M 系统主电路总电阻 $R=2.9\Omega$，电枢主回路总电感 $L=40\text{mH}$，拖动系统运动部分飞轮矩 $GD^2=1.5\text{N}\cdot\text{m}^2$，整流触发装置的放大系数 $K_s=44$，三相桥平均失控时间 $T_s=0.00167\text{s}$，（1）要求系统调速范围 $D=15$，静差率 $s=5\%$，求闭环系统的开环放大系数 K；（2）若 $U_n^*=10\text{V}$ 时 $n=n_{nom}=1500\text{r/min}$，求拖动系统测速反馈系数 α；（3）计算对应于 K 与 α 的比例调节器放大系数 K_p；（4）试计算临界开环放大系数为多少？（5）试绘制出比例调节器 $K_p=20$ 与 $K_p=21$ 系统的单位给定阶跃响应曲线以验证系统能否稳定运行；（6）以相角稳定裕度 $\gamma=45°$为校正主要指标对系统进行滞后校正；（7）以剪切频率为校正主要指标对系统进行滞后校正；（8）用根轨迹校正器对系统进行滞后校正。

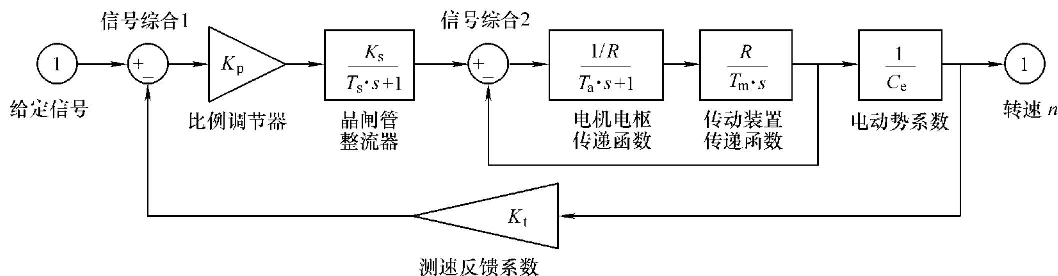


图 13-78　转速单闭环调速系统的 Simulink 动态结构图

【13-2】 带转速微分负反馈的晶闸管—直流电机双闭环调速系统（V-M 系统）的系统结构如图 13-79 所示。图中电机参数：$P_{nom}=3\text{kW}$，$n_{nom}=1500\text{r/min}$，$U_{nom}=220\text{V}$，$I_{nom}=17.5\text{A}$，电机电枢电阻 $R_a=1.25\Omega$，整流装置内阻 $R_{rec}=1.3\Omega$，平波电抗器电阻 $R_L=0.3\Omega$，V-M 系统主电路总电阻 $R=2.85\Omega$，电枢主回路总电感 $L=200\text{mH}$，拖动系统运动部分飞轮矩 $GD^2=3.53\text{N}\cdot\text{m}^2$，三相桥平均失控时间 $T_s=0.00167\text{s}$，整流触发装置的放大系数 $K_s=38$，要求系统调速范围 $D=20$，静差率 $s=10\%$，堵转（最大）电流 $I_{dbl}=2.1I_{nom}$，临界截止电流 $I_{dcr}=2I_{nom}$，ACR、ASR 均采用 PI 调节器，ASR 限幅输出 $U_{im}^*=-8\text{V}$，ACR 限幅输出 $U_{ctm}=8\text{V}$，最大给定 $U_{nm}^*=10\text{V}$。（1）试计算系统的参数：电机电动势转速比 C_e、闭环系统稳态速降 Δn_{nom}、触发整流装置的放大系数 K_s、电流反

馈系数 β、电枢电磁时间常数 T_l、系统机电时间常数 T_m、系统测速反馈系数 α；（2）选择几个滤波时间常数 T_{0i}、T_{0n}、T_{0dn}与中频宽 h；（3）计算电流调节器传递函数 $W_{ACR}(s)=K_i\frac{\tau_i s+1}{\tau_i s}$；（4）计算转速调节器传递函数 $W_{ASR}(s)=K_n\frac{\tau_n s+1}{\tau_n s}$；（5）对双闭环调速系统进行单位阶跃给定响应仿真与单位阶跃负载扰动响应仿真；（6）对转速微分负反馈环节$\frac{\alpha\tau_{dn}s}{T_{0dn}s+1}$进行参数计算；（7）对带转速微分负反馈双闭环调速系统进行单位阶跃响应仿真与单位阶跃负载扰动响应仿真；（8）对（5）与（7）两项仿真作简单比较；（9）计算退饱和时间 t_t 与退饱和转速 n_t。

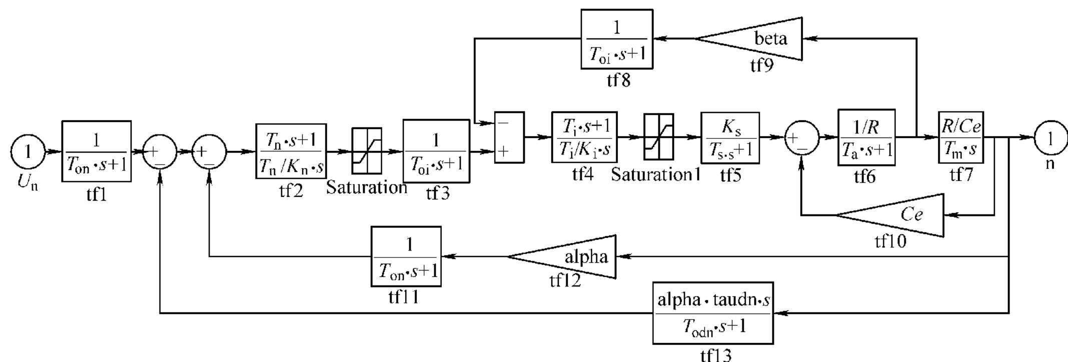


图 13-79　双闭环调速系统原理图

【13-3】　已知随动系统固有部分传递函数为 $W_{obj}(s)=\frac{K_{obj}}{s(T_m s+1)(T_l s+1)}$，式中，$K_{obj}=500$；$T_m=0.9$s；$T_l=0.007$s。要求设计一调节器，使系统满足下述性能指标：（1）加速度品质因素（静态误差系数）$K_a\geqslant 2501/s^2$；（2）系统阶跃响应的超调量 $\sigma\%\leqslant 30\%$；调节时间 $t_s\leqslant 0.2$s。

【13-4】　自整角机位置随动系统动态结构图如图 13-80 所示。已知自整角机放大系数 $K_{bs}=1$V/(°)；相敏放大系数 $K_{ph}=5$；功率放大器放大系数 $K_s=20$；PID 调节器放大系数 $K_p=3$；直流电机电动势转速比 $C_e=0.125$V·min/r；齿轮减速比 $i=120$；试计算输入信号为 $\theta_m^*=12t^2$(°)（t 的单位为 s）时的系统原理误差。

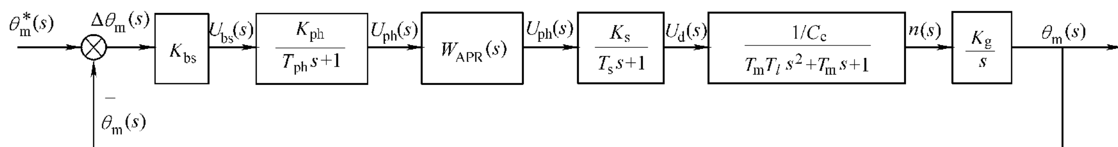


图 13-80　自整角机位置随动系统动态结构图

【13-5】　某飞剪随动系统采用部分不变性复合控制，其结构图如图 13-81 所示。图中，$F(s)=\tau_1 s$，$W_1(s)=\frac{K_1K_2}{T_1s+1}$，$W_2(s)=\frac{1/a}{bT_{\Sigma n}s+1}\cdot\frac{K_g}{s}$。（1）试求系统对单位速度输入信号在没有原理误差时的前馈系数 τ_1。（2）若要求在加速度输入下原理误差为零，试求前馈部分传递函数的形式 $F(s)$。

【13-6】　在某自整角机位置随动系统中，已知电枢回路总电阻 $R=3.4\Omega$，直流电动机电动势转速比 $C_e=0.042$V·min/r，转矩电流比 $C_m=0.3175$N·m/A，PWM 功率放大器电源电压 $U_s=110$V，其最大输入电压 $U_c=12$V，自整角机的放大系数 $K_{bs}=1.25$V/(°)，相敏放大器比例系数 $K_{ph}=22$，齿轮减速器速比 $i=60$；负载转矩 $T_L=24.5$N·m，自整角机输入轴最高转速 $\dot{\theta}_m^*=250$(°)/s，系统未进

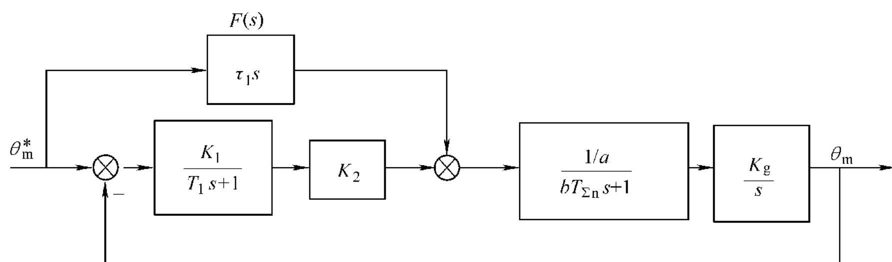


图 13-81　某飞剪随动系统的结构图

行校正。(1) 试绘制系统动态结构图；(2) 计算系统的稳态误差（不计系统的检测误差）。

【13-7】 已知过程控制系统被控广义对象的传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{(5s+1)(2s+1)(10s+1)}$，试用 Bode 图超前校正法进行校正设计，要求校正后系统的阶跃响应超调量 $\sigma\% \leqslant 30\%$，调节时间 $t_s \leqslant 15$s。

【13-8】 带饱和输出特性的 PID 控制系统的被控对象为 $G_0(s)=\dfrac{1}{60s+1}e^{-80s}$，其 PID 控制器为 $G_c(s)=K_P+K_I\dfrac{1}{s}+K_Ds=4+\dfrac{0.022}{s}$。以 $G_0(s)$ 与 $G_c(s)$ 为前向通道的单位负反馈系统如图 13-82 所示。(1) 试对于 PID 控制器绘制其 Simulink 仿真模型图，并对其进行仿真；(2) 对系统施行 Smith（史密斯）预估器控制并进行仿真。

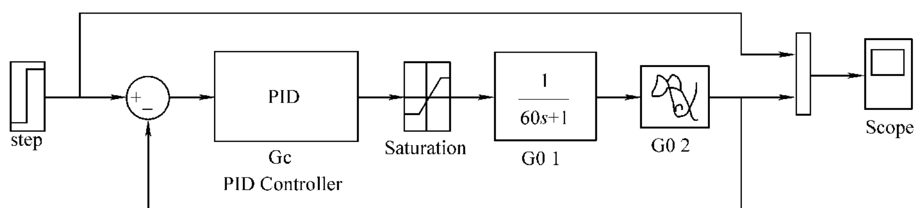


图 13-82　带饱和输出特性的 PID 控制系统

第 14 章　线性系统状态空间分析的 MATLAB 实现

状态空间模型是控制系统最新与最科学的描述方法，它能够完全表达系统全部状态与性能。它不但能描述线性系统，而且也能描述非线性系统与时变系统。它既能描述单输入单输出系统，也能描述多输入多输出系统。状态空间模型是现代控制理论的基础。

为方便计算，在本章作者编制了多个关于线性系统状态空间分析 MATLAB 实现的函数。有关函数存储与运行方式，请参见参考文献［1］，其源程序与用法参见附录。

自编函数的示例可能有多题，是为了验证函数使用的可靠性与适用性。

14.1　系统状态空间描述及其状态方程求解

当控制系统状态空间模型建立以后，只有求得了系统状态方程的解，才能确定系统的行为，完成系统分析与设计任务。

14.1.1　状态空间表达式的建立

有三种方法建立控制系统状态空间表达式：一是直接根据控制系统工作原理建立相应的微分方程或差分方程，再将其整理、规范化而得；二是由控制系统结构框图建立系统状态空间表达式；三是由已知系统的某种数学模型转化而得。请看示例。

【例 14-1】 已知图 14-1 所示系统元件参数，输入为 $u_1(t)$ 与 $u_2(t)$，输出为 $y(t)$，试列写图示网络的状态空间表达式。

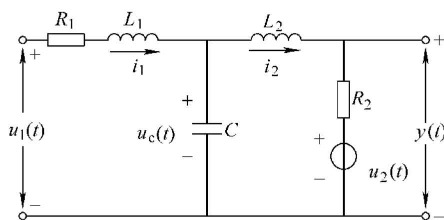


图 14-1　网络电路

解：选择电感电流与电容电压作为状态变量，即 $x_1=i_1$、$x_2=i_2$、$x_3=u_c$。根据基尔霍夫第一定律、第二定律，有

$$R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + u_c = u_1、u_c = L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + u_2$$

$$i_1 = i_2 + C\frac{du_c}{dt}、y = R_2 i_2 + u_2$$

将状态变量代入并整理得到状态空间表达式

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}x_3 + \frac{1}{L_1}u_1、\dot{x}_2 = -\frac{R_2}{L_2}x_2 + \frac{1}{L_2}x_3 - \frac{1}{L_2}u_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{C}x_2、y = R_2 x_2 + u_2$$

写成矩阵形式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases}$$

式中

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}}、\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1}{L_1} & 0 & -\dfrac{1}{L_1}\\ 0 & -\dfrac{R_2}{L_2} & \dfrac{1}{L_2}\\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L_1} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{L_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}、\boldsymbol{C}=[0\quad R_2\quad 0]、\boldsymbol{D}=[0\quad 1]$$

【例 14-2】 试求图 14-2 所示系统的动态方程，并求其对应的传递函数。

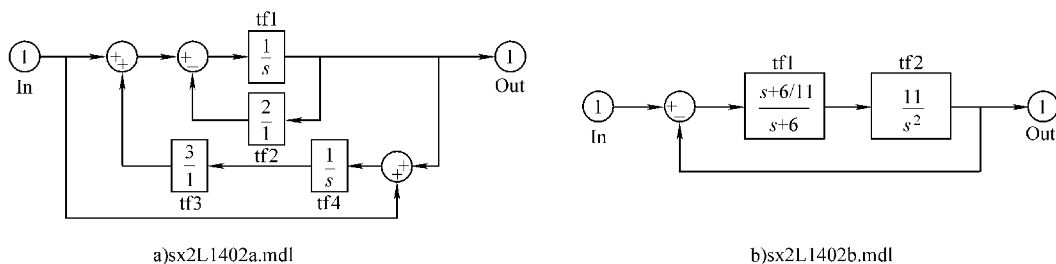


图 14-2　模型 sx2L1402a. mdl 和模型 sx2L1402b. mdl

解： 1） 给出调用系统函数 linmod2. m 与自编函数 ssto2. m 的程序解算。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1402a'),
key=1;G=ssto2(key,A,B,C,D);
```

程序运行后得到动态方程 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[1\quad 0]\boldsymbol{x}\end{cases}$ 与传递函数 $G(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s-3}$。

2）也给出调用系统函数 linmod2. m 与自编函数 ssto2. m 的程序解算。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1402b'),
key=1;G=ssto2(key,A,B,C,D);
```

程序运行后得到系统动态方程 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -11 & -5.4545\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[0\quad 11\quad 0]\boldsymbol{x}\end{cases}$ 与对应的传递函数 $G(s)=\dfrac{11s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$。

【例 14-3】 已知连续系统零极点增益模型 $G(s)=\dfrac{4(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$、系统微分方程为 $\dddot{y}+5\ddot{y}+4\dot{y}+7y=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$，求系统的状态空间表达式。

解： 1） 给出以下调用自编函数 zpkto2. m 的程序实现，并用自编函数 ssto2. m 的程序来验证。

```
clear;k=4;z=-2;p=[-1,-3,-4];key=2;
G=zpkto2(key,z,p,k);
```

程序运行后得到系统空间表达式为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 4\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 1\quad 0]\boldsymbol{x}$。可用以下程序验证计算是否正确。

```
clear;A=[-1 1 0;0 -3 1;0 0 -4];B=[0;0;4];C=[1 1 0];
D=0;key=2;G=ssto2(key,A,B,C,D);
```

2）求系统微分方程为 $\dddot{y}+5\ddot{y}+4\dot{y}+7y=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$ 对应的状态空间表达式。

此微分方程式含有输入函数导数项，其一般表达式［10］为

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$

按参考文献［10］选取系统状态变量并有相关公式

$$\begin{cases}x_1=y-b_0u\\x_2=\dot{x}_1-h_1u\\x_3=\dot{x}_2-h_2u\\\cdots\\x_n=\dot{x}_{n-1}-h_{n-1}u\end{cases}\tag{14-1}$$

$$\begin{cases}h_1=b_1-a_1b_0\\h_2=(b_2-a_2b_0)-a_1h_1\\h_3=(b_3-a_3b_0)-a_2h_1-a_1h_2\\\cdots\\h_n=(b_n-a_nb_0)-a_{n-1}h_1-a_{n-2}h_2-\cdots-a_2h_{n-2}-a_1h_{n-1}\end{cases}\tag{14-2}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+h_1u\\\dot{x}_2=x_3+h_2u\\\cdots\\\dot{x}_{n-1}=x_n+h_{n-1}u\\\dot{x}_n=(b_n-a_nb_0)-a_{n-1}h_1-a_{n-2}h_2-\cdots-a_2h_{n-2}-a_1h_{n-1}\end{cases}\tag{14-3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\vdots\\\dot{x}_{n-1}\\\dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_{n-1}\\h_n\end{bmatrix}u\tag{14-4}$$

$$y=x_1+b_0u\ 或\ y=(1\quad 0\cdots0\quad 0)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+b_0u\tag{14-5}$$

① 按式(14-1)～式(14-5)得到 $a_1=5$、$a_2=4$、$a_3=7$、$b_0=0$、$b_1=1$、$b_2=3$、$b_3=2$。运行以下程序计算 $\boldsymbol{H}=[h_1;\ h_2;\ h_3]$。

```
clear;a1=5;a2=4;a3=7;b0=0;b1=1;b2=3;b3=2;
```

```
h1 = b1 - a1 * b0,h2 = (b2 - a2 * b0) - a1 * h1,
h3 = (b3 - a3 * b0) - a2 * h1 - a1 * h2,
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{H}=[h_1;\ h_2;\ h_3]=[1;\ -2;\ 8]$。再选取状态变量 $x_1=y$、$x_2=\dot{x}_1-h_1u=\dot{x}_1-u$、$x_3=\dot{x}_2-h_2u=\dot{x}_2+2u$，则有 $\dot{x}_1=x_2+u$、$\dot{x}_2=x_3-2u$、$\dot{x}_3=-a_3x_1-a_2x_2-a_1x_3+8u=-7x_1-4x_2-5x_3+8u$。

由此写出状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-7&-4&-5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\-2\\8\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$。运行以下程序求传递函数矩阵。

```
clear;A = [0 1 0;0 0 1; -7  -4  -5];B = [1; -2;8];C = [1 0 0];
D = 0;[invsea,G] = tran01(A,B,C,D);
```

程序运行后得到微分方程对应的系统传递函数为 $G(s)=\dfrac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+4s+7}$。

② 按参考文献［12］公式得到 $a_1=5$、$a_2=4$、$a_3=7$、$b_0=0$、$b_1=1$、$b_2=3$、$b_3=2$。选取 $x_2=\dot{y}=\dot{x}_1$、$x_3=\ddot{y}=\dot{x}_2$，那么 $\dot{x}_1=x_2$、$\dot{x}_2=x_3$、$\dot{x}_3=-7x_1-4x_2-5x_3+u$，则 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-7&-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}=[b_3\quad b_2\quad b_1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$即 $\boldsymbol{y}=[2\quad 3\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

自动控制原理中已经学过，对于一个系统，尽管其状态空间表达式不是唯一的，但其传递函数矩阵不变。可用以下程序验证。

```
clear;A = [0 1 0;0 0 1; -7  -4  -5];B = [0;0;1];C = [2 3 1];
D = 0;[invsea,G] = tran01(A,B,C,D);
```

程序运行后得到传递函数矩阵不变，说明以上计算正确。

14.1.2　求控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$

控制系统状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 又称为矩阵指数函数。根据幂级数展开式有

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots=\boldsymbol{L}^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵。

为方便计算，作者编制了求控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的函数 phi01. m。

【例 14-4】　已知以下控制系统状态矩阵为 1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}$，2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$，3）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{bmatrix}$，4）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$，5）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$，用自

编函数求 5 个控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 并验证求解的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是否正确。

解：1）对第 1 个系统给出以下调用自编函数 phi01. m 的程序解算。

```
clear;syms s t;A=[0 1;-2 -3];
[sea,detsea,invsea,phit]=phi01(A);
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{L}^{-1}\{[s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]^{-1}\}=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$。

调用自编函数 phit01. m 的验证程序如下。

```
clear;t=sym('t');
phit=[2*exp(-t)-exp(-2*t)exp(-t)-exp(-2*t);-2*exp(-t)+2*exp(-2*t)-exp(-t)+2
*exp(-2*t)];
[A]=phit01(phit);
```

程序运行后计算结果说明求得的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 正确。

2）对第 2 个系统也给出以下调用自编函数 phi01. m 的程序解算。

```
clear;syms s t;A=[-1 0 0;0 -2 0;0 0 -3];
[sea,detsea,invsea,phit]=phi01(A);
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{L}^{-1}\{[s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]^{-1}\}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$。

调用自编函数 phit01. m 的验证程序如下。

```
clear;t=sym('t');
phit=[exp(-t)0 0;0 exp(-2*t)0;0 0 exp(-3*t)];
[A]=phit01(phit);
```

程序运行后计算结果说明求得的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 正确。

需要特别说明，以下解题无须给出程序，按以上程序改变给定的系统状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 数据即可，在此给出各题程序运行结果。读者还可以按以上解题加以验证。

3）第 3 个系统。

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\mathrm{e}^{2t}+\frac{8}{9}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3}t\mathrm{e}^{-t} & \frac{2}{9}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-t}\\ \frac{2}{9}\mathrm{e}^{2t}-\frac{2}{3}t\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-t} & \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t}+\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-t} & \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-t}\\ \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2t}+\frac{2}{3}t\mathrm{e}^{-t}-\frac{4}{9}\mathrm{e}^{-t} & \frac{8}{9}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t}-\frac{8}{9}\mathrm{e}^{-t} & \frac{4}{9}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t}+\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$

4）第 4 个系统。$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t} & \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t} & \frac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{-2t}\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t} & \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t}\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} & t\mathrm{e}^{-2t}\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$

5）第 5 个系统。$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

【例 14-5】 已知系统状态矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$，试求：1）控制系统的特征矩阵；2）特征矩阵的行列式；3）特征矩阵的逆；4）求控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

解：给出以下调用自编函数 phi01. m 的程序解算，函数 phi01. m 本身就有计算系统的特征矩阵、特征矩阵行列式与特征矩阵的逆的功能，只不过在【例 14-4】中没有要求而已。

```
clear;syms s t;A=[0 1 0;0 0 1;2 -5 4];
[sea,detsea,invsea,phit]=phi01(A);
```

程序运行后得到

1）特征矩阵：$sea=[s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 5 & s-4 \end{bmatrix}$

2）特征矩阵的行列式：$\det sea=|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=s^3-4s^2+5s-2=(s-2)(s-1)^2$

3）特征矩阵的逆：

$$\boldsymbol{E}=[s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{s^2-4s+5}{s^3-4s^2+5s-2} & \dfrac{s-4}{s^3-4s^2+5s-2} & \dfrac{1}{s^3-4s^2+5s-2} \\ \dfrac{2}{s^3-4s^2+5s-2} & \dfrac{s(s-4)}{s^3-4s^2+5s-2} & \dfrac{s}{s^3-4s^2+5s-2} \\ \dfrac{2s}{s^3-4s^2+5s-2} & \dfrac{-5s+2}{s^3-4s^2+5s-2} & \dfrac{s^2}{s^3-4s^2+5s-2} \end{bmatrix}$$

4）状态转移矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{L}^{-1}\{[s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]^{-1}\}=\begin{bmatrix} -2te^t+e^{2t} & 3te^t+2e^t-2e^{2t} & -te^t-e^t+e^{2t} \\ 2(-e^t-te^t+e^{2t}) & 3te^t+5e^t-4e^{2t} & -te^t-2e^t+2e^{2t} \\ -2te^t-4e^t+4e^{2t} & 3te^t+8e^t-8e^{2t} & -te^t-3e^t+4e^{2t} \end{bmatrix}$$

调用自编函数 phit01. m 的验证程序如下。

```
clear;t=sym('t');
phit=[exp(2*t)-2*t*exp(t),-2*exp(2*t)+2*exp(t)+3*t*exp(t),exp(2*t)-exp(t)-t*exp
(t);2*exp(2*t)-2*exp(t)-2*t*exp(t),-4*exp(2*t)+5*exp(t)+3*t*exp(t),2*exp(2*t)-
2*exp(t)-t*exp(t);4*exp(2*t)-4*exp(t)-2*t*exp(t), -8*exp(2*t)+8*exp(t)+3*t*exp
(t),4*exp(2*t)-3*exp(t)-t*exp(t)];
[A]=phit01(phit);
```

程序运行后计算结果说明求得的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 正确。

14.1.3 求控制系统的传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$

控制系统的传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 描述了系统输入向量 $\boldsymbol{U}(s)$ 与输出向量 $\boldsymbol{Y}(s)$ 之间的传递关系。

计算系统传递矩阵的公式是 $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=C[sE-A]^{-1}B+D$。

自动控制中已经学过，一个系统状态空间表达式不是唯一的，但其传递函数矩阵是唯一的。

为方便计算，作者编制了求控制系统传递矩阵 $G(s)$ 的函数 tran01. m。请看示例。

【例 14-6】 已知系统 4 个矩阵为 1）$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}-2&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$、$D=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，2）$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&-2\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$、$D=0$。试求两个系统的传递矩阵 $G(s)$。

解：1）对第 1 个系统给出以下调用自编函数 tran01. m 的程序解算。

```
clear;syms s;A=[0 1 0;0 0 1;2 3 0];B=[1 0;0 -1;0 1];
C=[-2 -1 1;2 1 -1];D=[0 1;1 0];
[invsea,G]=tran01(A,B,C,D);
```

程序运行后得到系统的传递矩阵为 $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{-2}{s+1}&\dfrac{s+3}{s+1}\\\dfrac{s+3}{s+1}&\dfrac{-2}{s+1}\end{bmatrix}$。

2）对第 2 个系统也给出以下调用自编函数 tran01. m 的程序解算。

```
clear;syms s;A=[0 1;0 -2];B=[1 0;0 1];
C=[1 0;0 1];D=0;[invsea,G]=tran01(A,B,C,D);
```

程序运行后得到系统的传递矩阵为 $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s}&\dfrac{1}{s(s+2)}\\0&\dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$。

14.1.4　求控制系统的特征方程、特征值及特征向量

为方便计算，作者编制了求系统的特征方程、特征值及特征向量的函数 cha01. m。

【例 14-7】 已知控制系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$，求控制系统的特征方程、特征值及特征向量。

解：给出以下调用自编函数 cha01. m 的程序解算。

```
clear;syms s;A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
[sea,detsea,V,D]=cha01(A);V1AV=inv(V)*A*V,
```

程序运行后得到 $sea=|sE-A|=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\6&11&s+6\end{vmatrix}=0$，即特征方程为

$$|sE-A|=s^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)=0$$

程序运行后还求得控制系统的特征值 $d=[-1;\ -2;\ -3]$ 及系统矩阵 A 的特征向量矩

阵为 $\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}-0.5774 & 0.2182 & -0.1048\\ 0.5774 & -0.4364 & 0.3145\\ -0.5774 & 0.8729 & -0.9435\end{bmatrix}$。程序运行后也验算了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征向量与特征值的求解是否正确，因 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{D}$，即两者结果相同，表明特征向量矩阵与特征值矩阵计算正确。

14.1.5 求控制系统的状态方程的解

系统状态方程的求解公式为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

为方便计算，作者编制了求系统状态方程解的函数 staeq. m。

【例 14-8】 已知系统动态方程与初始状态为 1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$、2）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$、3）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$。试求系统在单位阶跃输入信号 $\boldsymbol{u}(t)=1(t)$ 作用下方程的解。

解：1）对第 1 个系统给出以下调用自编函数 staeq. m 的程序解算。

```
clear;syms s t; A=[0 1; -2 -3]; B=[0;1];
X0=[0;0];u=sym('Heaviside(t)');
[phis,xt0in,xt0sta,xt]=staeq(A,B,u,X0);xt=simple(xt),
```

程序运行后得到状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$

2）对第 2 个系统也给出以下调用自编函数 staeq. m 的程序解算。

```
clear;syms s t; A=[0 1; -6 -5]; B=[1;1];
X0=[0;1];u=sym('Heaviside(t)');
[phis,xt0in,xt0sta,xt]=staeq(A,B,u,X0);xt=simple(xt);
```

程序运行后得到状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\mathrm{e}^{-2t}\\ -1+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$

3）对第 3 个系统还给出以下调用自编函数 staeq. m 的程序解算。

```
clear;syms s t; A=[0 2; -3 -5]; B=[1;1];
u=sym('Heaviside(t)');X0=[1;0];
[phis,xt0in,xt0sta,xt]=staeq(A,B,u,X0);xt=simple(xt);
```

程序运行后得到状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{6}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}\\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$

14.1.6 连续系统状态方程的离散化

将连续时间系统模型转换为离散时间模型要用 MATLAB 的函数 c2d( )，其调用格式为

sysd = c2d(sysc, Ts)

sysd = c2d(sysc, Ts, method)

其中，输入参数 *sysc* 为连续时间模型对象；*Ts* 为采样周期，单位为秒；*sysd* 为带采样时间 *Ts* 的离散时间模型。*method* 用来指定离散化采用的方法：

“zoh”——采用零阶保持器；

“foh”——采用一阶保持器；

“tustin”——采用双线性逼近方法；

“prewarp”——采用改进的 tustin 方法；

“matched”——采用 SISO 系统的零极点匹配法；默认时，method =“zoh”。

【例 14-9】 已知系统动态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 1]\boldsymbol{x}$，试对系统采用零阶保持器求其离散化状态方程与离散化输出方程，设采样周期 $T=1\text{s}$。

解：给出调用系统函数 c2d. m 的程序解算。

```
clear;A = [0 1;0 1];B = [0;1];C = [1 1];D = 0;
sys = ss(A,B,C,D);Ts = 1;
disp('Discrete System - - using c2d with zoh')
sys1 = c2d(sys,Ts,'zof');szoh = ss(sys1),
```

程序运行后得到采用零阶保持器的离散化状态方程与离散化输出方程分别为

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1.7183\\0 & 2.7183\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.7183\\1.7183\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(kT)\text{、}\boldsymbol{y}(kT)=[1\quad 1]\boldsymbol{x}(kT)$$

14.2 系统状态方程的线性变换

对于一个给定的控制系统，可以选取多组不同的状态变量，所以同一系统可以有许多状态空间表达式，但这些状态空间表达式却都描述着同一个物理现象。状态变量的不同选取，实质上是状态变量间的一种线性变换或称坐标变换。如果已知状态变量之间的变换关系，就很容易建立起系数矩阵之间的转换关系。

再次提醒读者，自动控制原理中已经学过有关线性变换的基本性质：线性系统经过非奇异线性变换，系统的特征值、传递矩阵、可控性、可观性等均保持不变。

14.2.1 控制系统的 *P* 变换

当系统从坐标系 $\boldsymbol{x}$ 变换到坐标系 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 时(即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{x}}$)，即由($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$)求($\bar{\boldsymbol{A}}$、$\bar{\boldsymbol{B}}$、$\bar{\boldsymbol{C}}$)。根据自动控制原理，则两坐标系相应矩阵之间有如下关系式成立：

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\text{、}\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\text{、}\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$$

则称为对系统进行 $\boldsymbol{P}$ 变换。

经线性变换之后，系统状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 都具有相同的特征值 $|s\boldsymbol{E}-\bar{\boldsymbol{A}}|=|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，此为系统特征值的不变性。

为方便计算，作者编制了对系统进行 $\boldsymbol{P}$ 变换即从 $\boldsymbol{x}$ 坐标系逆向变回到 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 坐标系的函数 lintra01. m。

【例 14-10】 已知系统状态空间表达式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[3\quad 0]\boldsymbol{x}$，欲对系统进行坐标变换，其变换关系为 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，试求系统线性变换后的系统动态方程，并验证系统状态矩阵特征值的不变性。

解：给出调用自编函数 lintra01. m 的程序求解。

```
clear;syms s t;A=[0 1; -2 -3];B=[1;2];C=[3 0];
P=[1 1;1 -1];[A1,B1,C1]=lintra01(A,B,C,P);
```

由以上计算数据，$\boldsymbol{A}1=\overline{\boldsymbol{A}}$，$\boldsymbol{B}1=\overline{\boldsymbol{B}}$，$\boldsymbol{C}1=\overline{\boldsymbol{C}}$（以下举例同此）。程序运行后得 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 坐标系的系统动态方程：$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}-2&0\\3&-1\end{bmatrix}\overline{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}3/2\\-1/2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\overline{\boldsymbol{y}}=[3\quad 3]\overline{\boldsymbol{x}}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0.5&-0.5\end{bmatrix}$，计算结果还表明 $|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|s\boldsymbol{E}-\overline{\boldsymbol{A}}|$，即系统特征值的不变性得到验证。

14.2.2　控制系统的 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 变换

从 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 坐标系逆向变回到 $\boldsymbol{x}$ 坐标系，所进行的变换为 $\overline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$，即由（$\overline{\boldsymbol{A}}$、$\overline{\boldsymbol{B}}$、$\overline{\boldsymbol{C}}$）求（$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$）。根据自动控制原理，两坐标系相应矩阵之间有以下关系

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1}、\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{B}}、\boldsymbol{C}=\overline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{P}^{-1}$$

存在，此则称为对系统进行 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 变换。已经说明过，同一系统特征值不变。

为方便计算，作者编制了对系统进行 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 变换即从 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 坐标系逆向变回到 $\boldsymbol{x}$ 坐标系的函数 lintra02. m。

【例 14-11】 对【例 14-10】$\overline{\boldsymbol{x}}$ 坐标系里的系统进行坐标反变换（从 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 坐标系逆向变换到 $\boldsymbol{x}$ 坐标系）。

解：给出调用自编函数 lintra02. m 的程序求解。

```
clear;A1=[-2 0;3 -1];B1=[1.5;-0.5];C1=[3 3];
P1=[0.5 0.5;0.5 -0.5];[A,B,C]=lintra02(A1,B1,C1,P1);
```

程序运行后得到 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[3\quad 0]\boldsymbol{x}$，即为 $\boldsymbol{x}$ 坐标系里的动态方程。

【例 14-12】 已知控制系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-3&0\\0&1&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-1&-1\\1&4\\2&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，1）欲对系统进行坐标变换，其变换关系为 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，试求系统线性变换后的系统动态方程，并验证系统状态矩阵特征值的不变性；2）对 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 坐标系里的系统进行坐标反变换。

解：1）给出调用自编函数 lintra01. m 的程序求解。

```
clear;syms s t;A=[-2 1 0;0 -3 0;0 1 -4];B=[-1 -1;1 4;2 -3];
C=[0 0 0];P=[1 0 0;0 2 0;0 0 1];[A1,B1,C1]=lintra01(A,B,C,P);
```

程序运行后得 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 坐标系的系统动态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2&2&0\\0&-3&0\\0&2&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-1&-1\\0.5&2\\2&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，还有变

换关系式 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

2）给出调用自编函数 lintra02.m 的程序对 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 坐标系里的系统进行坐标反变换

```
clear;A1 = [ -2 2 0;0 -3 0;0 2 -4];B1 = [ -1 -1;0.5 2;2 -3];C1 = [0 0 0];
P1 = [1 0 0;0 0.5 0;0 0 1];
[A,B,C] = lintra02(A1,B1,C1,P1);
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{x}$ 坐标系里的动态方程，还有变换关系式 $\boldsymbol{P}$。

14.2.3 将状态方程化为对角标准型

已经说明过，系统状态变量不是唯一的。根据分析与设计系统的不同需要，可选择不同状态变量。在一定条件下，可把系统状态空间模型规范为几种标准形式，叫做状态空间模型的标准型。这些标准型能把系统的某些特性描述得更清晰、准确，并且具有更简洁的形式，会给系统分析与设计带来很多方便。

例如对角线标准型可以去除状态变量之间的联系，有文献将此称为状态解耦，这会给系统的分析与计算带来极大的方便。

1. 化特征值互异、矩阵 A 为任意形式的状态方程为对角标准型

请注意这种系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为任意形式，但其特征值一定互异，使用 MATLAB 系统函数命令[V,D] = eig(A)，计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{D}$，其特征向量矩阵 $\boldsymbol{V}$ 就可将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角标准型。请看示例。

【例 14-13】 试将状态空间表达式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -6 & -11 & 6\\ -6 & -11 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 对应的系统化为对角标准型。

解：运行以下程序求解。

```
clear;syms s;A = [0 1 -1;-6 -11 6;-6 -11 5];
[V,D] = eig(A);P = V,D,A1 = inv(P) * A * P,
```

程序运行后得到系统变换矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.7071 & -0.2182 & -0.0921\\ 0 & -0.4364 & -0.5523\\ 0.7071 & -0.8729 & -0.8285\end{bmatrix}$、系统的对角标准型为 $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}$，还可以运行调用自编函数 lintra01.m 的程序验证系统变换前后特征值的不变性。请注意，程序中的 $\boldsymbol{D}$ 不是系统输出矩阵，而是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值对角矩阵。

```
clear;syms s t;A = [0 1 -1;-6 -11 6;-6 -11 5];B = [0;0;0];C = [0 0 0];
P = [0.7071 -0.2182 -0.0921;0.0000 -0.4364 -0.5523;0.7071 -0.8729 -0.8285];
[A1,B1,C1] = lintra01(A,B,C,P);
```

需要提请读者，因各种误差的累积，系统特征值 $|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 与 $|s\boldsymbol{E}-\bar{\boldsymbol{A}}|$ 计算结果中出现了小数。只要将小数中无效的“0”除去，即可得到正确结果。请看本例用以下程序处理。

```
clear;syms s;A1 = [ -1 0.0003 0.0001;0 -2 0;0 -0.0011 -3];
n = length(A1);E = eye(n);sEA1 = factor(det(s * E - A1)),
```

程序运行结果证实$|sE-A|=|sE-\bar{A}|=(s+1)(s+2)(s+3)$。以下例中出现类似情况，不再赘述，读者可自行验证。

【例 14-14】 试将以下状态空间表达式的系统变换为对角标准型。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\3&0&2\\-12&-7&-6\end{bmatrix}x$$

解：运行以下程序求解。

```
clear;syms s;A=[0 1 0;3 0 2;-12 -7 -6];
[V,D]=eig(A);P=V,D,A1=inv(P)*A*P,
```

程序运行后得到系统变换矩阵 $P=\begin{bmatrix}-0.5774&-0.4364&0.2294\\0.5774&0.8729&-0.6882\\0.5774&-0.2182&0.6882\end{bmatrix}$、系统的对角标准型为$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\bar{x}$，还可以运行调用自编函数 lintra01. m 的程序验证系统变换前后特征值的不变性。再次提醒，程序中的 D 不是系统输出矩阵，而是 A 的特征值对角矩阵。

```
clear;syms s t;A=[0 1 0;3 0 2;-12 -7 -6];B=[0;0;0];C=[0 0 0];
P=[-0.5774 -0.4364 0.2294;0.5774 0.8729 -0.6882;0.5774 -0.2182 0.6882];
[A1,B1,C1]=lintra01(A,B,C,P);
```

2. 利用范德蒙德矩阵将特征值互异、矩阵 *A* 为友矩阵或正则形矩阵化为对角线标准型

如果状态矩阵 A 具有如下的标准形式（有文献将这种形式称为友矩阵或正则形矩阵）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}$$

并且 A 又具有互异的特征值 λ_1、λ_2、…、λ_n，则以下范德蒙德矩阵 P 可使 A 对角化。

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\cdots&\lambda_n\\\lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2&\cdots&\lambda_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\lambda_3^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

为方便计算，作者编制了利用范德蒙德矩阵将状态方程化为对角线标准型的函数 vander. m。请看示例。

【例 14-15】 已知系统状态空间表达式为 1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$，$C=[0\quad 0\quad 0]$；2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-5&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$、$y=[0\quad 0]x$，试将系统变换为对角标准型。

解：1）给出以下调用自编函数 vander. m 的程序求解。

① 用自编函数 cha01. m 验证系统 1 特征值互异。

```
clear;syms s;A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
[sea,detsea,V,D]=cha01(A);V1AV=inv(V)*A*V,
```

程序运行后得到

```
d = -1.0000
    -2.0000
    -3.0000
```

程序运行后得到特征值 $\boldsymbol{d}=[-1;\ -2;\ -3]$是互异的。

② 调用自编函数 vander. m 的程序将系统变换为对角标准型。

```
clear;syms s;
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];B=[1;1;0];C=[0 0 0];
[Vand,A1,B1,C1]=vander(A,B,C);
```

程序运行后得到系统的对角标准型动态方程

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}5.5\\ -7\\ 2.5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \bar{\boldsymbol{y}}=[0\quad 0\quad 0]\bar{\boldsymbol{x}}\end{cases}$$

③ 为验证上述变换是否正确先要用自编函数 lintra01. m 求 $\boldsymbol{P}1$。

```
clear;syms s t;
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];B=[1;1;0];C=[0 0 0];
P=[1 1 1;-1 -2 -3;1 4 9];[A1,B1,C1]=lintra01(A,B,C,P);
```

程序运行后得到系统的 $\boldsymbol{P}1=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}5.5\\ -7\\ 2.5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}=[0\quad 0\quad 0]\bar{\boldsymbol{x}}$$

④ 再用自编函数 lintra02. m 验证上述变换是否正确。

```
clear;syms s t;A1=[-1 0 0;0 -2 0;0 0 -3];
B1=[5.5;-7;2.5];C1=[0 0 0];
P1=[3 2.5 0.5;-3 -4 -1;1 1.5 0.5];
[A,B,C]=lintra02(A1,B1,C1,P1);
```

程序运行后得到系统状态空间表达式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{C}=[0\quad 0\quad 0]$。

2）也给出以下调用自编函数 vander. m 的程序求解。

① 用自编函数 cha01. m 验证系统 2 特征值互异。

```
clear;syms s;A=[0 1;-5 -6];
```

```
[sea,detsea,V,D] = cha01(A);V1AV = inv(V) * A * V,
```

程序运行后得到特征值 $\boldsymbol{d} = [-1;\ -5]$是互异的。

② 调用自编函数 vander. m 的程序将系统变换为对角标准型。

```
clear;syms s;
A = [0 1; -5  -6];B = [0;1];C = [0 0];
[Vand,A1,B1,C1] = vander(A,B,C);
```

程序运行后得到系统的对角标准型动态方程 $\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix}0.25\\ -0.25\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \bar{\boldsymbol{y}} = [0\quad 0]\bar{\boldsymbol{x}}\end{cases}$

③ 为验证上述变换是否正确先要用自编函数 lintra01. m 求 $\boldsymbol{P}1$。

```
clear;syms s t;A = [0 1; -5  -6];B = [0;1];C = [0 0];
P = [1 1; -1  -5];[A1,B1,C1] = lintra01(A,B,C,P);
```

程序运行后得到系统的 $\boldsymbol{P}1 = \begin{bmatrix}1.25 & 0.25\\ -0.25 & -0.25\end{bmatrix}$。

④ 再用自编函数 lintra02. m 验证上述变换是否正确。

```
clear;syms s t;P1 = [1.25 0.25; -0.25  -0.25];A1 = [ -1 0;0  -5];
B1 = [0.25; -0.25];C1 = [0 0]; [A,B,C] = lintra02(A1,B1,C1,P1);
```

程序运行后得到系统状态空间表达式 $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y} = [0\quad 0]\boldsymbol{x}$。

14.2.4　将状态方程化为约当标准型

如果矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$有相重的特征值，并且按 λ_i 所解得的独立特征向量的数目小于 n，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能化为对角阵。但仍存在一个线性变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}$ 变换成

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{J}$ 叫做约当（Jordan）标准型矩阵，简称约当标准型。

在 MATLAB 中用函数命令 jordan( )求矩阵的约当标准型。函数的调用格式为

[V,J] = jordan（A）

这种格式函数的输入参数 $\boldsymbol{A}$ 是对象矩阵，输出参数 $\boldsymbol{J}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型矩阵，输出参数 $\boldsymbol{V}$ 即是那个使约当标准型满足 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}$ 的非奇异矩阵。

为方便计算，作者编制了利用 MATLAB 系统函数命令 jordan. m 计算约当标准型的函数 jorsta. m。请看示例。

【例 14-16】　已知系统状态空间表达式 1）$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y} = [1\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$；2）$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y} = [1\quad 1\quad 0]\boldsymbol{x}$；3）$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & 6 & -5\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$；4）$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，试将动态方程式化为约当标准型。

解：1）给出调用自编函数 jorsta.m 的程序求解。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;2 3 0];B=[0;0;1];C=[1 0 0];
[V,J,A1,B1,C1]=jorsta(A,B,C);
```

程序运行后得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，系统线性变换后的方程 $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\ 0.5\\ -0.5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\bar{\boldsymbol{y}}=[0.1111\quad 0.6667\quad 0.8889]\bar{\boldsymbol{x}}$，并验证了系统状态矩阵特征值的不变性。

2）同样给出调用自编函数 jorsta.m 的程序求解。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-1 -3 -3];B=[0;0;1];C=[1 1 0];
[V,J,A1,B1,C1]=jorsta(A,B,C);
```

程序运行后得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，系统线性变换后的方程 $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\bar{\boldsymbol{y}}=[0\quad 1\quad 1]\bar{\boldsymbol{x}}$，并验证了系统状态矩阵特征值的不变性。

3）也给出调用自编函数 jorsta.m 的程序求解。

```
clear;A=[0 6 -5;1 0 2;3 2 4];B=[0;0;0];C=[0 0 0];
[V,J,A1,B1,C1]=jorsta(A,B,C);
```

程序运行后得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，系统线性变换后的方程 $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\bar{\boldsymbol{y}}=[0\quad 0\quad 0]\bar{\boldsymbol{x}}$，并验证了系统状态矩阵特征值的不变性。

4）还给出调用自编函数 jorsta.m 的程序求解。

```
clear;A=[3 0 0;2 4 1;2 1 4];B=[0;0;0];C=[0 0 0];
[V,J,A1,B1,C1]=jorsta(A,B,C);
```

程序运行后得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，系统线性变换后的方程 $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\bar{\boldsymbol{y}}=[0\quad 0\quad 0]\bar{\boldsymbol{x}}$，并验证了系统状态矩阵特征值的不变性。

14.3　线性系统的可控性与可观性

系统的可控性（或叫能控性）与可观性（或叫能观性）对系统的设计至关重要。这是因为系统的可控性与可观（测）性往往是确定最优系统是否有解的先决条件。

所谓系统可控性，是指系统的状态是能够被控制还是不能被控制；而系统可观性，则是指系统状态的变化能够由输出检测反映出来还是不能检测反映出来。

14.3.1　线性系统的可控性

系统完全可控的必要且充分的条件是：

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{CO}]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{FG}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}]=n$$

可以用 MATLAB 计算可控性矩阵的函数 ctrb( )，来求可控性矩阵 $\boldsymbol{CO}(n\times np)$。函数命令 ctrb( )的调用格式为

CO = ctrb（A，B）

其输入参数 **A** 为离散系统的系统矩阵 **F** 或者连续系统的系统矩阵 **A**，输入参数 **B** 为离散系统的控制矩阵 **G** 或者连续系统的控制矩阵 **B**，函数返回的就是系统可控性矩阵 **CO**。函数 ctrb( )既适用于离散系统，也适用于连续系统。

为方便计算，作者编制了调用系统命令 ctrb. m 判定系统能控性的函数 contro. m。

1. 离散系统的完全可控性示例

【例 14-17】 在离散系统方程$\begin{cases}x(k+1)=\boldsymbol{F}x(k)+\boldsymbol{G}u(k)\\ y(k)=\boldsymbol{C}x(k)+\boldsymbol{D}u(k)\end{cases}$中，已知矩阵 $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 1.7183\\ 0 & 2.7183\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0.7183\\ 1.7183\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C}=[1\quad 1]$、$\boldsymbol{D}=0$。试采用自编函数验算 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{FG}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}]=n$，并判定离散系统的可控性。

解：给出调用自编函数 contro. m 的程序求解。

```
clear;F = [1  1.7183;0  2.7183];A = F;
G = [0.7183;1.7183];B = G;C = [1  1];D = 0;
[CO] = contro(A,B,C,D);
```

程序运行后得到 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{FG}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}]=n=2$，故该离散系统是可控的。

2. 连续系统的完全可控性示例

线性系统$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Du}\end{cases}$完全可控的条件是

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{CO}]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]=n$$

【例 14-18】 已知状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，试确定系统的可控性。

解：给出调用自编函数 contro. m 的程序求解。

```
clear;A = [1  3  2;0  2  0;0  1  3];  B = [2  1;1  1; -1   -1];
C = [0  0];D = 0;[CO] = contro(A,B,C,D);
```

程序运行后得到 rank $[B \quad AB \quad A^2B \cdots A^{n-1}B] = 2 < n = 3$，故该系统是不可控的。当状态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u$ 时，系统是可控的。请读者自行验证。

3. 连续系统的状态完全可控标准型

对于单输入系统$\{A, b\}$，若其状态矩阵与输入矩阵具有如下的正则标准形式：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \text{与 } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则系统一定可控，该矩阵对(A, b)叫做可控标准型。

为方便计算，作者编制了确定系统可控标准型的函数 consta. m。请看示例。

【例 14-19】　已知系统空间模型$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$、$\bar{y} = \bar{C}\bar{x}$，式中矩阵 1）$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$、$\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\bar{C} = [1 \quad 1 \quad 1]$；2）$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$、$\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\bar{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$；3）$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$、$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。试将系统状态方程化为可控标准型并确定原系统与变换后系统是否可控。

解：1）给出调用自编函数 consta. m 的程序求解。

```
clear;A1 = [0 2 -2;1 1 -2;2 -2 1];B1 = [2;1;1];
C1 = [1 1 1];[P,A,B,C] = consta(A1,B1,C1);
```

程序运行后得到系统的可控标准型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\text{、}y = [-20 \quad -4 \quad 4]x$$

程序运行后还得到原系统与变换后系统都是可控的。

2）也给出调用自编函数 consta. m 的程序求解。

```
clear;A1 = [1 2 0;3 -1 1;0 2 0];B1 = [2;1;1];
C1 = [0 0 1];[P,A,B,C] = consta(A1,B1,C1);
```

程序运行后得到系统的变换矩阵与可控标准型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\text{、}y = [3 \quad 2 \quad 1]x$$

程序运行后还得到原系统与变换后系统都是可控的。

3）还给出调用自编函数 consta. m 的程序求解。

```
clear;A1 = [ -1 0;1 2];B1 = [1;1];C1 = [0 0];
```

```
[P,A,B,C] = consta(A1,B1,C1);
```

运行结果得到系统的可控标准型为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

程序运行后还得到原系统与变换后系统都是可控的。

4. 连续系统的输出可控性

系统输出完全可控的必要充分条件为下列 $q \times (n+1)p$ 维输出可控性矩阵 $\boldsymbol{T}$ 有

$$\text{rank}(\boldsymbol{T}) = \text{rank}[\boldsymbol{CB} \quad \boldsymbol{CAB} \quad \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B} \cdots \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{D}] = q$$

式中，q 为输出变量的维数。

为方便计算，作者编制了确定系统输出可控性的函数 outcon. m。请看示例。

【例 14-20】 已知控制系统动态方程的 3 个矩阵为 1）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$；2）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$；3）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C} = [1 \quad 2]$；4）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；5）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$、$\boldsymbol{D} = [1 \quad -1]$，试计算输出可控性矩阵 $\boldsymbol{T}$ 并确定系统状态的可控性与输出可控性。

解：1）给出以下调用自编函数 contro. m 与 outcon. m 的程序求解。

```
clear;A = [ -1  -2  -2;0  -1 1;1 0  -1];B = [2;0;1];C = [1 1 0];D = 0;
[CO] = contro(A,B,C,D); [T] = outcon(A,B,C,D);
```

运行结果表明，系统是可控的；输出可控性矩阵 $\boldsymbol{T} = [2 \quad -3 \quad 0 \quad 0]$，并且系统输出也是可控的。

2）再给出以下调用自编函数 contro. m 与 outcon. m 的程序求解。

```
clear;A = [ -4 0 0 0;0  -1 0 0;0 0  -2 0;0 0 0  -3];
B = [1;0;1;1];C = [1 1 0 1];D = 0;
[CO] = contro(A,B,C,D); [T] = outcon(A,B,C,D);
```

运行结果表明，系统不可控；输出可控性矩阵 $\boldsymbol{T} = [2 \quad -7 \quad 25 \quad -91 \quad 0]$，而系统输出是可控的。

3）也给出以下调用自编函数 contro. m 与 outcon. m 的程序求解。

```
clear;A = [0 pi; -pi 0];B = [0;1];C = [1 2];D = 0;
[CO] = contro(A,B,C,D);[T] = outcon(A,B,C,D);
```

运行结果表明，系统是可控的；输出可控性矩阵 $\boldsymbol{T}=[2\quad 3.1416\quad 0]$，并且系统输出也是可控的。

4）还给出以下调用自编函数 contro. m 与 outcon. m 的程序求解。

```
clear;A=[0 1 0 0 0;0 0 1 0 0;0 0 0 1 0;0 0 0 0 1;-1 -1 -2 -2 -1];
B=[1;0;0;0;1];C=[1 0 -1 0 0;-2 0 2 0 0];D=[0;0];
[CO]=contro(A,B,C,D);[T]=outcon(A,B,C,D);
```

运行结果表明，系统是可控的；输出可控性矩阵 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 2 & -4 & -2 & 0\end{bmatrix}$，系统输出是不可控的。

5）给出以下调用自编函数 contro. m 与 outcon. m 的程序求解。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;0 -2 -2];
B=[0 -2;2 0;4 4];C=[0 0 1];D=[1 -1];
[CO]=contro(A,B,C,D);
[T]=outcon(A,B,C,D);
```

已经说明系统可控；程序运行后得到输出可控性矩阵 $\boldsymbol{T}=[4\quad 4\quad -12\quad -8\quad 16\quad 8\quad 1\quad -1]$，系统输出也是可控的。

14.3.2　线性系统的可观性

1. 线性离散系统的完全可观性

认真复习并理解系统完全可观测的概念。

系统完全可观测的条件为 $\boldsymbol{OB}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CF}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CF}^{n-1}\end{bmatrix}$ 与 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{OB}_1)=n$。可以用 MATLAB 的求可观性矩阵函数 obsv( ) 来计算矩阵 $\boldsymbol{OB}$。函数 obsv( ) 的调用格式为

OB = obsv(A,C)

其中，输入参数 **A** 即为离散系统的系统矩阵 **F** 或者连续系统的系统矩阵 **A**，输入参数 **C** 即为离散系统的观测矩阵或者连续系统的观测矩阵，函数返回的就是系统可观性矩阵 **OB**。可见函数 obsv( ) 既适用于离散系统，也适用于连续系统。

为方便计算，作者编制了调用系统函数 obsv. m 确定系统完全可观测性的函数 obser. m。请看示例。

【例 14-21】 已知离散系统方程 $\begin{cases}x(k+1)=\boldsymbol{A}x(k)+\boldsymbol{B}u(k)\\ y(k)=\boldsymbol{C}x(k)+\boldsymbol{D}u(k)\end{cases}$，式中矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1.7183\\ 0 & 2.7183\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.7183\\ 1.7183\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C}=[1\quad 1]$、$\boldsymbol{D}=0$。1）试用自编函数 contro. m 判断系统可控性；2）试用自编函数 obser. m 判断系统可观性。

解：给出以下调用自编函数 contro. m 与 obser. m 的程序求解。

```
clear;A=[1 1.7183;0 2.7183];
B=[0.7183;1.7183];C=[1 1];D=0;
[CO]=contro(A,B,C,D);
```

```
[OB]=obser(A,B,C,D);
```

计算结果表明系统既是可控的也是可观的。

2. 连续系统的完全可观性

【例 14-22】 试判别以下线性系统的可控性及可观(测)性。系统动态方程为

1) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&4&2\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$; 2) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&1\\3&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$。

解：1) 给出以下调用自编函数 contro. m 与 obser. m 的程序求解。

```
clear;A=[1 3 2;0 4 2;0 0 1];B=[0 1;0 0;1 0];C=[1 0 0;0 0 1];D=[0];
[CO]=contro(A,B,C,D);
[OB]=obser(A,B,C,D);
```

程序运行结果表明，本系统既可控也可观。

2) 再给出以下调用自编函数 contro. m 与 obser. m 的程序求解。

```
clear;A=[1 0 -1;0 -2 1;3 0 2];B=[2;-1;1];C=[0 0 1;1 0 0];D=[0];
[CO]=contro(A,B,C,D); [OB]=obser(A,B,C,D);
```

计算结果表明系统是可控但是不可观的。

3. 连续系统的完全可观标准型

对于单输出系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$，若其状态矩阵与输出矩阵有如下的标准形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}\text{与 }\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0&0\cdots0&1\end{bmatrix}$$

则该系统一定可观测，而矩阵对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c})$被叫做可观标准型。

为方便计算，作者编制了函数 obssta. m 确定系统可观标准型。

【例 14-23】 试对以下系统判断其可观性，再将系统动态方程化为可观标准型并求其变换矩阵。系统动态方程为

1) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\0&-2&0\\1&-4&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$; 2) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3&2\\1&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$; 4) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$。

解：1) 给出以下调用自编函数 contro. m、obser. m 与 obssta. m 的程序求解。

```
clear;A=[-2 2 -1;0 -2 2;1 -4 0];B=[0;1;0];C=[0 1 1];D=[0];
[CO]=contro(A,B,C,D);[OB]=obser(A,B,C,D);
[M,A1,B1,C1]=obssta(A,B,C,D);
```

程序运行后得到转换前系统可控也可观，转换后系统也可观，带可观标准型的动态方程为$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-14\\1&0&-13\\0&1&-4\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}-5\\-2\\1\end{bmatrix}u\\ \bar{y}=\bar{c}\ \bar{x}=[0\quad 0\quad 1]\bar{x}\end{cases}$，变换矩阵为$M=\begin{bmatrix}0.4211&-0.6842&0.7368\\0.0526&-0.2105&0.8421\\-0.0526&0.2105&0.1579\end{bmatrix}$。

2）也给出以下调用自编函数 contro. m、obser. m 与 obssta. m 的程序求解。

```
clear;A=[2 -1 -1;0 -1 0;0 2 1];B=[7;2;1];C=[1 1 0];D=[0];
[CO]=contro(A,B,C,D);[OB]=obser(A,B,C,D);
[M,A1,B1,C1]=obssta(A,B,C,D);
```

程序运行后得到转换前系统可控也可观，转换后系统也可观，带可观标准型的动态方程为$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}-6\\-9\\9\end{bmatrix}u\\ \bar{y}=[0\quad 0\quad 1]\ \bar{x}\end{cases}$，变换矩阵为$M=\begin{bmatrix}-0.1667&0.1667&0.8333\\0.1667&-0.1667&0.1667\\-0.6667&-0.3333&-0.6667\end{bmatrix}$。

3）还给出以下调用自编函数 contro. m、obser. m 与 obssta. m 的程序求解。

```
clear;A=[3 2;1 -1];B=[1;2];C=[1 1];D=[0];
[CO]=contro(A,B,C,D);[OB]=obser(A,B,C,D);
[M,A1,B1,C1]=obssta(A,B,C,D);
```

程序运行后得到转换前系统可控也可观，转换后系统也可观，带可观标准型的动态方程为$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&5\\1&2\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}u\\ \bar{y}=[0\quad 1]\bar{x}\end{cases}$，变换矩阵为$M=\begin{bmatrix}0.3333&0.3333\\-0.3333&0.6667\end{bmatrix}$。

4）再给出以下调用自编函数 contro. m、obser. m 与 obssta. m 的程序求解。

```
clear;A=[-1 0 0;0 -2 0;0 0 -3];B=[2;3;4];C=[1 -1 2];D=[0];
[CO]=contro(A,B,C,D);[OB]=obser(A,B,C,D);
[M,A1,B1,C1]=obssta(A,B,C,D);
```

程序运行后得到转换前系统可控也可观，转换后系统也可观，带可观标准型的动态方程为$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}19\\22\\7\end{bmatrix}u\\ \bar{y}=[0\quad 0\quad 1]\bar{x}\end{cases}$，变换矩阵为$M=\begin{bmatrix}0.50&-0.50&0.50\\1.00&-2.00&4.00\\0.25&-0.75&2.25\end{bmatrix}$。

【例 14-24】 续【例 14-2】，试确定图 14-2 所示系统的可控性与可观性。

解：1）给出调用系统函数 linmod2. m 与自编函数 contro. m、obser. m 的程序解算。

```
clear; [A, B, C, D] =linmod2 ('sx2L1402a'),
[CO] =contro (A, B, C, D); [OB] =obser (A, B, C, D);
```

程序运行后得到动态方程$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = [1 \quad 0]\boldsymbol{x} \end{cases}$与对应的系统不可控但可观。

2）也给出调用系统函数 linmod2. m 与自编函数 contro. m、obser. m 的程序解算。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L1402b'),
[CO] = contro(A,B,C,D); [OB] = obser(A,B,C,D);
```

程序运行后得到系统动态方程$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -11 & -5.4545 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = [0 \quad 11 \quad 0]\ \boldsymbol{x} \end{cases}$与对应的系统是既可控也可观。

4. 线性定常系统的实现问题

线性系统的实现问题是给定系统的传递函数 $G(s)$，求系统 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 阵的问题。

对于 SISO 线性定常系统，如果其传递函数是可实现的，则有任意维数的动态方程与之对应。其动态方程维数最小的实现称为最小实现，最小实现的维数等于传递函数的阶数。

以下介绍 SISO 系统可控标准型与可观标准型实现的示例。

【例 14-25】 已知系统传递函数 1）$G(s)=\dfrac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$；2）$G(s)=\dfrac{2s^2+5s+1}{s^3+6s^2+12s+8}$；3）$G(s)=\dfrac{4s^2+17s+16}{s^3+7s^2+16s+12}$，试求系统可控性及可观性的动态方程实现。

解：1）对第 1 个系统传递函数，可直接写出系统的可控标准型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = [5 \quad 4 \quad 1]\ \boldsymbol{x} \end{cases}$$

系统的可观标准型为$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = [0 \quad 0 \quad 1]\boldsymbol{x} \end{cases}$

对于可控标准型可用自编函数 ssto2. m 验证以上计算是否正确。

```
clear;A = [0 1 0;0 0 1; -6  -11  -6];B = [0;0;1];C = [5 4 1];D = 0;
key = 1;G = ssto2(key,A,B,C,D);
```

对于可观标准型，读者可按可控标准型的程序自行验算。

```
clear;A = [0 0  -6;1 0  -11;0 1  -6];B = [5;4;1];C = [0 0 1];D = 0;
key = 1;G = ssto2(key,A,B,C,D);
```

2）对第 2 个系统传递函数，可直接写出系统的可控标准型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = [1 \quad 5 \quad 2]\boldsymbol{x} \end{cases}$$

系统的可观（测）标准型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-8\\1&0&-12\\0&1&-6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}\end{cases}$$

读者可自行验证以上计算是否正确。

3）对第 3 个系统传递函数，可直接写出系统的可控标准型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-12&-16&-7\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[16\quad 17\quad 4]\boldsymbol{x}\end{cases}$$

系统的可观（测）标准型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-12\\1&0&-16\\0&1&-7\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}16\\17\\4\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}\end{cases}$$

读者可自行验证以上计算是正确的。

14.4　系统状态反馈与状态观测器

状态空间描述的系统，常用状态反馈的方法来配置系统极点，使之具有特定性能。所谓状态反馈，是将系统的每一个状态变量乘以相应的反馈系数，然后反馈到输入端与给定输入叠加后作为控制系统的控制输入。

为了实现状态反馈，需要系统全部的状态变量。但在实际系统中，大部分状态变量很难直接测量到。因此，为了实现状态反馈控制，需要通过一个模型，利用已知的信息（如输出量 $\boldsymbol{y}$ 与输入量 $\boldsymbol{u}$）对系统状态变量进行估计。这样，可以构造一个与已知实际系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ 具有同样动态方程的模拟系统，用模拟系统的状态向量 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 作为实际系统状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的估计器。状态观测器就是状态估计器。

14.4.1　系统的极点配置

所谓系统的极点配置问题，就是给定了闭环系统的极点位置后，如何通过某种方法来达到给定的极点配置。

对一个可控系统，通过状态反馈的方法，使闭环系统的极点位于预先规定的位置上。由自动控制原理，实现闭环极点任意配置必要且充分条件是系统完全可控。

在 MATLAB 系统中提供的 place( ) 函数，由指定的闭环系统极点计算状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$。函数的调用格式为

K = place(A，B，p)

其中，输入参数 **A** 为系统的状态矩阵，**B** 为系统的输入矩阵，**p** 为指定的闭环系统极点。返回参数 **K** 为反馈增益矩阵，即状态反馈矩阵。

函数命令 place()也可计算估计系统状态的装置即观测器的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，使采用全反馈 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{Kx}$ 的多输入系统具有指定的闭环极点 $\boldsymbol{p}$。其调用格式为

K = place（A'，C'，p）

其中，输入参数 **A** 为系统状态矩阵，**A′**是 **A** 的转置矩阵；**C** 为系统观测矩阵，**C′**是 **C** 的转置矩阵；**p** 为指定的闭环系统极点。返回参数 **K** 为估计系统状态观测器的增益矩阵。

为方便计算，作者编制了判别系统的可控性并设计状态反馈控制器增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的函数 stabak. m。

【例 14-26】 试判别以下系统的可控性并设计状态反馈控制器。已知系统的动态方程为 1）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & -12\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，要求系统闭环极点为 $\lambda_1=-2$、$\lambda_{2.3}=-1\pm j$；2）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 11 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 0\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$，要求闭环极点为 $\lambda_1=-1$、$\lambda_2=-2$、$\lambda_{3.4}=-1\pm \mathrm{j}$；3）$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 10\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[0\quad 0\quad 1]\ \boldsymbol{x}\end{cases}$，闭环极点为 $\lambda_1=-10$、$\lambda_{2.3}=-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}$。

解：1）给出调用自编函数 stabak. m 的程序求解。

```
clear;A=[0 0 0;1 -6 0;0 1 -12];B=[1;0;0];C=0;D=0;
P=[-2 -1+1i -1-1i];
key=1;[K]=stabak(key,A,B,C,D,P);
```

程序运行后表明，系统是可控的，系统可实现按题意要求的闭环极点配置；计算得的估计系统状态观测器的增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[-14\quad 186\quad -1220]$。

2）也给出调用自编函数 stabak. m 的程序求解。

```
clear;A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 11 0];
B=[0;1;0;-1];C=[1 0 0 0];D=0;
p=[-1 -2 -1+1i -1-1i];key=1;
[K]=stabak(key,A,B,C,D,p);
```

程序运行后表明，系统是可控的，系统可实现按题意要求的闭环极点配置；计算得的估计系统状态观测器的增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[-0.4\quad -1\quad -21.4\quad -6]$。

3）再给出调用自编函数 stabak. m 的程序求解。

```
clear;A=[0 1 0;0 -1 1;0 -1 10];
B=[0;0;10];C=[0 0 1];D=0;
P=[-10 -1+sqrt(3)*j -1-sqrt(3)*j];
key=1;[K]=stabak(key,A,B,C,D,P);
```

程序运行后表明，系统是可控的，系统可实现按题意要求的闭环极点配置；计算得的估计系统状态观测器的增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[4\quad 1.2\quad 2.1]$。

14.4.2　系统的状态观测器

可以证明，当系统完全可观测时，一定存在状态观测器。

MATLAB 系统提供了函数 acker.m 来计算估计器增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，使采用全反馈 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kx}$ 的单输入系统具有指定的闭环极点 $\boldsymbol{p}$。函数命令 acker.m 的调用格式为

```
K = acker(A', C', p)
```

其中输入参数 **A** 为系统的状态矩阵，**A′**是 **A** 的转置矩阵；**C** 为系统的观测矩阵，**C′**是 **C** 的转置矩阵；**p** 为指定的闭环系统极点。返回参数 **K** 为估计器增益矩阵，而 **K′** = **H**。

对于已知的实际控制系统$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$，通过函数命令 acker.m 先求出 $\boldsymbol{K}$ 后，进而求得 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{H})$，最后解得状态观测器表达式。

为方便计算，作者编制了判别系统的可观性并设计状态反馈控制器增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的函数 staest.m。

【例 14-27】　续【例 14-25】，对 1）系统 $G(s)=\dfrac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$，要求闭环极点为 $\lambda_1 = -2$、$\lambda_{2,3} = -2 \pm \mathrm{j}2$；2）系统 $G(s)=\dfrac{2s^2+5s+1}{s^3+6s^2+12s+8}$，要求闭环极点为 $\lambda_1 = -0.25$、$\lambda_{2,3} = -1 \pm \mathrm{j}$。试计算极点配置前后系统的单位阶跃响应；再绘制带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的系统状态模型图，并验证配置极点后的单位阶跃响应性能指标。

解：1）已经算出 $G(s)=\dfrac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$的动态方程$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = [5 \quad 4 \quad 1]\boldsymbol{x} \end{cases}$。

① 用程序绘制没有配置极点的原系统单位阶跃响应。

```
clear;A=[0,1,0;0,0,1;-6,-11,-6];B=[0;0;1];C=[5,4,1];D=0;
sys=ss(A,B,C,D);step(sys),grid;
```

程序运行后得到原系统 1 单位阶跃响应曲线如图 14-3 所示。

② 用程序绘制配置极点后系统单位阶跃响应。

```
clear;A=[0,1,0;0,0,1;-6,-11,-6];B=[0;0;1];C=[5,4,1];D=0;
P=[-2,-2+2*j,-2-2*j];K=place(A,B,P),At=A-B*K;Bt=B;Ct=C;Dt=D;
sys=ss(At,Bt,Ct,Dt);step(sys),grid; [y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

③ 结论。配置极点前原系统单位阶跃响应曲线虽不超调，但是响应速度很慢，启动时间很长。配置极点后系统阶跃响应曲线如图 14-4 所示，虽有 6.3853% 的微超调，但是阶跃响应曲线上升陡，响应速度快很多，配置极点后系统的峰值时间 $t_p = 0.9537\mathrm{s}$、调节时间 $t_s = 1.5365\mathrm{s}$。程序运行后还算得反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K} = [10 \quad 5 \quad 0]$。

④ 绘制带反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的系统模型(见图 14-5)，并用程序验证配置极点后响应性能指标。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1427');
sys=ss(A,B,C,D);step(sys),grid; [y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到与图 14-4 完全相同的结果，既证明带状态反馈增益矩阵的系统状态模型图绘制正确，同时证明以上计算也是正确的。

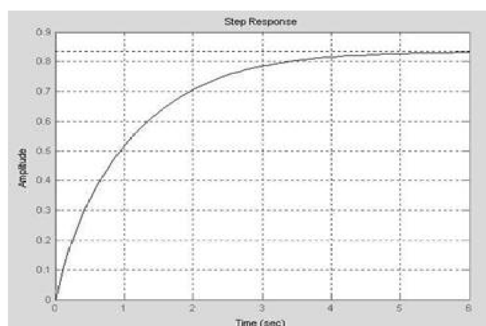


图 14-3　原系统 1 单位阶跃响应曲线

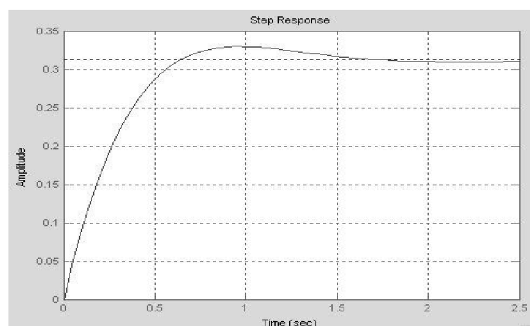


图 14-4　配置极点后系统 1 单位阶跃响应曲线

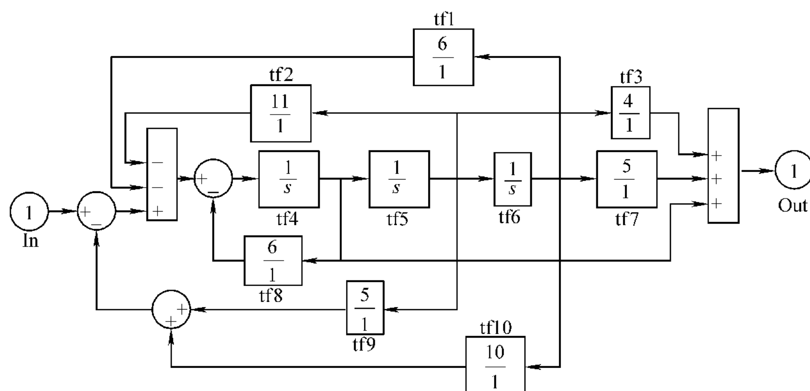


图 14-5　带反馈增益矩阵 **K** 系统 1 的系统模型 sx2L1427. mdl

2）已经算出 $G(s)=\dfrac{2s^2+5s+1}{s^3+6s^2+12s+8}$ 的动态方程 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-8 & -12 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[1\quad 5\quad 2]x\end{cases}$。

① 用程序绘制没有配置极点的原系统单位阶跃响应。

```
clear;A=[0,1,0;0,0,1;-8,-12,-6];B=[0;0;1];C=[1,5,2];D=0;
sys=ss(A,B,C,D);step(sys),grid;
```

程序运行后得到原系统 2 单位阶跃响应曲线如图 14-6 所示。

② 用程序绘制配置极点后系统单位阶跃响应。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-8 -12 -6];B=[0;0;1];C=[1 5 2];D=0;
P=[-0.25 -1+j -1-j];K=place(A,B,P),At=A-B*K;Bt=B;Ct=C;Dt=D;
sys=ss(At,Bt,Ct,Dt);step(sys),grid;[y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

③ 结论。配置极点前原系统单位阶跃响应曲线超调很厉害。配置极点后系统单位阶跃响应曲线如图 14-7 所示，仅有 14.9186% 的超调，阶跃响应曲线上升也很陡，响应速度不慢，配置极点后系统的峰值时间 $t_p=2.5432$s、调节时间 $t_s=7.2057$s。程序运行后还算得反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}=[-7.5\quad -9.5\quad -3.75]$。

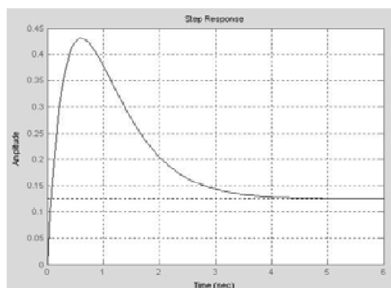


图 14-6　原系统 2 单位阶跃响应曲线

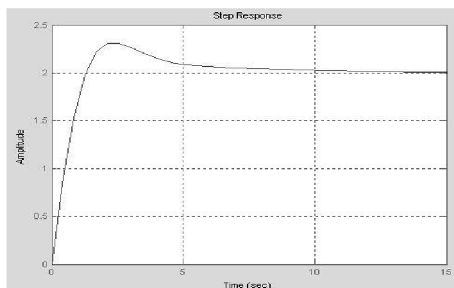


图 14-7　配置极点后系统 2 阶跃响应曲线

④ 绘制带反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的系统模型(见图 14-8)，并用程序验证配置极点后响应性能指标。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1427a');
sys=ss(A,B,C,D);step(sys),grid;[y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到与图 14-7 完全相同的结果，既证明带状态反馈增益矩阵的系统状态模型图绘制正确，同样证明以上计算也是正确的。

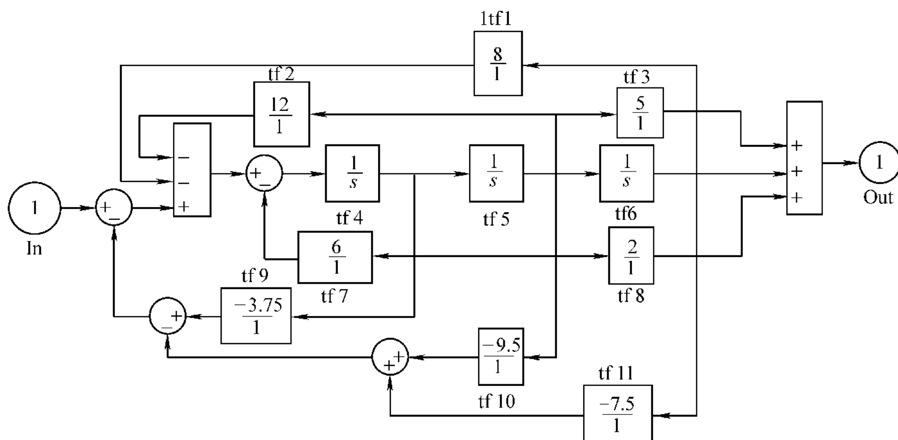


图 14-8　带反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 系统 2 的系统模型 sx2L1427a. mdl

【例 14-28】　判别以下系统可控、可观性并设计状态观测器。1）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 1\quad 0]\boldsymbol{x}$，要求闭环极点 $\lambda_1=-3$、$\lambda_2=-4$、$\lambda_3=-5$；2）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[2\quad 0]\boldsymbol{x}$，要求闭环极点为 $\lambda_1=-10$、$\lambda_2=-10$。

解： 1）给出调用自编函数 staest. m 的程序求解。

```
clear;A=[1 0 0;0 2 1;0 0 2];B=[1;0;1];C=[1 1 0];D=0;P=[-3 -4 -5];
[CO]=contro(A,B,C,D);[K,H,AHC]=staest(A,B,C,D,P);
```

程序运行后结果表明系统是可控的也是可观的。还算得全维状态观测器增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[120\quad -103\quad 210]$，全维状态观测器的动态方程为

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-119 & -120 & 0\\ 103 & 105 & 1\\ -210 & -210 & 2\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}120\\-103\\210\end{bmatrix}y。$$

2）也给出调用自编函数 staest. m 的程序求解。

```
clear;A=[-1 1;0 -2];B=[0;1];C=[2 0];D=0;P=[-10 -10];
[CO]=contro(A,B,C,D); [K,H,AHC]=staest(A,B,C,D,P);
```

程序运行后表明系统是可控的也是可观的。程序计算得到全维状态观测器增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[8.5\quad 32]$，全维状态观测器的动态方程为

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-18 & 1\\ -64 & -2\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}8.5\\32\end{bmatrix}y$$

14.4.3 系统的状态降维观测器

当观测器的维数等于原系统状态向量的维数时叫做全维观测器。所谓状态降维观测器，就是观测器维数在低于原系统状态向量维数时，也能对原系统状态做出最佳估计的观测器。对于一个 n 维的可观测系统：

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u、\bar{y}=\bar{C}\bar{x}$$

式中，$\bar{x}$ 为 n 维向量，u 为 p 维向量，$\bar{y}$ 为 q 维向量，$\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 分别为 $(n\times n)$ 维、$(n\times p)$ 维、$(q\times n)$ 维矩阵。

当 $\bar{C}$ 满行秩（即 $\operatorname{rank}\bar{C}=q$）时，可以定义一种非奇异线性变换

$$\bar{x}=Q^{-1}x$$

式中

$$Q_{n\times n}=\begin{bmatrix}D\\ \cdots\\ \bar{C}\end{bmatrix}$$

请注意，式中 D 是使 Q 非奇异的 $(n-q)\times n$ 维任意矩阵。

系统 $\{\bar{A},\bar{B},\bar{C}\}$ 经非奇异线性变换后的系统 $\{A,B,C\}$：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=\bar{y}=Cx\end{cases}\tag{14-6}$$

式中

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

即为把 x 分解为 x_1 与 x_2 两部分，其中 x_2 是 q 个直接由输出测得的状态变量。变换后系统中 $A=Q\bar{A}Q^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$、$B=Q\bar{B}=\begin{bmatrix}B_1\\ \cdots\\ B_2\end{bmatrix}$、$C=\bar{C}Q^{-1}=\begin{bmatrix}D\\ \cdots\\ \bar{C}\end{bmatrix}^{-1}$，由恒等式

$$\bar{C}=\bar{C}\begin{bmatrix}D\\ \cdots\\ \bar{C}\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}D\\ \cdots\\ \bar{C}\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}D\\ \cdots\\ \bar{C}\end{bmatrix},\ \bar{C}=[0\quad E]=\begin{bmatrix}D\\ \cdots\\ \bar{C}\end{bmatrix}$$

对比这两式可得

$$C=[0\quad E]$$

故有
$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\\dot{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=[0\quad \boldsymbol{E}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}_2\end{cases}\tag{14-7}$$

式中，$\boldsymbol{x}_1$ 为$(n-q)$维列向量；$\boldsymbol{x}_2$ 为 q 维列向量；$\boldsymbol{A}_{11}$为$(n-q)\times(n-q)$维矩阵；$\boldsymbol{A}_{12}$为$(n-q)\times q$ 维矩阵；$\boldsymbol{A}_{21}$为 $q\times(n-q)$维矩阵；$\boldsymbol{A}_{22}$为 $q\times q$ 维矩阵；$\boldsymbol{B}_1$ 为$(n-q)\times p$ 维矩阵；$\boldsymbol{B}_2$ 为 $q\times p$ 维矩阵。

因为系统$\{\bar{\boldsymbol{A}},\ \bar{\boldsymbol{B}},\ \bar{\boldsymbol{C}}\}$可观测，经线性坐标变换后的系统$\{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}\}$仍为可观测系统。

由式(14-7)可以看出，通过直接测量输出 $\boldsymbol{y}$，已可得到系统的部分状态 $\boldsymbol{x}_2$，现在只要设计出能估计状态 $\boldsymbol{x}_1$ 的$(n-q)$维观测器，它就是原系统$\{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}\}$的降维观测器了。这个$(n-q)$维观测器通常称为龙伯格观测器。

考虑 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_2$、$\dot{\boldsymbol{y}}=\dot{\boldsymbol{x}}_2$ 并计及式(14-7)，式(14-6)可以改写成如下形式：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u})\\ \dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{14-8}$$

令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{z}=\dot{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}$

式(14-8)可写为
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1\end{cases}\tag{14-9}$$

式(14-9)是一个$(n-q)$维子系统动态方程，第一式是状态方程，第二式是输出方程。$\boldsymbol{z}$ 是该子系统的 q 维输出向量，$\boldsymbol{x}_1$ 是$(n-q)$维状态变量，$\boldsymbol{v}$ 是$(n-q)$维输入向量，$\boldsymbol{A}_{11}$是$(n-q)\times(n-q)$维状态矩阵，$\boldsymbol{A}_{21}$是 $q\times(n-q)$维输出矩阵。

与构成全维观测器的方法相同，构成带降维状态观测器的$(n-q)$维子系统图如图14-9所示。

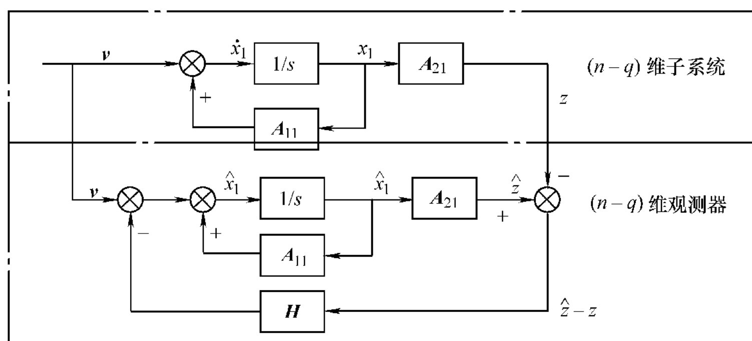


图 14-9　用降维观测器实现状态反馈的系统模型原理图

由图 14-9 可得降维状态观测器（龙伯格观测器）的动态方程为

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1=\boldsymbol{A}_{11}\hat{\boldsymbol{x}}_1+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{H}\ (\hat{z}-z)\\ \hat{z}=\boldsymbol{A}_{21}\hat{\boldsymbol{x}}_1\end{cases}\tag{14-10}$$

式中，观测器输出反馈阵 $\boldsymbol{H}$ 为$(n-q)\times q$ 维矩阵，观测器的输出就是 $\boldsymbol{x}_1$。

考虑 $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{z}=\dot{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}$，式(14-10)所示的降维观测器可写成

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}+\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}) \tag{14-11}$$

式中，$(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})$为系统降维状态观测器矩阵。降维状态观测器的极点由特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})|=0 \tag{14-12}$$

或者式

$$\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]=\prod_{k=1}^{n-q}(s+\lambda_{\mathrm{k}}) \tag{14-13}$$

决定。式中，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。若是给定降维状态观测器的极点，则可由式(14-12)或式(14-13)解算出观测器输出反馈矩阵 $\boldsymbol{H}$。

还需指出，式(14-11)中 $\dot{\boldsymbol{y}}$ 是不能直接量测到的，为避免应用 $\dot{\boldsymbol{y}}$，特作如下变量变换：

$$\begin{cases}\boldsymbol{w}=\hat{\boldsymbol{x}}_1-\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\\ \dot{\boldsymbol{w}}=\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1-\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{y}}\end{cases} \tag{14-14}$$

所以降阶观测器为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{w}}=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{w}+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u}+[(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{H}+\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{22}]\boldsymbol{y}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\end{cases} \tag{14-15}$$

这样，系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$的状态估计则按下式求得

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\\ \cdots\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{(\mathrm{n-q})}\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ \cdots\\ \boldsymbol{E}_{(\mathrm{q})}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{(\mathrm{n-q})} & \boldsymbol{H}\\ 0 & \boldsymbol{E}_{(\mathrm{q})}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix} \tag{14-16}$$

自动控制理论中已经说明，只要子系统$(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{21})$完全能观测，$\boldsymbol{H}$ 就一定存在。由式(14-12)或式(14-13)算出矩阵 $\boldsymbol{H}$ 后，状态观测器式(14-15)即可解得。

若要绘制带降维观测器的系统模型图，还需要将 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 变换回到$\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}$状态空间，于是又有

$$\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_1\\ \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_2\\ \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{y} \tag{14-17}$$

式中，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ 0\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ 1\end{bmatrix}$。

为方便计算，作者编制了计算降维状态估计器的函数 reduest. m。请看示例。

【例 14-29】 已知系统动态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-0.4 & 0 & -0.01\\ 1 & 0 & 0\\ -1.4 & 9.8 & -0.02\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}6.3\\ 0\\ 9.8\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}$。1）计算系统的单位阶跃响应；2）计算系统可控标准型动态方程，并验证线性变换传递函数的不变性；3）绘制可控标准型系统仿真模型，并对其进行单位阶跃响应仿真；4）判别系统可控性，并求状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，要求系统闭环极点为 $\lambda_1=-2$、$\lambda_{2,3}=-1\pm \mathrm{j}$；5）

要求系统闭环极点不变，求系统状态观测器的增益矩阵 $\boldsymbol{K}_h$；6）判别系统的可观性，并设计状态观测器；7）绘制带状态观测器及其反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_h$ 的可控标准型系统仿真模型，并对其进行单位阶跃响应仿真；8）计算系统降维状态观测器，要求系统闭环极点为 $\lambda_{1,2}=-3\pm j3$；9）绘制带降维状态观测器及其反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_h$ 的可控标准型系统仿真模型，并进行仿真。

解：1）求可控标准型系统空间动态方程。

```
clear;A1 = [ -0.4 0  -0.01;1 0 0; -1.4 9.8  -0.02];
B1 = [6.3;0;9.8];C1 = [0 0 1];D = 0;
[P,A,B,C] = consta(A1,B1,C1);
```

程序运行表明，原系统与可控标准型系统都是可控的，计算得到可控标准型

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -0.098 & 0.006 & -0.42\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}、\bar{\boldsymbol{y}}=[61.74\quad -4.9\quad 9.8]\bar{\boldsymbol{x}}$$

给出以下调用自编函数 tran01. m 的程序解算可控标准型系统对应的传递函数矩阵$G(s)$。

```
clear;syms s t;A = [0 1 0;0 0 1; -0.0980 0.0060  -0.4200];
B = [0;0;1];C = [61.74  -4.9 9.8];D = 0; [invsea,G] = tran01(A,B,C,D);
```

程序运行后得到传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)=490\times\dfrac{10s^2-5s+63}{500s^3+210s^2-3s+49}$。

2）计算原系统的单位阶跃响应。

```
clear;A = [ -0.4 0  -0.01;1 0 0; -1.4 9.8  -0.02];B = [6.3;0;9.8];C = [0 0 1];D = 0;
sys = ss(A,B,C,D);t = 0:0.1:120;step(sys,t),grid;
```

程序运行后绘制单位阶跃响应，如图 14-10 所示，这是一条发散振荡曲线，系统不能工作。还可调用自编函数 tran01. m 解算原系统的传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$，与可控标准型系统的一样。

3）绘制可控标准型系统仿真模型，如图 14-11 所示，并对其进行单位阶跃响应仿真。

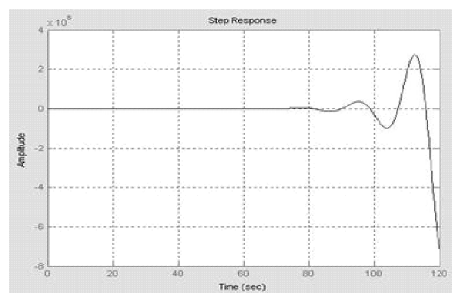


图 14-10　原系统单位阶跃响应曲线

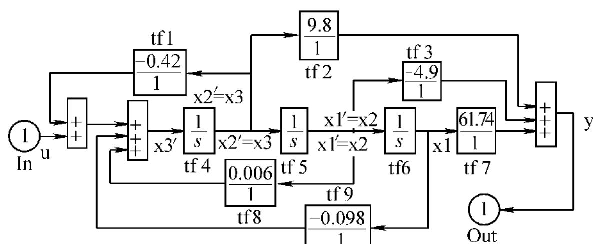


图 14-11　系统可控标准型仿真模型 sx2L1429. mdl

用系统可控标准型仿真模型仿真绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L1429');
sys = ss(A,B,C,D);t = 0:0.1:120;step(sys,t),grid;
```

程序运行后得到系统可控标准型模型单位阶跃响应曲线仍如图 14-10 所示，与原系统的单位阶跃响应曲线完全一样。

4）给出以下调用自编函数 stabak. m 的程序解算系统状态观测器的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-0.0980 0.0060 -0.4200];
B=[0;0;1];C=[61.74 -4.9 9.8];D=0;P=[-2 -1+j -1-j];
key=1;[K]=stabak(key,A,B,C,D,P);
```

程序运行后表明，系统是可控的，系统可实现按题意要求的闭环极点配置；计算得的估计系统状态观测器的增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[3.9020\quad 6.006\quad 3.58]$。

5）绘制带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的可控标准型系统仿真模型，如图 14-12 所示，并对其进行单位阶跃响应仿真。

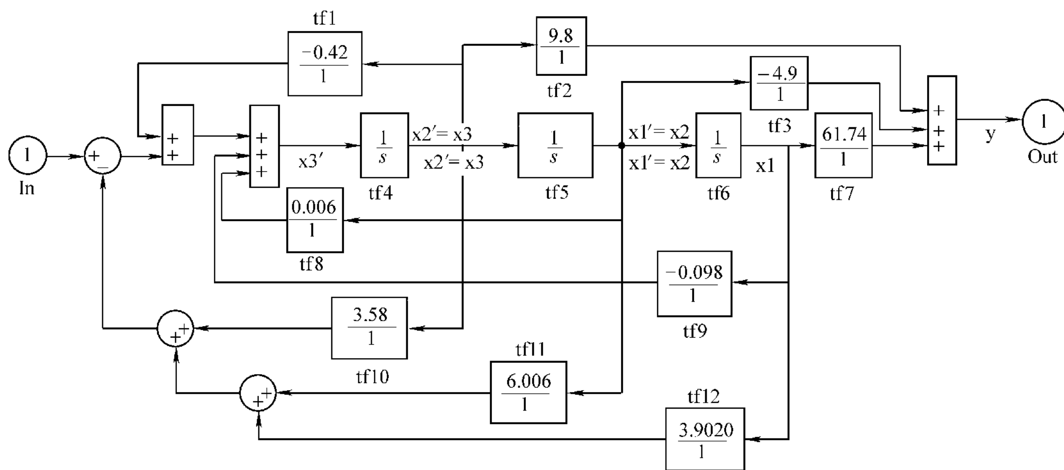


图 14-12　带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的可控标准型系统仿真模型 sx2L1429a. mdl

用系统仿真模型 sx2L1429a. m 绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1429a');
sys=ss(A,B,C,D);step(sys),grid;
[y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到可控标准型模型带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 后的系统单位阶跃响应曲线，如图 14-13 所示，说明系统不仅稳定，而且性能指标优良，$\sigma\%=2.2893\%$。

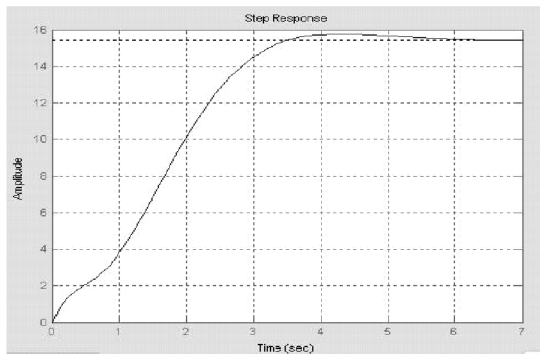


图 14-13　模型 sx2L1429a. mdl 的单位阶跃响应曲线

6）给出以下调用自编函数 staest. m 的程序解算系统的可观性并设计状态观测器。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-0.0980 0.0060 -0.4200];
B=[0;0;1];C=[61.74 -4.9 9.8];D=0;
P=[-2 -1+j -1-j];[CO]=contro(A,B,C,D);
[K,H,AHC]=staest(A,B,C,D,P);
```

计算结果表明，系统既可控也可观，所以存在状态观测器。系统的状态观测器为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-3.6562 & 1.2902 & -0.5803\\ -4.8378 & 0.3840 & 0.2321\\ -2.0369 & 0.1599 & -0.7278\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}0.0592\\0.0784\\0.0314\end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

7）绘制带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与状态观测器的系统模型 sx2L1429b. mdl，如图 14-14 所示，并仿真。

用带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与状态观测器的系统模型 sx2L1429b. mdl 绘制单位阶跃响应。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L1429b');sys = ss(A,B,C,D);
step(sys),grid;[y,t] = step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与状态观测器的系统单位阶跃响应曲线与图 14-13相差无几，说明系统不仅稳定，而且性能指标优良，$\sigma\% = 2.2197\%$。

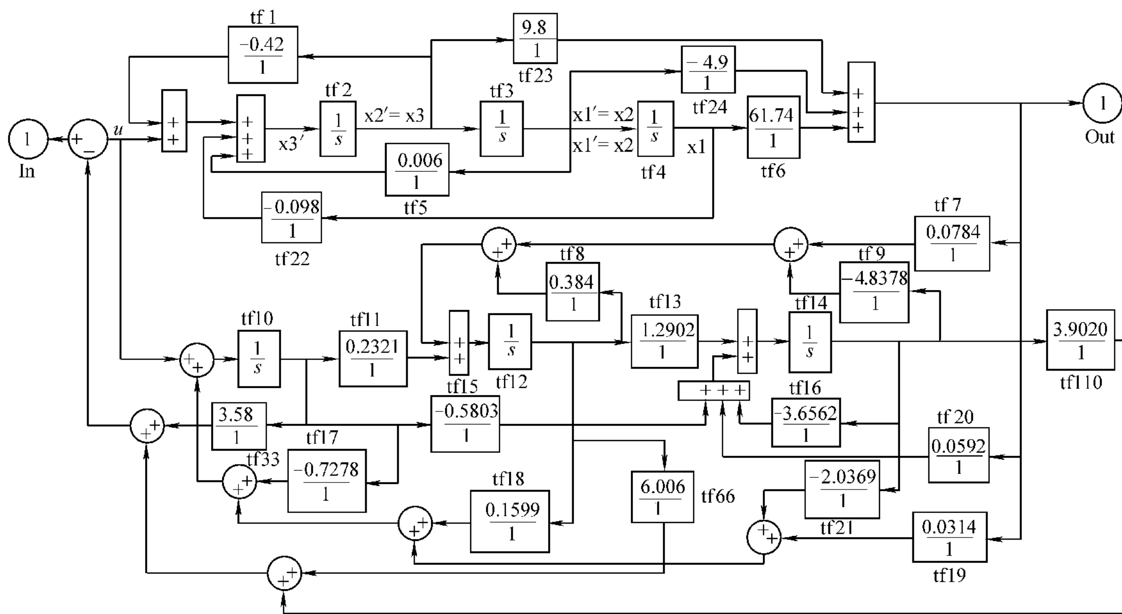


图 14-14　带状态观测器与状态观测器的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的系统模型 sx2L1429b. mdl

8）设计降维状态观测器。

① 选择任意矩阵 $\boldsymbol{D}$ 构造非奇异线性变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}、\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}\\ \cdots\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 61.74 & -4.9 & 9.8\end{bmatrix}$$

② 根据系统参数，设输出反馈矩阵 $\boldsymbol{H}_{(n-q)\times q}=\boldsymbol{H}_{2\times 1}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$，并用以下 MATLAB 程序计算 $\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]$，式中包含输出反馈矩阵元素 h_1 与 h_2。

```
clear;syms h1 h2 s;
A1 = [0 1 0;0 0 1; -0.098 0.006 -0.42];B1 = [0;0;1];
C1 = [61.74 -4.9 9.8];H = [h1 h2].';n = length(A1);E = eye(n-1);
Q = [1 0 0;0 1 0;61.74 -4.9 9.8];Q1 = inv(Q);A = Q * A1 * Q1;A11 = [A(1:2,1:2)];
A21 = [A(3,1:2)];eq = collect(det(s * E -(A11 - H * A21)),s);eqq = vpa(eq,4),
```

程序运行后得到

```
eqq = s^2 + (55.84 * h1 -.5000 + 57.29 * h2) * s - 388.9 * h1 + 6.300 + 55.84 * h2
```

③ 根据系统降维观测器的极点满足特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})|=0$，即

$\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]=(s+3-\mathrm{j}3)(s+3+\mathrm{j}3)=s^2+6s+18$，运行以下语句

```
clear;syms s;
r=expand((s+3-3*j)*(s+3+3*j)),
```

语句运行后得到

```
r=s^2+6*s+18
```

④ 对比以上两式的右端，即可用以下 MATLAB 语句求出 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$：

```
clear;syms h1 h2;
[h1,h2]=solve('55.84*h1-.5+57.29*h2=6','-388.9*h1+6.3+55.84*h2=18','h1,h2');
h11=vpa(h1,4),h21=vpa(h2,4),
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0121\\0.1253\end{bmatrix}$。

⑤ 给出以下调用自编函数 reduest. m 的程序解算系统可观性并设计降维状态观测器。

```
clear;A1=[0 1 0;0 0 1;-0.098 0.006 -0.42];B1=[0;0;1];
C1=[61.74 -4.9 9.8];D1=0;
Q=[1 0 0;0 1 0;61.74 -4.9 9.8];;H=[-0.0121 0.1253].';
[AHAW,BHBU,AHAY]=reduest(A1,B1,C1,D1,Q,H);
```

程序运行后得到降维状态观测器动态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}0.6757 & 1.6932\\-13.2968 & -6.6785\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}0.1186\\-1.2279\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}0.1929\\-0.4586\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}-0.0121\\0.1253\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\end{cases}$$

⑥ 将 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 变换回到$\bar{\boldsymbol{x}}$状态空间，计算 $\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\overleftarrow{x}_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$。

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\0\end{bmatrix}、\boldsymbol{RS}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\1\end{bmatrix}、\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0121\\0.1253\end{bmatrix}\text{用程序计算。}$$

```
clear;Q=[1 0 0;0 1 0;61.74 -4.9 9.8];
n=size(Q,1); E=eye(n-1);R=inv(Q)*[E;0 0],
H=[-0.0121;0.1253];S=inv(Q)*[H;1],
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-6.3 & 0.5\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0121\\0.1253\\0.2409\end{bmatrix}$，那么

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\overleftarrow{x}_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-6.3 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_1\\\boldsymbol{w}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.0121\\0.1253\\0.2409\end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

9）绘制带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与其降维状态观测器的系统模型 sx2L1429c. mdl，如图 14-15 所示，并对其进行仿真。

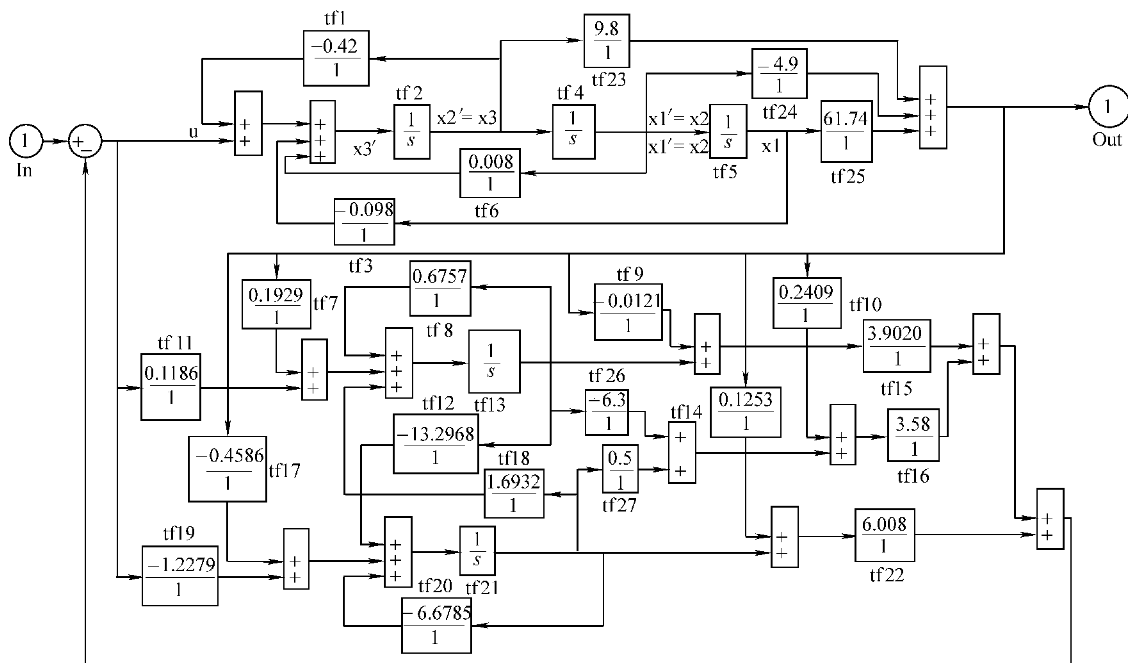


图 14-15　带降维状态观测器与其状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的系统模型 sx2L1429c. mdl

用带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与其降维状态观测器的系统模型 sx2L1429c. mdl 绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1429c');sys=ss(A,B,C,D);
step(sys),grid;[y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到带降维状态观测器与其状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的系统单位阶跃响应曲线与图 14-13 也相差无几。说明系统不仅稳定，而且性能指标优良，$\sigma\% = 1.9287\%$。

本题运算说明：①基于状态空间模型的极点配置不需要附加校正装置，是改变系统性能指标简单可行的重要技术措施。②全维状态观测器与降维状态观测器对系统的响应不起什么作用，其主要功能是观测。③系统模型 sx2L1429a. mdl、sx2L1429b. mdl、sx2L1429c. mdl 三者阶跃响应曲线的特征、形状都与图 14-13 基本相同，响应指标数据也非常接近，都使原发散振荡的不稳定系统变成性能指标优良的稳定系统。④用模型图绘制阶跃响应曲线的程序特别简单方便。

【例 14-30】 已知系统动态方程的矩阵 $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y} = [0 \quad 0 \quad 1]\,\boldsymbol{x}$。对系统设计降维状态观测器，使得系统的闭环极点为 $\lambda_1 = -3$、$\lambda_2 = -4$。

解：1）选择任意矩阵 $\boldsymbol{D}$ 构造非奇异线性变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 12\\ 0 & 1 & 7\end{bmatrix}、\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}\\ \cdots\\ \overline{\boldsymbol{C}}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 12\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2）根据系统参数，设输出反馈矩阵 $\boldsymbol{H}_{(n-q)\times q}=\boldsymbol{H}_{2\times 1}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$，并用以下 MATLAB 程序计算 det $[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]$。

```
clear;syms h1 h2 s;
A1=[0 0 -2;1 0 9;0 1 0];B1=[3;2;1];C1=[0 0 1];
p=[-3 -4];E=[1 0;0 1];H=[h1 h2].';Q=[1 0 12;0 1 7;0 0 1];
Q1=inv(Q);A=Q*A1*Q1;A11=[A(1:2,1:2)];A21=[A(3,1:2)];
eq=collect(det(s*E-(A11-H*A21)),s),
```

程序运行后得到 eq = s^2 + （-7 + h2） * s - 12 + h1，即

$$\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]=s^2+(-7+h_2)s+(h_1-12)$$

根据自动控制原理公式 $\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]=\prod_{k=1}^{n-q}(s+\lambda_{\mathrm{k}})$ 有

$$\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]=(s+3)(s+4)=s^2+7s+12$$

对比上式的两端，即可用以下 MATLAB 语句求出 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$。

```
clear;syms h1 h2;
[h1,h2]=solve('-7+h2=7','h1-12=12','h1,h2'),
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ 14\end{bmatrix}$。

3）给出以下调用自编函数 reduest. m 的程序解算系统的可观性并设计降维状态观测器。

```
clear;A1=[0 0 -2;1 0 9;0 1 0];B1=[3;2;1];C1=[0 0 1];D1=0;
Q=[1 0 12;0 1 7;0 0 1];H=[24;14];
[AHAW,BHBU,AHAY]=reduest(A1,B1,C1,D1,Q,H);
```

程序运行后得到降维状态观测器动态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}0 & -12\\ 1 & -7\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}-9\\ -5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}-86\\ -28\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}24\\ 14\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\end{cases}$$

14.5　Lyapunov 系统稳定性分析的 MATLAB 实现

稳定性是系统在平衡状态下受到扰动后自由运动的性质。线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，式中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常系数矩阵。假定 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，则系统的唯一平衡状态在原点 $x=0$ 处即平衡点。对于线性定常系统，常将平衡点的稳定性视为系统的稳定性。

14.5.1　李雅普诺夫函数与李雅普诺夫函数方程

设线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，取正定二次型标量函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 作为系统的能量函数，就叫做李雅普诺夫函数。式中，$\boldsymbol{P}$ 是一个正定的实对称矩阵。

将 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 对于时间求导可得 $\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x})=\dot{\boldsymbol{x}}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$，将此式改写为 $\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$，那么 $\boldsymbol{Q}=-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$。有些文献把该式叫做李雅普诺夫矩阵代数方程，$\boldsymbol{Q}$ 是一给定的正定实对称矩阵（通常选 $\boldsymbol{Q}$ 为单位矩阵）。

14.5.2　李雅普诺夫稳定性理论

李雅普诺夫第二方法用李雅普诺夫函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 判断系统在原点 $x=0$ 处的平衡状态有以下 4 个定理。

定理 1　设系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)$，其平衡状态为 $f(\boldsymbol{0},t)=\boldsymbol{0}$。如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$，并且满足 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ 是正定的、$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)$ 是负定的，则系统在原点处的平衡状态是一致渐近稳定的。

又当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时，有 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)\to\infty$，则在原点处平衡状态是在大范围内一致渐近稳定的。

定理 2　设系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)$，其平衡状态为 $f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{0}$。如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$，并且满足 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ 是正定的、$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)$ 是半负定的、$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)$ 在 $x\neq0$ 时不恒等于 0，则系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

定理 3　设系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)$，其平衡状态为 $f(\boldsymbol{0},t)=\boldsymbol{0}$。如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$，若 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ 是正定的、$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)$ 是半负定的，则系统在原点处的平衡状态是一致稳定的。

定理 4　设系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)$，其平衡状态为 $f(\boldsymbol{0},t)=\boldsymbol{0}$。如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ 若 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ 是正定的、$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)$ 也是正定的，则系统在原点处的平衡状态是不稳定的。

为方便计算，作者编制了一个计算系统李雅普诺夫函数的函数 lyaeq. m。请看示例。

【例 14-31】　已知线性定常连续系统动态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，试求解李雅普诺夫方程，并判定系统的渐近稳定性。

解：给出以下调用自编函数 lyaeq. m 的 MATLAB 程序求解。

```
clear;A=[-1 2;3 -4];Q=[1 0;0 1];key=1;
[FQ,P,Vx]=lyaeq(key,A,Q);
```

程序运行后得到（1）系统特征根 $\lambda_1=0.3723>0$、$\lambda_2=-5.3723<0$，故系统原点的平衡状态是不稳定的；（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，坐标原点是系统唯一的平衡状态；（3）李雅普诺夫方程的解 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1.15 & -0.55\\ -0.55 & -0.15\end{bmatrix}$；（4）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各主子行列式 det$\boldsymbol{P}$11 $=-1.15<0$ 与 det$\boldsymbol{P}$

$=-0.13<0$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵，故系统在平衡点处不是渐近稳定的；（5）李雅普诺夫函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\left(-\frac{23}{20}\boldsymbol{x}_1^2-\frac{11}{10}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2-\frac{3}{20}\boldsymbol{x}_2^2\right)$；（6）$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2)$。

【例 14-32】 已知线性定常离散系统动态方程为 $\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$，试求解李雅普诺夫方程，并判定系统的渐近稳定性。

解：给出以下调用自编函数 lyaeq. m 的 MATLAB 程序求解。

```
clear;A=[1 4 0;-3 -2 -3;2 0 0];
Q=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];key=2;
[FQ,P,Vx]=lyaeq(key,A,Q);
```

程序运行后得到（1）系统特征根 $\lambda_{1,2}=0.5\pm \mathrm{j}3.4278$、$\lambda_3=-2$ 均在单位圆外，故系统原点的平衡状态是不稳定的；（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，坐标原点是系统唯一的平衡状态；（3）李雅普诺夫方程的解 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-0.0985 & -0.0683 & -0.0570\\ -0.0683 & -0.1725 & -0.2151\\ -0.0570 & -0.2151 & -0.5526\end{bmatrix}$；（4）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各主子行列式 $\det\boldsymbol{P}11=-0.0985<0$ 与 $\det\boldsymbol{P}=-0.0034<0$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵，故系统在平衡点处不是渐近稳定的；（5）$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\boldsymbol{x}_3^2)$；（6）李雅普诺夫函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\left(-\frac{13}{132}\boldsymbol{x}_1^2-\frac{230}{1683}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2-\frac{64}{561}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3-\frac{871}{5049}\boldsymbol{x}_2^2-\frac{724}{1683}\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3-\frac{310}{561}\boldsymbol{x}_3^2\right)$。

习　题

【14-1】 求图 14-16 所示网络的状态空间表达式，系统输入为 $u_r(t)$，输出 $u_0(t)$。

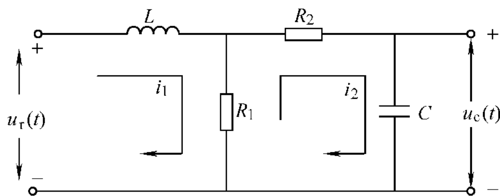


图 14-16　网络电路

【14-2】 求以下系统的状态空间表达式。（1）已知连续系统传递函数 $G(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$；（2）已知系统模型如图 14-17a 所示；（3）已知系统模型如图 14-17b 所示。

【14-3】 已知系统微分方程为 $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=u$，求系统的状态空间表达式。

【14-4】 已知控制系统状态矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$，用自编函数求控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

【14-5】 已知控制系统状态矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$，试求：（1）控制系统的特征矩阵；（2）特征矩阵

a)　　b)

图 14-17　sx2X1402a. mdl 和 sx2X1402b. mdl

的行列式；(3) 特征矩阵的逆；(4) 用自编函数求控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

【14-6】 已知系统动态方程参数矩阵为 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=0$；(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=0$，试求系统传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$。

【14-7】 已知系统矩阵 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}$；(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}$，求控制系统特征方程、特征值及特征向量。

【14-8】 已知系统状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，试求初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$时，系统在单位阶跃输入信号 $\boldsymbol{u}(t)=1(t)$作用下方程的解。

【14-9】 已知系统的动态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$，试求系统采用零阶保持器的离散化状态方程与离散化输出方程，设采样周期 $T=1\mathrm{s}$。

【14-10】 已知系统状态空间表达式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -2\\1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[0\quad 3]\boldsymbol{x}$,欲对系统进行坐标变换,其变换关系为 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$,试求系统线性变换后的系统动态方程,并验证系统状态矩阵特征值的不变性。

【14-11】 对【14-10】$\bar{\boldsymbol{x}}$ 坐标系里系统进行坐标反变换（从 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 坐标系变换到 $\boldsymbol{x}$ 坐标系）。

【14-12】 已知系统动态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$，试将系统变换为对角标准型。

【14-13】 已知控制系统动态方程为 (1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\8 & -12 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}5\\1\\5\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 1\quad 0]\boldsymbol{x}$；(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & -5 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$，试将状态表达式化为约当标准型。

【14-14】 在离散系统方程 $\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{cases}$ 中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3.195\\0 & 7.389\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1.097\\3.195\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{C}=[1\quad 0]$；$\boldsymbol{D}=0$，试判定离散系统的可控性。

【14-15】 试确定以下系统的可控性。已知动态方程（1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\end{bmatrix}u$、（2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&1&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\2&0\end{bmatrix}u$。

【14-16】 试将以下系统状态方程化为可控标准型并确定原系统与变换后系统是否可控。已知系统状态方程为$\dot{\bar{x}}=\bar{A}x+\bar{B}u$，式中$\bar{A}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$，$\bar{B}=\begin{bmatrix}1/8\\-5/8\\-1/8\end{bmatrix}$。

【14-17】 试计算以下系统输出可控性矩阵 T 并确定系统状态可控性与输出可控性。已知系统动态方程三个矩阵为$A=\begin{bmatrix}-3&1&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\2&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$。

【14-18】 有离散系统方程：$\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)\\y(k)=Cx(k)+Du(k)\end{cases}$，已知方程式中，$A=\begin{bmatrix}1&3.195\\0&7.389\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1.097\\3.195\end{bmatrix}$、$C=[1\quad 0]$、$D=0$，采样周期 $T=1\text{s}$，试确定离散系统的可控性和可观性。

【14-19】 已知系统动态方程三个矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$。试判别系统的可控性及可观性。

【14-20】 已知控制系统的动态方程为（1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$、$y=[1\quad -1\quad -2]x$；（2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$、$y=[-1\quad -0.5]x$，试判断系统的可观性并将系统的动态方程化为可观标准型，再求其变换矩阵。

【14-21】 已知系统的传递函数为$G(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=1+\dfrac{2s+5}{s^3+4s+3}$，试求系统可控性及可观性的动态方程实现。

【14-22】 试判别以下系统的可控性并设计状态反馈增益矩阵 K。已知系统的动态方程为（1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&11&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}u$、$y=[1\quad 0\quad 0\quad 0]x$，要求闭环极点 $\lambda_1=-1$、$\lambda_2=-2$、$\lambda_{3,4}=-1\pm\mathrm{j}$；

(2) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-0.4&0&-0.01\\1&0&0\\-1.4&9.8&-0.02\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}6.3\\0\\9.8\end{bmatrix}u$、$y=[0\quad 0\quad 1]x$，要求闭环极点 $\lambda_1=-2$、$\lambda_{2,3}=-1\pm\mathrm{j}$；

(3) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\0&-1&10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}u$，要求闭环极点 $\lambda_1=-10$、$\lambda_{2,3}=-1\pm\mathrm{j}\sqrt{3}$。

【14-23】 已知一系统动态方程 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-6&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$、$y=[1\quad 0\quad 0]x$，（1）设计全维状态观测器，

使极点落在 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-3$，试计算观测器输出反馈增益矩阵 $\boldsymbol{H}$；（2）利用状态观测器进行状态反馈，使系统极点配置在 $\lambda_1=-6$、$\lambda_{2,3}=-3\pm \mathrm{j}3$，试计算其状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$；（3）绘制带状态观测器与其状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的系统模型图并仿真。

【14-24】 已知一系统动态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 1\quad 1]\boldsymbol{x}$，（1）试判别系统可控性并求状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，要求系统闭环极点为 $\lambda_1=-3$、$\lambda_2=-4$、$\lambda_3=-5$；（2）试判别系统可观性并设计全维状态观测器，使闭环系统极点配置不变；（3）设计降维状态观测器，使得系统闭环极点为 $\lambda_1=-5$、$\lambda_2=-5$。

【14-25】 试判别以下系统可观性并设计降维状态观测器，要求系统闭环极点为 $\lambda=-3$。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}、\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

【14-26】 已知线性定常连续系统动态方程为 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，试求解李雅普诺夫方程，并判定系统的渐近稳定性。

【14-27】 已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，试确定系统的平衡状态并计算系统的李雅普诺夫函数。

第 15 章　线性二次型最优控制的 MATLAB 实现

若线性系统性能指标为二次型函数，这样实现的控制叫做线性二次型最优控制。线性二次型最优控制的对象是以状态空间表达式给出的线性系统，而性能指标（或叫目标函数）是对象的状态与控制输入的二次型函数。二次型问题就是在线性系统的约束条件下，选择控制输入使得二次型目标函数达到最小。

线性二次型(Linear Quadratic)最优控制又叫做 LQ 最优控制或者称为无限长时间定常系统的状态调节器控制。到目前为止，LQ 最优控制不仅控制理论比较成熟，而且 MATLAB 系统为之开发的函数也较多，所以这种控制应用非常广泛。

15.1　连续系统线性二次型最优控制的 MATLAB 实现

MATLAB 系统为求解系统线性二次型状态调节器开发的函数非常实用。函数 lqr. m 与 lqry. m 的调用格式为

[K,S,E] = lqr(A,B,Q,R,N)或**[K,S,E] = lqr(sys,Q,R,N)**

[K,S] = lqr2(A,B,Q,R,N)

[K,S,E] = lqry(sys,Q,R,N)

其中，输入参数 sys 为系统的模型；**A** 为系统的状态矩阵；**B** 为系统的输入矩阵；**Q** 为给定的半正定实对称矩阵；**R** 为给定的正定实对称矩阵；**N** 代表更一般化性能指标中交叉乘积项的加权矩阵。输出参数 **K** 为最优反馈增益矩阵；**S** 为对应 Riccati 方程的唯一正定解 $\boldsymbol{P}$（若矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 是稳定矩阵，则总有 $\boldsymbol{P}$ 的正定解存在）；**E** 为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 的特征值。

函数 lqry( )用来求解二次型状态调节器的特例，是用输出反馈替代状态反馈，这种二次型输出反馈控制叫做次优(或准最优)控制。

作者编制了求解连续系统线性二次型 LQ 状态调节器最优控制的函数 lqopti. m 以方便计算。其源程序与用法参见附录。有关函数存储与运行方式，请参见参考文献[1]。请看示例。

【例 15-1】　已知系统动态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[1\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$，系统结构如图 15-1 所示。

系统性能指标 $\boldsymbol{J}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$，式中 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1000&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}=[1]$。试计算最优状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}=[k_1\quad k_2\quad k_3]$使 $\boldsymbol{J}$ 最小，并对其闭环系统进行单位阶跃响应仿真。

解：1）列写状态反馈及其关系式。由结构图 15-1 有

$$\boldsymbol{u}=k_1(r-x_1)-(k_2x_2+k_3x_3)=k_1r-(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)=k_1r-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

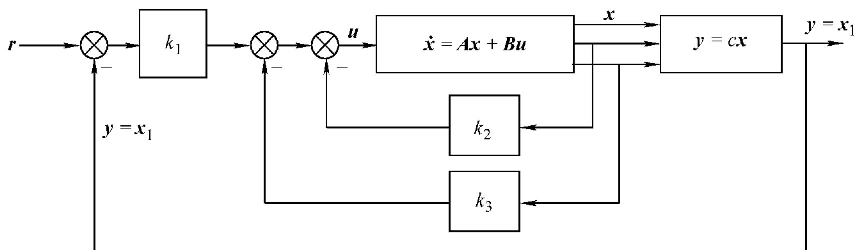


图 15-1　系统结构图

式中，状态反馈增益矩阵 $K=[k_1\quad k_2\quad k_3]$。系统的状态方程为

$$\dot{x}=Ax+Bu=Ax+B(k_1\mathrm{r}-Kx)=(A-BK)x+Bk_1\mathrm{r}$$

2）用以下 MATLAB 程序对原系统进行阶跃给定输入仿真：

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];B=[0;0;1];
C=[1 0 0];D=[0];s=ss(A,B,C,D);step(s),grid;
```

程序执行后得到原系统给定输入阶跃响应仿真曲线如图 15-2 所示。由曲线可以看到，原系统虽然稳定，但上升速度太慢，到稳态输出值的时间要超过 6s。

3）根据题意，调用 MATLAB 系统函数 lqr( ) 函数与自编函数 lqopti. m 的程序来解算。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];B=[0;0;1];C=[1 0 0];D=[0];
Q=[1000 0 0;0 1 0;0 0 1];R=[1];N=0;x0=[0;0;0];key=1;
[K,P,E]=lqopti(key,A,B,C,D,Q,R,N,x0);
```

运行程序后求出状态反馈矩阵 $K=[k_1\quad k_2\quad k_3]=[26.1870\quad 12.6189\quad 1.8891]$，运行程序后还绘制有状态反馈后的闭环系统单位阶跃给定响应曲线，如图 15-3 所示。

由图 15-3 可见，经状态最优反馈后系统单位阶跃响应略微超调后立即单调衰减，上升速度快，到稳态输出值只要 1.5s。系统性能指标很理想，确实反映了最优控制的效果。

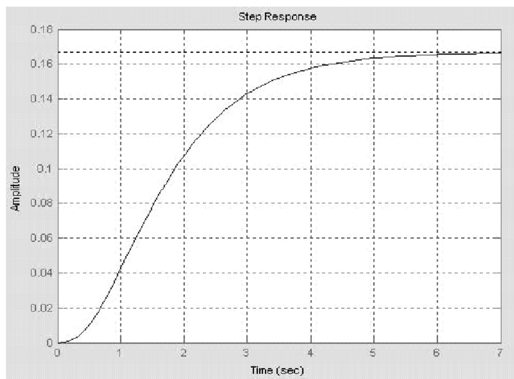


图 15-2　原系统输入阶跃响应曲线

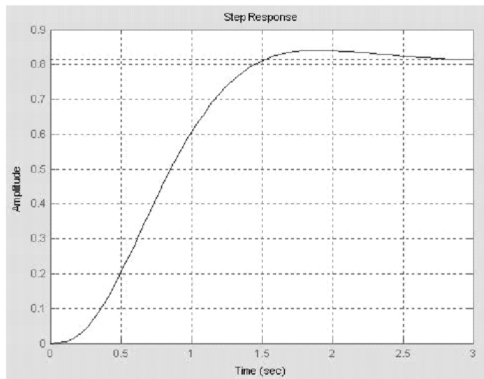


图 15-3　采用状态反馈系统单位阶跃响应曲线

【例 15-2】　续上题，$Q=[1000]$，要求采用输出反馈 $u(t)=-Ky(t)$，试计算最优输出反馈矩阵 $K=[k_1\quad k_2\quad k_3]$使 J 最小，并对其闭环系统进行单位阶跃给定响应的仿真。

解：给出调用 MATLAB 系统函数 lqr( ) 函数与自编函数 lqopti. m 的程序来解算。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];B=[0;0;1];
```

```
C = [1 0 0];D = [0];Q = [1000];;R = [1];N = 0;x0 = [0;0;0];key = 2;
[K,P,E] = lqopti(key,A,B,C,D,Q,R,N,x0);
```

程序运行后求出输出反馈矩阵 $\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [26.1870 \quad 12.4878 \quad 1.8087]$，程序运行后还绘制有输出反馈后的闭环系统单位阶跃给定响应曲线，如图 15-4 所示。

对比图 15-3 与图 15-4 可见，①经输出反馈后的系统阶跃响应曲线与经状态反馈的曲线形状相差无几。②特别提请读者关注图 15-3 与图 15-4 阶跃响应曲线纵坐标的比例尺完全不同，图 15-4 的要小很多，这是因为输出反馈的原因。③输出反馈后的上升速度还要快，到稳态输出值只要 1.2s。

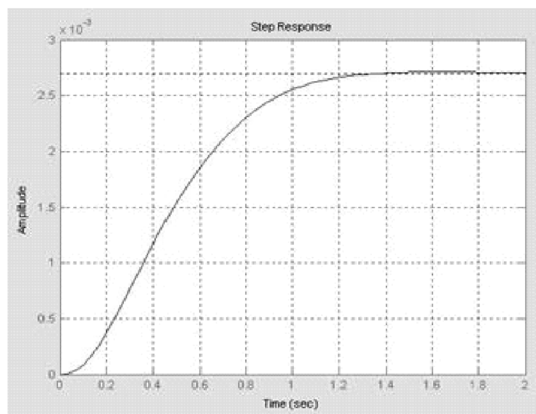


图 15-4　输出反馈后系统单位阶跃响应曲线

【例 15-3】　已知可控直流电源供电给直流电机的系统结构图如图 15-5 所示。若对系统进行最优状态反馈与输出反馈控制，试分别计算状态反馈增益矩阵与输出反馈增益矩阵，并对其闭环系统进行阶跃响应仿真。

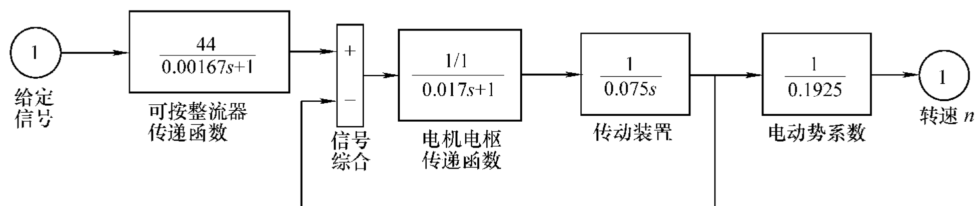


图 15-5　可控直流电源供电给直流电机系统结构图模型 sx2L1503.mdl

状态反馈时 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{R} = [1]$；输出反馈时 $\boldsymbol{Q} = [100000]$、$\boldsymbol{R} = [1]$。

解： 也给出调用 MATLAB 系统函数 lqr( ) 函数与自编函数 lqopti.m 的程序来解算。

1）绘制原系统的阶跃响应仿真曲线。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L1503');
sys = ss(A,B,C,D);step(sys),grid;
```

程序运行后得到原系统阶跃响应如图 15-6 所示。

2）状态反馈计算。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1503');
Q=[1000 0 0;0 1 0;0 0 1];R=[1];N=0;x0=[0;0;0];
key=1;[K,P,E]=lqopti(key,A,B,C,D,Q,R,N,x0);
```

程序运行后得到状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}=[31.1506\quad 337.0313\quad 9.8154]$，还绘制有状态反馈后闭环系统单位阶跃响应曲线，如图 15-7 所示。与原系统的阶跃响应相比，曲线上升到终了值的时间从 0.3s 缩短到 0.015s，可见快速性能得到极大改善，但纵坐标的高度降低了，这是因为有负反馈存在的原因。

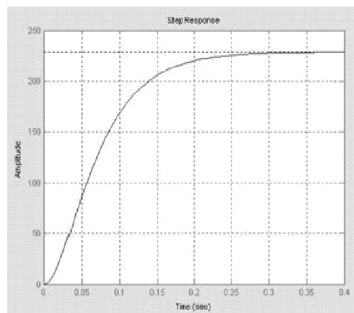


图 15-6　原系统阶跃响应曲线

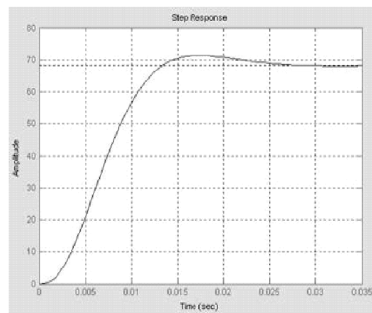


图 15-7　状态反馈系统阶跃响应曲线

3）输出反馈计算。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1503');
Q=[100000];R=[1];N=0;x0=[0;0;0];
key=2;[K,P,E]=lqopti(key,A,B,C,D,Q,R,N,x0);
```

程序运行后得到输出反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}=[21900\quad 5855\quad 784]$，还绘制有状态反馈后闭环系统单位阶跃给定响应曲线，如图 15-8 所示。

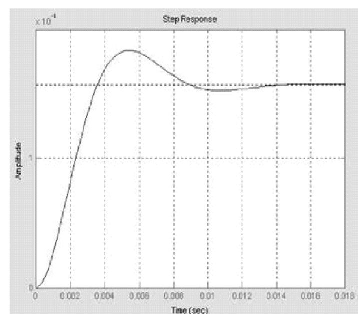


图 15-8　输出反馈系统阶跃响应曲线

对比两种反馈的阶跃响应，可以看出两曲线基本类似，但也有差别。输出反馈的超调量稍大，且有一次振荡，但峰值时间短(约 0.005s)。采用状态反馈的超调量较小，峰值时间长些，并且超调后单调衰减。两图纵坐标的比例尺也不同，输出反馈的要小很多。

15.2　离散系统线性二次型最优控制的 MATLAB 实现

对象为离散系统的是离散系统线性二次型最优控制。在这里，需要复习《控制系统 MATLAB 计算及仿真》中相应的关系式，并要复习 MATLAB 求解离散系统线性二次型状态调节器的函数。其函数有 dlqr( )与 dlqry( )。函数的调用格式为

[K,S,E]=dlqr(A,B,Q,R,N)

[K,S,E]=dlqry(A,B,C,D,Q,R,N)

其中，输入参数 **A** 为系统的状态矩阵；**B** 为系统的输入矩阵；**Q** 为给定的正定或半正定实

对称矩阵；**R** 为给定的正定实对称矩阵；**N** 代表更一般化性能指标中交叉乘积项的加权矩阵。输出参数 **K** 为离散最优反馈增益矩阵；**S** 为对应 Riccati 方程的唯一正定解 $\boldsymbol{P}$；$\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 的特征值。

函数 dlqry( )用来求解二次型状态调节器的特例，即用输出反馈替代状态反馈。

【例 15-4】 续【例 15-3】，已知如图 15-5 所示可控直流电源供电给直流电机的系统。试对系统设计数字最优控制系统（即计算状态反馈增益矩阵）并求闭环离散系统的阶跃响应。状态反馈时 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1000 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{R}=[1]$。

解： 需要认真复习连续系统离散化的函数命令与状态反馈的公式。

```
clear;[a1,b1,c1,d1] = linmod2('sx2L1503');
Q = diag([10 1 10 1]);R = [1];
[a,b] = c2d(a1,b1,0.1);c = c1;d = d1;
A = [a zeros(3,1); -c * a 1];
B = [b; -c * b];Kx = dlqr(A,B,Q,R)
k1 = -Kx(2);k2 = Kx(1);axc = A - B * Kx;
bxc = [0;0;0;1];cxc = [0 1 0 0];dxc = [0];
dstep(axc,bxc,cxc,dxc,1,10),grid;
```

程序运行后得到数字最优控制系统的状态反馈增益矩阵

$\boldsymbol{K}=[0.1036\ 6.5696\ 0.1451\ \ -0.0059]$

程序运行后还绘制闭环离散系统阶跃响应曲线，如图 15-9 所示。

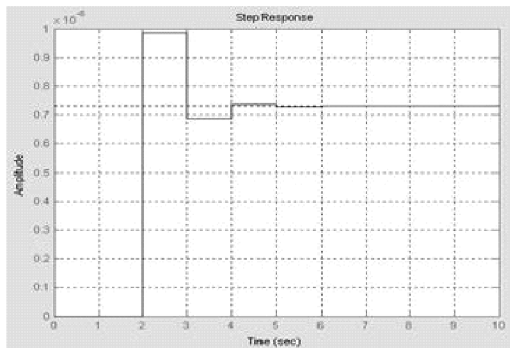


图 15-9　闭环离散系统的阶跃响应曲线

15.3　最优观测器(Kalman 滤波)的 MATLAB 实现

对于连续时不变系统，其状态方程与量测方程分别为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)+\boldsymbol{Gw}(t) \tag{15-1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Cx}(t)+\boldsymbol{Du}(t)+\boldsymbol{Hw}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{15-2}$$

系统的 Kalman 滤波器就是最优观测器。利用 Kalman 滤波器对系统进行最优控制是非常有效的。MATLAB 系统特别开发有求解 Kalman 滤波器的函数 kalman( )。函数调用格式为

[Kest,L,P] = kalman(sys,Q,R,N)

其中，输入参数 *sys* 为连续或离散系统带扰动的状态空间模型（$\mathbf{A}$，$\tilde{\mathbf{B}}$，$\mathbf{C}$，$\tilde{\mathbf{D}}$），当模型有两个输入时，$\tilde{\mathbf{B}}=[\mathbf{B}\quad \mathbf{G}]$，$\tilde{\mathbf{D}}=[\mathbf{D}\quad \mathbf{H}]$；**Q** 为模型噪声的协方差矩阵；**R** 为量测噪声的协方差矩阵；**N** 为可选项，它对应模型噪声与量测噪声的相关项。输出参数 Kest 为 Kalman 滤波器的状态估计器，其动态方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{LD})\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{Ly}(t) \tag{15-3}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{y}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \tag{15-4}$$

式中，$\boldsymbol{L}$ 为 Kalman 滤波器的增益矩阵；$\boldsymbol{P}$ 为对应的 Riccati 方程的解，即估计误差的协方差。

MATLAB 还提供过两个配合使用的函数 lqe( ) 与 estim( ) 来求解系统的 Kalman 滤波器。函数 lqe( ) 的调用格式为

[L,P,E] = lqe(A,G,C,Q,R,N)

其中，输入参数 **A**、**G**、**C** 为式(15-1)与式(15-2)中的对应参量；**Q** 为模型噪声的协方差矩阵；**R** 为量测噪声的协方差矩阵；**N** 为可选项，它对应模型噪声与量测噪声的相关项。输出参数 **L** 为 Kalman 滤波器的增益矩阵；**P** 为对应的 Riccati 方程的解，即估计误差的协方差；**E** 为估计器的闭环特征值。函数 estim( ) 的调用格式为

est = estim(sys,L)

这个函数用来生成连续系统的 Kalman 滤波器，即系统的状态估计器 est。输入参数 sys 为连续系统带扰动的状态空间模型，输入参数 **L** 为函数 lqe( ) 求出的 Kalman 滤波器的增益矩阵。

对于连续系统，用函数 kalman( ) 计算的 Kalman 滤波器的状态估计器 Kest 与用函数 estim( ) 求出的 Kalman 滤波器 est，两者应相等。

【例 15-5】　已知单位负反馈连续系统受控对象与串联校正装置的传递函数为

$$\boldsymbol{G}_0(s)\boldsymbol{G}_c(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \cdot \frac{(0.2143s+0.134)}{(s+0.134)}$$

设模型噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{Q}=1$、量测噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{R}=0.01$，试求系统 Kalman 滤波器增益矩阵 $\boldsymbol{L}$、系统估计误差协方差 $\boldsymbol{P}$ 以及系统的 Kalman(最优)滤波器。

解：给出调用系统函数 kalman. m 与 estim. m 的 MATLAB 程序求解。

```
clear;n1 = [0 0 2500];d1 = [1 25 0];sys1 = tf(n1,d1);G1 = ss(sys1);
n2 = [0.2143 0.134];d2 = [1 0.134];sys2 = tf(n2,d2);G2 = ss(sys2);
G3 = G1 * G2;G = feedback(G3,1);q = 1;r = 0.01;
[Kest,L,P] = kalman(G,q,r),est = estim(G,L),
```

程序运行后得到系统 Kalman 滤波器的增益矩阵 $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 76.0383 \\ 1.9731 \\ 2.2563 \end{bmatrix}$、系统估计误差的协方差 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2.2420 & 0.0195 & 0.0495 \\ 0.0195 & 0.0005 & 0.0006 \\ 0.0495 & 0.0006 & 0.0012 \end{bmatrix}$，计算表明，用函数 kalman. m 计算的 Kalman 滤波器的状态估计器 *Kest* 与用函数 estim. m 求出的 Kalman 滤波器 *est* 是相等的。

【例 15-6】　续【例 15-3】，已知可控直流电源供电给直流电机的系统结构图如图 15-5 所示。试对系统进行 Kalman 滤波器的设计并对经 Kalman 滤波后的系统闭环进行阶跃响应仿真。

解：给出调用自编函数 lqkalm. m 的程序进行 Kalman 滤波器的设计。

```
clear;[A,B,C,D,] = linmod2('sx2L1503');
R = 1;Q0 = 1e - 4;R0 = 1e - 5;;t = 0:0.001:0.3;
```

```
[L,P,kalmsys] = lqkalm(A,B,C,D,R,Q0,R0,t);
```

程序运行后，可得到 Kalman 滤波器的增益矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与估计误差的协方差 $\boldsymbol{P}$ 分别为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}12.9445\\0.6217\\98.6498\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1.9e-6 & 1.0e-7 & 1.42e-5\\1.0e-7 & 1.0e-7 & 2.3e-6\\1.42e-5 & 2.3e-6 & 1.915e-4\end{bmatrix}$$

程序运行后还得到经 Kalman 滤波后系统闭环单位阶跃响应仿真曲线，如图 15-10 所示。

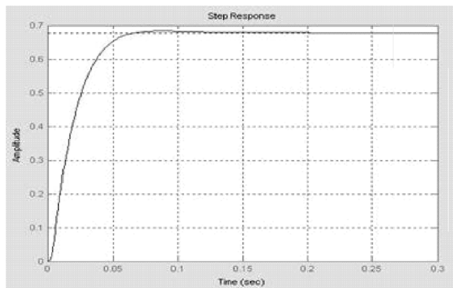


图 15-10　经 Kalman 滤波后的单位阶跃响应曲线

由图 15-10 可见，经 Kalman 滤波后，系统闭环单位阶跃给定响应是非常理想的，仿真曲线为几乎立即响应的阶跃方波，只稍微有一点点超调，尔后曲线趋于水平。

15.4　线性二次型 Gauss 最优控制器的 MATLAB 实现

考虑系统随机输入噪声与随机量测噪声的线性二次型最优控制叫做线性二次型高斯(Gauss)最优控制，即 LQG 控制。必须注意，线性二次型高斯最优控制是输出反馈控制，即设计的 LQG 控制器对原系统是反馈控制器。

在 MATLAB 工具箱里，有特别提供的函数 reg( )求解 LQG 最优控制。函数调用格式为

rsys = reg(sys,K,L)

其中，输入参数 sys 为系统状态空间模型；**K** 为由函数 lqr( )求得的最优状态反馈增益矩阵；**L** 为函数 lqe( )求得的 Kalman 滤波器状态估计增益矩阵。输出参数 rsys 为系统 LQG 控制器的状态空间模型。

为方便计算，作者编制了求解连续系统线性二次型 LQG 最优控制器的函数 lqgreg. m。

【例 15-7】　已知系统的状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{y}=[0.5\quad 1.25]\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}$，二次型调节器性能指标为 $\boldsymbol{J}=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$，式中 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}=1$。输入噪声与量测噪声的有关参数分别为 $\boldsymbol{Q}_0=1$，$\boldsymbol{R}_0=1$。要求：1）对原系统进行阶跃给定输入的仿真；2）试设计 LQG 控制器，并对 LQG 最优控制系统进行阶跃给定输入的仿真。

解：1）用以下 MATLAB 程序对原系统进行阶跃给定输入的仿真：

```
clear;A = [2 -2;2 0];B = [2;0];C = [0.5 1.25];
D = [0];s = ss(A,B,C,D);step(s),grid;
```

程序执行后得到原系统的给定输入阶跃响应仿真曲线，如图 15-11 所示。由曲线可以看到，原系统的阶跃响应为发散的振荡，即系统是不稳定的。

2）给出以下调用自编函数 lqgreg. m 的 MATLAB 程序解算 LQG 控制器。

```
clear;A=[2 -2;2 0];B=[2;0];C=[0.5 1.25];D=[0];
R=1;Q0=1;R0=1;t=0:0.01:8;
[lqgsys]=lqgreg(A,B,C,D,R,Q0,R0,t);
```

程序执行后得到 LQG 控制器：

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}-5.029 & -6.993\\ 0.9126 & -2.718\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3.331\\ 2.175\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}=[2.682\quad 0.4142],\ \boldsymbol{d}=0$$

程序执行后还绘制出 LQG 最优控制的系统单位阶跃响应曲线，如图 15-12 所示。

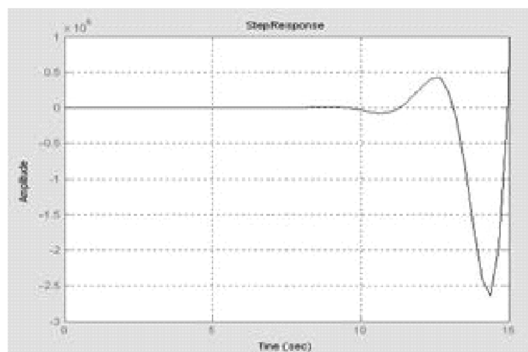


图 15-11　原系统单位阶跃响应曲线

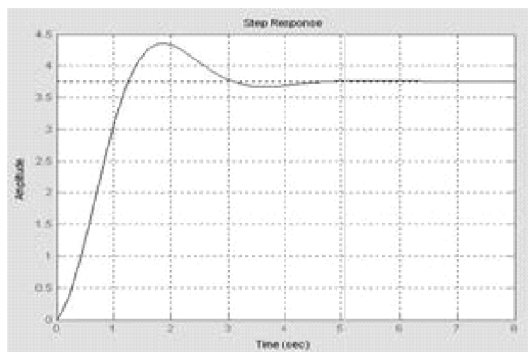


图 15-12　LQG 最优控制阶跃响应曲线

由 LQG 最优控制的阶跃响应仿真曲线可以看到，不但系统变稳定了，而且阶跃响应仅稍有超调与微弱振荡，曲线是很理想的。这比不稳定的原系统确是最优控制的效果。

【例 15-8】　试对可控直流电源供电给直流电机系统结构模型 sx2L1503.mdl 即图 15-5 进行 LQG 最优控制。

解：给出以下调用自编函数 lqgreg.m 的 MATLAB 程序解算 LQG 控制器。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L1503');R=1;Q0=1;R0=1;
t=0:0.01:1;[lqgsys]=lqgreg(A,B,C,D,R,Q0,R0,t);
```

程序执行后得到 LQG 控制器：$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}-63.6 & 0 & 58.82\\ -0.7238 & -634.6 & -0.8367\\ -6.936 & 26350 & -58.82\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0.9182\\ 0\\ -0.09236\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{c}=[0.7238\quad 35.75\ 0.8367]$，$\boldsymbol{d}=0$

程序执行后还绘制出 LQG 最优控制的系统单位阶跃响应曲线，如图 15-13 所示。由图 15-13可见，LQG 最优控制的系统与经 Kalman 滤波的系统，两者闭环后其单位阶跃给定响应基本一致，仿真曲线为几乎是立即响应的阶跃方波，确实非常理想。再仔细比较两者，似乎 LQG 最优控制比 Kalman 滤波的效果还要好。

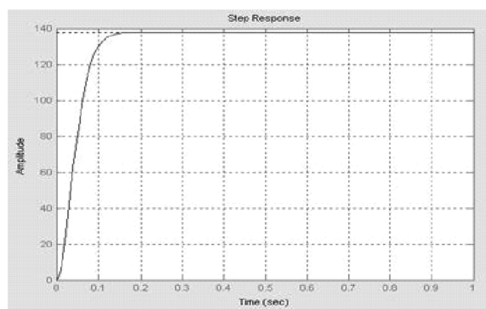


图 15-13　LQG 最优控制系统阶跃响应曲线

习　题

【15-1】 已知系统状态方程与初始条件为$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}$，$\begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=0\end{cases}$与 $y(t)=x_1(t)$，性能指标 $J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[y^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$。试构造输出调节器使之实现次最优控制，并求其次最优控制 $u^*(t)$ 与次最优性能指标 J^*。

【15-2】 已知铣床光电跟踪旋转系统模型如图 15-14 所示。若对系统进行最优状态反馈与输出反馈控制，试分别计算状态反馈增益矩阵与输出反馈增益矩阵，并对其系统进行阶跃响应仿真。状态反馈时 $Q=\begin{bmatrix}1000 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$、$R=[1]$；输出反馈时 $Q=[2000]$、$R=[0.001]$。

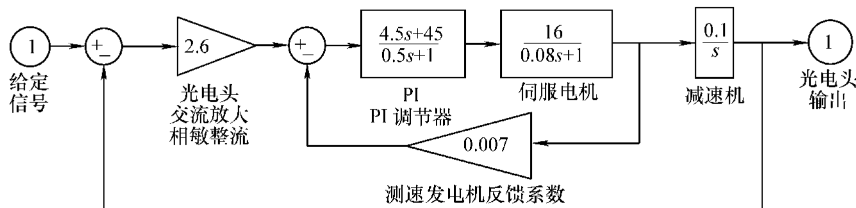


图 15-14　铣床光电跟踪旋转系统模型 sx2X1502. mdl

【15-3】 已知离散系统状态方程与初始条件分别为 $x(k+1)=0.3679x(k)+0.6321u(k)$、$x(0)=1$，试确定最优性能指标 J^*、最优控制作用 $u^*(k)$与最优轨线 $x^*(k)$，使得以下性能指标为最小：$J=\frac{1}{2}[x(10)]^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}[x^2(k)+u^2(k)]$。

【15-4】 已知铣床光电跟踪旋转系统模型 sx2X1502. mdl 如图 15-14 所示。试对系统按 $T=0.1$s 设计数字最优控制系统（即计算反馈增益矩阵）并求闭环离散系统单位阶跃响应。

【15-5】 已知单位负反馈连续系统的受控对象与校正装置的传递函数为

$$G_0(s)G_c(s)=\frac{49.1667}{s(s+2)}\cdot\frac{(s+3.8745)}{(s+9.2915)}$$

设模型噪声协方差矩阵 $Q=1$、量测噪声协方差矩阵 $R=0.01$，试求系统 Kalman 滤波器增益矩阵 L、系统估计误差协方差 P 以及系统的 Kalman(最优)滤波器。

【15-6】 已知晶闸管—直流电机单闭环调速系统(V－M 系统)的 Simulink 动态结构图如图 15-15 所示。试调用自编函数 lqgreg. m 对系统进行 LQG 最优控制并仿真。

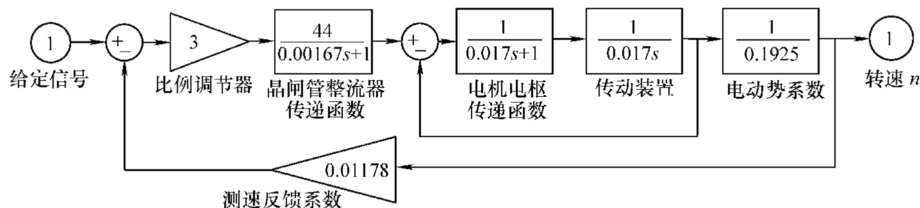


图 15-15　动态结构图模型 sx2X1506. mdl

第 2 部分　控制系统 MATLAB 计算及仿真的实验实训

在高等工科院校电气信息类各专业的“自动控制原理”与“自动控制系统”课程学习中，想必已经做过一些有关的常规课程实验。与此不同，本部分 4 章的内容是 MATLAB 仿真实验，只需要计算机、相关的软件及其 MATLAB 系统即可。

需要指出的是，进行控制系统仿真的实验实训的目的是学习并掌握《控制系统 MATLAB 计算及仿真》的各个知识点，其实验内容主要是本书的各章例题 MATLAB 解算过程，让读者进一步深入掌握全书内容。有兴趣的读者还可对本书习题与《控制系统 MATLAB 计算及仿真》例题的 MATLAB 解算过程自行训练。

这里介绍 MATLAB 仿真基础实验实训、自动控制原理 MATLAB 实验实训、连续控制系统校正设计的 MATLAB 实验实训、生产过程控制系统 MATLAB 仿真实验实训共 4 章。使用者也可根据实际情况，灵活选择、组合与搭配内容。一般地说，一个实验需用两学时，但各章实验所需的时间，可依据实验内容的多少与难易程度、学校的具体情况而定。

实验做完后需撰写实验报告。这里仅列出每个实验的目的、实验知识准备与实验内容等。使用者可适当添加其他项目，例如，实验步骤、实验结果、实验收获与体会等。若自学控制系统 MATLAB 仿真时，这些上机进行的实验实践训练也是应掌握的内容。

第 16 章　MATLAB 仿真基础实验实训

本书没有再重述 MATLAB 7.5 系统内容，作为仿真实验实训的基础部分，必须上机进行训练。有关 MATLAB 7.5 系统请参见参考文献[1]。

【实验实训 16-1】　MATLAB 7.5 系统的安装、启动与卸载

1. 实验目的

学习并掌握 MATLAB 7.5 系统软件安装与卸载的全过程，以及将 MATLAB 7.5 与 Word 连接 Notebook 的安装方法。

2. 实验知识准备

复习 MATLAB 7.5 安装、Notebook 安装、MATLAB 7.5 启动、Notebook 启动等内容。

3. 实验内容

1） 训练 MATLAB 7.5 的安装（要特别关注安装的路径与目录选择、要安装组件的勾选）全过程。

2） 训练 Notebook 的安装过程。

3） 训练 MATLAB 7.5 的卸载方法。

4）训练 MATLAB 7.5 的 3 种启动方法。

5）训练 Notebook 的启动过程。

【实验实训 16-2】 MATLAB 7.5 系统界面、菜单认识与内容查找

1. 实验目的

了解与熟悉 MATLAB 7.5 系统界面、菜单、工具栏按钮，并掌握对 MATLAB 7.5 内容进行查找的方法。

2. 实验知识准备

复习 MATLAB 7.5 系统界面、MATLAB 7.5 菜单项命令、MATLAB 7.5 工具栏按钮、MATLAB7.5 系统的命令窗口(Command Window)、MATLAB7.5 内容查找等。

3. 实验内容

1）训练进入与退出 MATLAB 7.5 系统的操作。

2）训练使用 MATLAB 7.5 菜单命令的操作。

3）训练使用 MATLAB 7.5 工具栏按钮的操作。

4）训练采用菜单法查找 MATLAB 7.5 系统内容的操作。

【实验实训 16-3】 Simulink 7.0 系统界面与菜单认识

1. 实验目的

了解与熟悉 Simulink 7.0 系统界面、菜单、工具栏按钮，并掌握对 Simulink 7.0 内容进行查找的方法。

2. 实验知识准备

复习进入 MATLAB 7.5 的 Simulink 7.0、Simulink 7.0 功能模块组的打开与关闭、Simulink 7.0 功能模块的分类及其用途。

3. 实验内容

1）训练进入与退出 Simulink 7.0 系统的操作。

2）训练使用 Simulink 7.0 功能模块组打开与关闭的操作。

3）训练采用菜单法查找 Simulink 7.0 功能模块的分类及其用途的操作。

4）查找经常使用的 15 个模块，从 Simulink 模块库中复制到模型 cymk.mdl 中。

【实验实训 16-4】 典型模块的参数设置

1. 实验目的

熟悉并掌握 Simulink 7.0 模块库中几个典型模块参数设置的方法与步骤。

2. 实验知识准备

复习 Simulink 7.0 功能模块的分类及其用途；采用菜单法查找模块；模块的复制、移动与删除；模块内部参数的设置与修改。

3. 实验内容

1）训练将输入(端口)模块、综合比较(计算代数和)模块、(线性)传递函数模块、增益模块、输出(端口)模块从模块库中复制到模型窗口中。

2）训练对模块选中、模块复制、模块移动、模块删除和粘贴、改变模块对象的方向、

改变模块对象图标大小的操作。

3）打开输入(端口)模块、综合比较(计算代数和)模块、(线性)传递函数模块、增益模块、输出(端口)等模块，进行参数设置并保存。

4）打开示波器模块 Scope 的参数设置对话框，熟悉示波器的参数设置的按钮与参数设置对话框的两张选项卡，进行参数设置并保存。

5）创建常用模块模型 cymk. mdl。认识 15 个功能模块并进行参数设置与修改。

【实验实训 16-5】　仿真模型图的绘制

1. 实验目的

熟悉并掌握仿真模型图绘制的方法与步骤。

2. 实验知识准备

复习模块的复制、移动与删除；模块的连接；模块标题名称的修改；系统模型标题名称的标注与修改；模型文件的保存与打开等内容；复习【例 2-1】、【例 2-2】。

3. 实验内容

1）训练信号线选中、向量信号线与线型设定、信号线设置标签、信号线折弯、信号线分支、信号线平行移动、显示向量信号线信号数目、信号线与模块分离、信号线删除等操作。

2）训练修改模块标题名称操作。

3）训练标注与修改系统模型标题名称操作。

4）训练修改模块内部参数操作。

5）训练模型文件的保存与打开操作。

6）创建模型 sx2L0201. mdl 或 sx2L0202. mdl。

【实验实训 16-6】　程序方式下与 Notebook 方式下运行 MATLAB 程序

1. 实验目的

熟悉并掌握在 MATLAB 命令窗口下运行程序和在 Notebook 方式下运行程序的操作方法。

2. 实验知识准备

复习 MATLAB 7. 5 的启动、Notebook 的启动、MATLAB 7. 5 的命令窗口(Command Window)、Notebook 菜单命令简介、Notebook 的使用、运行 MATLAB 程序的三种方式。

3. 实验内容

1）在“Untitled”模型文件窗口中，输入程序，并以某文件名存盘，然后在 MATLAB 命令窗口中输入该文件名，接着按 Enter 键就是执行该程序，此即为程序文件执行方式。在程序方式下，操作训练【例 8-6】、【例 12-11】、【例 13-1】、【例 13-11】。

2）在已安装 Notebook 的 Word 窗口的英文输入状态下，输入 MATLAB 语句或程序，用鼠标左键将其选中(或叫“刷黑”)，然后运行主菜单【Notebook】下的【Evaluate Cell】命令，此即为程序的 Notebook 执行方式。在 Notebook 方式下，操作训练【例 4-1】~【例 4-11】。

第 17 章　自动控制原理 MATLAB 实验实训

本章为自动控制原理 MATLAB 实验实训，共 10 个。

【实验实训 17-1】　控制系统数学模型的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握控制系统 MATLAB 数学表达式模型及其相互转换的 MATLAB 实现。

2. 实验知识准备

复习控制系统微分方程、传递函数、动态结构图三类基本数学模型概念及其求取、符号运算与 MATLAB 函数两类计算方法；用系统 Simulink 结构图模型化简控制系统模型的方法。

3. 实验内容

1）训练对阻容 RC 网络图列写微分方程与传递函数模型。操作训练【例 4-1】~【例 4-2】。

2）训练对有反馈网络的集成运放图列写传递函数模型。操作训练【例 4-3】。

3）训练对串并联、反馈连接的网络图列写传递函数模型。操作训练【例 4-4】。

4）训练对系统微分方程组绘制系统动态结构图并求传递函数。操作训练【例 4-5】。

5）训练用自编函数 tfto2. m、zpkto2. m、ssto2. m 求系统传递函数并进行转换。操作训练【例 4-6】。

6）训练将系统的 Simulink 结构图模型用系统函数命令 linmod( ) 与 linmod2( ) 转换为系统状态空间模型、传递函数与零极点增益模型。操作训练【例 4-9】~【例 4-11】。

【实验实训 17-2】　连续系统时域分析的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握控制系统时域分析 MATLAB 函数命令的调用格式、时域分析 MATLAB 实现的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习控制系统时域分析的几个基本概念、Laplace 变换与反变换、时域响应 MATLAB 仿真函数 step. m 的调用格式、作者开发的 MATLAB 函数 perf. m 的调用格式与使用方法、利用 Simulink 动态结构图的时域响应仿真方法。

3. 实验内容

1）函数指令方式下的仿真，一种是 Notebook 执行方式(不带鼠标操作的均可采用)，另一种是程序文件执行方式(带鼠标操作的采用)。训练并完成 Notebook 执行方式下的仿真【例 5-1】~【例 5-31】。

2）利用 Simulink 动态结构图模型的时域响应仿真训练。训练并完成在 Simulink 窗口里函数程序方式下或菜单方式下的仿真【例 5-32】、【例 5-33】。

【实验实训 17-3】　控制系统稳定性分析的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握控制系统稳定性分析 MATLAB 实现的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习代数稳定判据的 MATLAB 实现、根轨迹法判定系统稳定性的 MATLAB 实现、频率法判定系统稳定性的 MATLAB 实现。

3. 实验内容

1）训练用代数稳定判据对控制系统进行判稳。操作训练【例 6-1】~【例 6-4】。

2）训练用根轨迹法对控制系统进行判稳。操作训练【例 6-5】~【例 6-6】。

3）训练用频率法对控制系统进行判稳。操作训练【例 6-7】~【例 6-10】。

【实验实训 17-4】　控制系统稳态误差分析的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握控制系统稳态误差 MATLAB 计算与绘制稳态误差曲线的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习控制系统误差(响应)与稳态误差及其误差传递函数、控制系统静态误差系数与动态误差系数、三种典型信号给定输入作用下的稳态误差、三种典型外作用信号下给定输入响应与其稳态误差曲线绘制、从输出端定义的非单位负反馈系统的误差的计算、扰动输入作用下的稳态误差计算。

3. 实验内容

1）训练计算控制系统静态误差系数与动态误差系数，操作训练【例 7-1】~【例 7-4】。

2）训练计算控制系统在三种典型信号给定输入作用下的稳态误差并绘制稳态误差曲线，操作训练【例 7-5】~【例 7-7】。

3）训练从输出端定义的非单位负反馈系统误差的计算，操作训练【例 7-8】。

4）训练在扰动输入作用下的稳态误差计算，操作训练【例 7-9】~【例 7-11】。

【实验实训 17-5】　控制系统根轨迹分析的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握绘制系统零极点图、绘制系统根轨迹图、计算给定一组根的系统根轨迹增益；系统根轨迹分析与使用设计工具 Rltool 的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习根轨迹的几个基本概念、根轨迹分析的 MATLAB 实现的函数 pzmap. m、rlocus. m、rlocfind. m 的指令格式、MATLAB 基于根轨迹的设计工具。

3. 实验内容

1）训练使用函数 pzmap. m 绘制系统零极点图，操作训练【例 8-1】~【例 8-2】。

2）训练使用函数 rlocus. m 绘制系统的根轨迹图，操作训练【例 8-3】~【例 8-4】

3）训练系统根轨迹分析与设计工具 Rltool，操作训练【例 8-5】~【例 8-6】。

【实验实训 17-6】 控制系统频域分析的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握系统 Bode 图、Nyquist 曲线绘制的函数命令调用格式以及计算频域响应模值裕度与相位裕度的方法。

2. 实验知识准备

复习频域分析的几个概念、绘制频域响应 Bode 图的函数指令格式、绘制频域响应 Nyquist 曲线的函数指令格式、频域响应的模值裕度与相位裕度函数 margin. m 指令格式。

3. 实验内容

1）训练计算控制系统频域特性，操作训练【例 9-1】~【例 9-3】。

2）训练使用函数 bode. m 绘制系统 Bode 图，操作训练【例 9-4】~【例 9-7】。

3）训练使用函数 nyquist. m 绘制系统 Nyquist 图，操作训练【例 9-9】~【例 9-10】。

【实验实训 17-7】 描述函数分析非线性系统的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握非线性系统一次近似下的周期运动即自振的参数(X，ω)计算，用 MATLAB 程序绘制非线性特性的相对负倒描述函数与线性部分的 Nyquist 曲线的方法与步骤。

2. 实验知识准备

复习有关非线性系统分析的几个概念、典型非线性的描述函数、非线性系统自振分析。

3. 实验内容

1）训练同时绘制非线性特性的相对负倒描述函数与线性部分的 Nyquist 曲线，操作训练【例 10-1】~【例 10-4】。

2）训练计算非线性系统一次近似下的周期运动即自振的参数(X，ω)，操作训练【例 10-5】~【例 10-8】。

【实验实训 17-8】 离散系统分析与校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握离散系统脉冲传递函数、离散系统分析与校正 MATLAB 实现的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习用 MATLAB 工具求解算 z 变换与 z 反变换、差分方程 z 变换解法、离散系统时域分析、根轨迹分析与动态分析的 MATLAB 实现、离散系统数字校正的 MATLAB 实现。

3. 实验内容

1）训练求解算 z 变换与 z 反变换，操作训练【例 11-1】~【例 11-6】。

2）训练差分方程 z 变换解法，操作训练【例 11-7】。

3）训练计算离散系统脉冲传递函数，操作训练【例 11-8】~【例 11-13】。

4）训练离散系统时域分析、根轨迹分析与动态分析，操作训练【例 11-14】~【例 11-21】。

5）训练离散系统数字校正的 MATLAB 实现，操作训练【例 11-22】~【例 11-23】。

【实验实训 17-9】　线性系统状态空间分析的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握状态空间分析与李雅普诺夫稳定性分析 MATLAB 实现的方法与步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统状态空间分析的几个基本概念、求解系统状态方程、系统状态方程的线性变换、线性系统的可控性与可观性、系统状态反馈与状态观测、系统 Lyapunov 稳定性分析。

3. 实验内容

1）训练求解系统状态方程、进行系统状态方程的线性变换，操作训练【例 14-4】~【例 14-16】。

2）训练进行线性系统可控性与可观性判别，操作训练【例 14-4】~【例 14-16】。

3）训练对线性系统的可控性与可观性进行判断，操作训练【例 14-17】~【例 14-24】。

4）训练进行系统状态反馈与状态观测，操作训练【例 14-26】~【例 14-30】。

5）训练对系统进行李雅普诺夫稳定性分析，操作训练【例 14-31】~【例 14-32】。

【实验实训 17-10】　线性二次型最优控制的 MATLAB 仿真

1. 实验目的

学习并掌握连续系统线性二次型最优控制 MATLAB 仿真的方法与步骤。

2. 实验知识准备

复习最优控制基本概念、连续系统线性二次型最优控制的 MATLAB 实现、最优观测器的 MATLAB 实现、线性二次型 Gauss 最优控制的 MATLAB 实现。

3. 实验内容

1）训练连续系统线性二次型最优控制的 MATLAB 实现，操作训练【例 15-1】~【例 15-4】。

2）训练最优观测器的 MATLAB 实现，操作训练【例 15-5】~【例 15-6】。

3）训练线性二次型 Gauss 最优控制的 MATLAB 实现，操作训练【例 15-7】~【例 15-8】。

第 18 章　连续控制系统校正设计的 MATLAB 实验实训

本章实验实训的内容比起自动控制原理 MATLAB 实验实训要复杂许多，因此，每个实验训练时间可能需要 4 学时或更长时间，使用者也可根据实验训练内容与实际情况而定。

【实验实训 18-1】　Bode 图常规设计超前、滞后校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握 Bode 图常规设计超前、滞后校正 MATLAB 实现的原理、方法和步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统按 Bode 图常规设计超前、滞后校正的原理，对应 MATLAB 自编函数 leadc. m、lagc. m 的使用方法；检测系统校正前后时域与频域性能指标的自编函数 chec. m 的使用方法。

3. 实验内容

1）训练检测系统校正前时域与频域性能指标，操作训练【例 12-3】。

2）训练使用自编函数 leadc. m 对系统按 Bode 图常规设计进行超前校正，操作训练【例 12-3】。

3）训练使用自编函数 lagc. m 对系统按 Bode 图常规设计进行滞后校正，操作训练【例 12-4】。

4）训练检测系统校正后时域与频域性能指标，操作训练【例 12-3】。

【实验实训 18-2】　Bode 图非常规滞后、超前校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握 Bode 图非常规滞后、超前校正 MATLAB 实现的原理、方法和步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统按试探法进行滞后、超前校正的原理；检测系统校正前后时域与频域性能指标的自编函数 chec. m 的使用方法。

3. 实验内容

1）训练检测系统校正前时域与频域性能指标，操作训练【例 12-5】。

2）训练使用自编函数 lagc. m、leadc. m 对系统按 Bode 图非常规设计进行滞后、超前校正，操作训练【例 12-5】。

3）训练检测系统校正后时域与频域性能指标，操作训练【例 12-5】。

【实验实训 18-3】　根轨迹解析法超前、滞后校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握根轨迹解析法超前、滞后校正 MATLAB 实现的原理、方法和步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统按根轨迹解析法超前、滞后校正的原理，对应 MATLAB 自编函数 rtloc. m、rlagc. m 的使用方法；检测系统校正前后时域与频域性能指标的方法。

3. 实验内容

1）训练检测系统校正前时域与频域性能指标，操作训练【例 12-6】。

2）训练使用自编函数 rtloc. m 对系统按根轨迹解析法进行超前校正，操作训练【例 12-6】。

3）训练使用自编函数 rlagc. m 对系统按根轨迹解析法进行滞后校正，操作训练【例 12-7】。

4）训练检测系统校正后时域与频域性能指标，操作训练【例 12-7】。

【实验实训 18-4】　用 Ziegler – Nichols 公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握用 Ziegler – Nichols 公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现的原理、方法和步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统用 Ziegler – Nichols 公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现的原理，对应自编函数 zn01. m 的使用方法。

3. 实验内容

1）训练用自编函数 zn01. m 对系统按 Ziegler – Nichols 公式进行校正、仿真，操作训练【例 12-8】。

2）训练对 P、PI、PID 校正的阶跃响应进行性能指标比较，操作训练【例 12-8】。

【实验实训 18-5】　用 Cohen – Coon 公式进行 P、PI、PD、PID 校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握用 Cohen – Coon 公式进行 P、PI、PD、PID 校正的 MATLAB 实现的原理、方法和步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统用 Cohen – Coon 公式进行 P、PI、PD、PID 校正的 MATLAB 实现的原理，对应自编函数 cc01. m 的使用方法。

3. 实验内容

1）训练用自编函数 cc01. m 对系统按 Cohen – Coon 公式进行校正、仿真，操作训练【例 12-9】。

2）训练分析并比较 P、PI、PD、PID 校正的阶跃响应性能指标，操作训练【例 12-9】。

【实验实训 18-6】　用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB

实现的原理、方法和步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则公式进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现的原理，对应自编函数 kttau. m、inmin01. m 的使用方法。

3. 实验内容

1）训练用自编函数 kttau. m、inmin01. m 对系统按 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则公式进行 P、PI、PID 校正、仿真，操作训练【例 12-10】。

2）训练对 P、PI、PID 校正的阶跃响应进行性能指标比较，操作训练【例 12-10】。

【实验实训 18-7】 用稳定边界法进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现

1. 实验目的

学习并掌握用稳定边界法进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现的原理、方法和步骤。

2. 实验知识准备

复习控制系统用稳定边界法进行 P、PI、PID 校正的 MATLAB 实现的原理，对应自编函数 zn02. m 的使用方法。

3. 实验内容

1）训练用自编函数 kttau. m、zn02. m 对系统按用稳定边界法进行 P、PI、PID 校正、仿真，操作训练【例 12-11】。

2）训练分析并比较 P、PI、PID 校正的阶跃响应性能指标，操作训练【例 12-11】。

第 19 章　生产过程控制系统 MATLAB 仿真实验实训

本章实验实训比起自动控制原理 MATLAB 实验实训也要复杂许多，因此，每个实验训练的时间可能需要 4 学时或更长的时间，使用者也可根据实验训练的内容与实际情况而定。

【实验实训 19-1】　简单回路控制系统的 MATLAB 计算及仿真

1. 实验目的

学习并掌握简单回路过程控制系统的 MATLAB 计算及仿真的方法与步骤。

2. 实验知识准备

复习生产过程控制的特点、过程控制中被控对象动态特性、过程控制系统性能指标，以及对简单回路控制系统用 Ziegler－Nichols 整定公式进行 PI、PID 校正设计。

3. 实验内容

1）训练对简单回路过程控制系统进行校正设计前检测系统单位阶跃响应与 Bode 图，操作训练【例 13-8】。

2）训练对简单回路过程控制系统用 Ziegler－Nichols 整定公式进行校正设计，操作训练【例 13-8】。

3）训练校正设计后检测系统单位阶跃响应，操作训练【例 13-8】。

4）训练校正设计后再施以 Smith 预估控制，检测系统单位阶跃响应，操作训练【例 13-8】。

【实验实训 19-2】　前馈控制系统的 MATLAB 计算及仿真

1. 实验目的

学习并掌握前馈过程控制系统的 MATLAB 计算及仿真的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习前馈控制系统概念、前馈控制不变性原理以及前馈控制系统 MATLAB 仿真。

3. 实验内容

1）训练绘制前馈控制系统的 Simulink 动态结构图模型，操作训练【例 13-9】。

2）训练对前馈控制系统进行单位阶跃响应 MATLAB 仿真并计算性能指标，操作训练【例 13-9】。

3）训练校正设计后再施以 Smith 预估控制，检测系统单位阶跃响应与 Bode 图，操作训练【例 13-9】。

【实验实训 19-3】　大延迟控制系统的 MATLAB 计算及仿真

1. 实验目的

学习并掌握大延迟控制系统的 MATLAB 计算及仿真的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习生产过程控制特点、控制系统中延迟特性的处理（控制系统中延迟特性的传递函

数模型、带延迟特性闭环系统的近似模型等)，以及用 Cohen – Coon 整定公式对大延迟系统进行串联 PI、PID 校正器设计。

3. 实验内容

1）训练对大延迟过程控制系统校正设计前检测系统单位阶跃响应，操作训练【例 13-10】。

2）训练对系统用 Cohen – Coon 整定公式进行校正设计，操作训练【例 13-10】。

3）训练对大延迟控制系统进行 Smith 预估器控制，检测系统单位阶跃响应，操作训练【例 13-10】。

【实验实训 19-4】 串级控制系统的 MATLAB 计算及仿真

1. 实验目的

学习并掌握串级过程控制、多环控制系统的 MATLAB 计算及仿真的步骤与方法。

2. 实验知识准备

复习生产过程控制特点，串级控制系统输入量、输出量、主被控对象、副被控对象、主被控参量、副被控参量等概念，用稳定边界法对串级系统进行串联 P、PI、PID 校正器设计。

3. 实验内容

1）训练绘制串级过程控制系统的 Simulink 动态结构图模型，操作训练【例 13-11】。

2）训练用稳定边界法对串级系统进行串联 P、PI、PID 校正器设计，对校正后系统进行单位阶跃响应仿真，操作训练【例 13-11】。

第 3 部分　控制系统 MATLAB 计算及仿真课程设计与毕业设计实训

电气信息类各专业自动控制课程主要是指“自动控制原理”、“电力拖动自动控制系统”、“生产过程自动控制系统”与“控制系统 MATLAB 仿真”，对这些课程国内高校有课程设计或毕业设计的不同安排。

课程设计教学的目的是检查学生学习某门课程所学的基本概念、基本理论、基本计算方法，用来分析和解决上述课程中某一个技术问题。通过课程设计实训，使学生掌握课程设计的方法与步骤，初步训练用 MATLAB 软件工具编制程序来解算该课程的某个技术问题。课程设计结束后，学生应撰写课程设计书，通常课程设计安排一周左右的时间。

自动控制技术毕业设计的教学目的是培养学生综合应用在校所学多门课程(一般指三门课程，其中必须涵盖本专业的主要专业基础课，即“自动控制原理”与主要专业课“自动控制系统”)，运用其基本理论、专业知识与基本技能，分析本专业范围内的工程技术问题，进而培养学生建立正确的设计思想，掌握工程设计的一般程序、方法与步骤，完成学生必须具有的解决实际工程问题基本能力的训练或从事科学研究的初步训练。

将电气信息类课程设计的内容加以延伸，例如，向“电机及拖动”、“模拟电子技术”、“数字电子技术”、“半导体变流技术”、“控制系统辨识”、“现代控制理论”课程等方面延伸，也就是适当添加这些课程的内容，使之设计内容涵盖本专业三门课程，这个设计也就成为毕业设计了。所以，课程设计与毕业设计并没有严格的界限与规定。通常毕业设计前安排一段时间进行毕业实习，毕业设计安排 1～3 个月时间，毕业设计结束后，学生也应撰写毕业设计书。

《控制系统 MATLAB 计算及仿真》与本书中的诸多例题与习题，均可作为课程设计或毕业设计的参考题目。若稍为改变参数，例如改变电机参数，或改变控制对象参数，或改变要求性能指标参数，那作为设计题目就更多。由于篇幅所限，在此仅介绍四个课程设计与一个电力拖动控制系统设计实训及一个双闭环直流调速系统数学模型和电气模型仿真实训的题目供参考。其中设计内容，仅列写了设计内容的提纲与部分设计细目、部分数据、部分程序与部分动态结构模型。要想成为一个完整的设计，还需使用者根据指导教师的要求，参考这里介绍的内容加以完成。

第 20 章　自动控制仿真课程设计与毕业设计实训

本章介绍自动控制原理四个课程设计实训与控制系统两个毕业设计实训。

【课程设计实训 20-1】　根轨迹分析的 MATLAB 计算及仿真

根轨迹分析设计的目的：熟悉并掌握利用根轨迹设计器对系统进行补偿设计。

根轨迹设计的知识准备：复习根轨迹分析的 MATLAB 实现。

1. 已知条件

系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.5s+8)}$$

2. 设计内容及要求

1）用根轨迹设计器对系统进行补偿设计，使系统单位阶跃给定响应一次超调 $\sigma\% \leqslant 20\%$ 后即衰减到稳态值，调节时间 $t_s \leqslant 5s$。

2）在根轨迹设计器中观察根轨迹图与 Bode 图，以及系统阶跃给定响应曲线。

3. 设计

1）必须在程序文件方式下执行程序，即必须编写以下程序并且命名，在 MATLAB 命令窗口里输入该程序名后按 Enter 键。

```
% MATLAB PROGRAM sx2L2001.m
clear;n1 =[1];d1 = conv(conv([1 0],[1 1]),[0.5 8]);
sys = tf(n1,d1);rltool(sys),
```

程序运行后，首先给出图 20-1 所示的设计工具加载提示。



图 20-1　设计工具加载提示

加载完后，计算机显示器同时弹出已有本系统信息的“SISO Design for SISO Design Task”单输入单输出设计工具(见图 20-2)与“Control and Estimation Tools Manager”控制与估计工具管理器(其系统结构卡“Architecture”处于打开状态，见图 20-3)。

2）验证是否含有本系统信息的“SISO Design for SISO Design Task”设计工具。

在图 20-2 所示设计工具中，选择菜单【Analysis】中的【Response to Step Command】命令，执行后得到图 20-4 所示原系统单位阶跃响应，与执行以下程序的效果一样。由图可知，阶跃响应无超调，但速度太慢，调节时间近 20s，不合题目要求，需对系统进行处理。

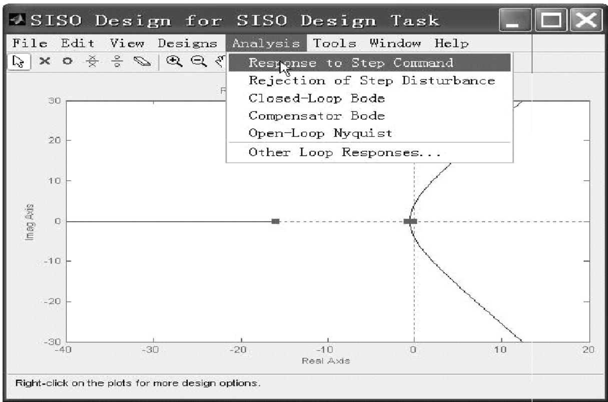


图 20-2　工具 SISO Design for SISO Design Task 中的根轨迹

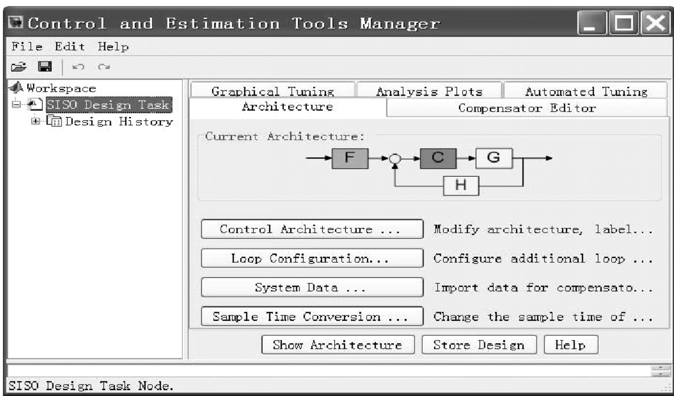


图 20-3　控制与估计工具管理器(Control and Estimation Tools Manager)

3）控制与估计工具管理器(Control and Estimation Tools Manager)简介。

在图 20-3 右边上方，有 5 张选项卡：“Architecture” 系统结构卡、“Compensator Editor” 补偿器编辑卡、“Graphical Tuning” 图形调试卡、“Analysis Plots” 图形分析卡、“Automated Tuning”自动调试卡。

在 5 张卡下是“Current Architecture”系统通用结构图。

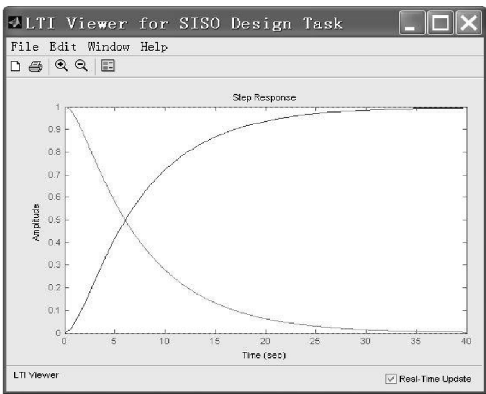


图 20-4　原系统单位阶跃响应

在通用结构图下是 4 个按钮：“Control Architecture” (控制结构图)按钮、“Loop Configuration” (回环类型)按钮、“System Data” (系统数据)按钮、“Sample Time Conversion”(采样时间转换)按钮。

最下部还有 3 个按钮：“Show Architecture” (显示结构图)按钮、“Store Design” (存储设

计)按钮、"Help"(帮助)按钮。

4）进入控制与估计工具管理器进行设计。

当选择 "Compensator Editor" 补偿器编辑卡时，即会弹出补偿校正器编辑器对话框，如图 20-5 所示。在 "Pole/Zero" 选项卡下的 "Dynamics" 区内任何地方单击鼠标右键，即弹出【Add Pole/Zero】菜单，选择【Real Zero】，输入如图 20-6 所示的数据，即引入一个附加的负实数零点(－8)，且使增益 *Gain* = 12 时，最后单击按钮 "Store Design" 存储设计(见图 20-6)并且确认(见图 20-7)。

此时原系统单位阶跃响应图 20-4 就变为图 20-8 所示曲线。由图可知，阶跃响应超调 20%，但调节时间从近 20s 减少到 4s 左右，速度大大提高。

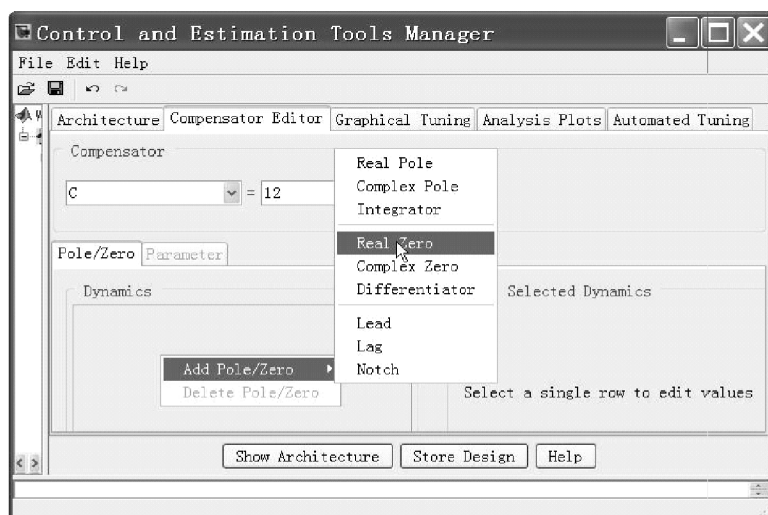


图 20-5　补偿校正器编辑器对话框

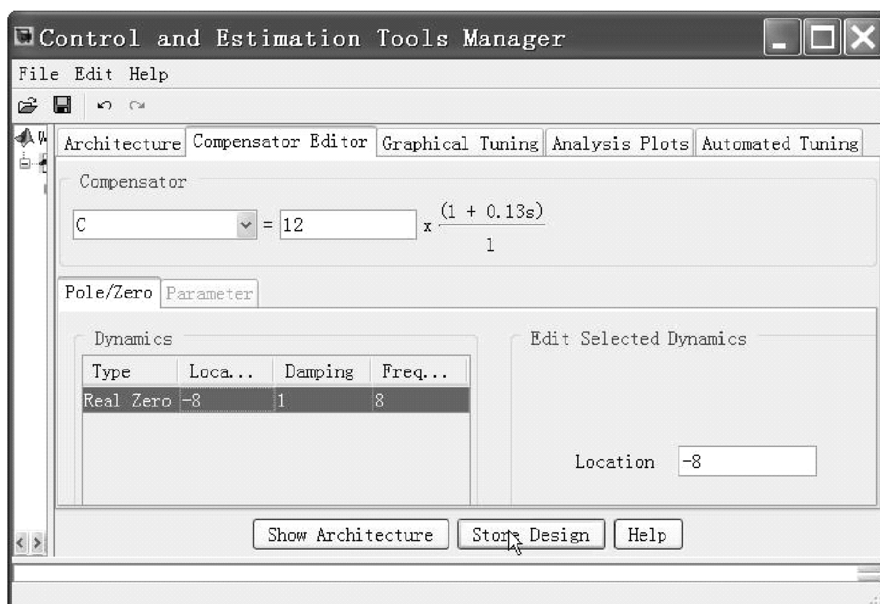


图 20-6　输入数据的补偿校正器编辑器对话框



图 20-7　确认存储设计

由响应曲线可知，系统的单位阶跃给定响应超调 $\sigma\% \approx 20\%$，并且超调后一次衰减到稳定值，调节时间 $t_s \leqslant 5\mathrm{s}$，均已满足题目要求。

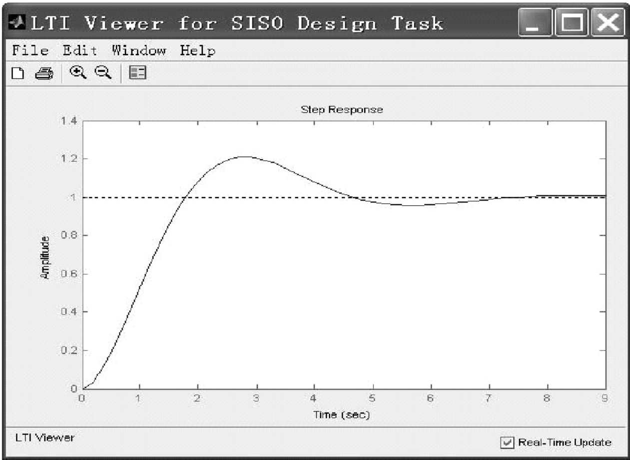


图 20-8　引入附加零点（-8）且 *Gain* = 12 时单位阶跃响应

5）有兴趣的读者，不妨自行改变附加零点与增益的数值，观察图 20-2 中的根轨迹与图 20-8 引入附加零点与增益后系统单位阶跃响应的变化。

【课程设计实训 20-2】　离散系统 MATLAB 计算及仿真

离散系统设计的目的：熟悉并掌握简单离散系统 MATLAB 计算及仿真。

离散系统设计的知识准备：复习离散系统分析的 MATLAB 实现。

1. 已知条件

离散系统如图 20-9 所示。图中 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ 为零阶保持器，线性部分的传递函数为 $G_p(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，$T=1\mathrm{s}$。

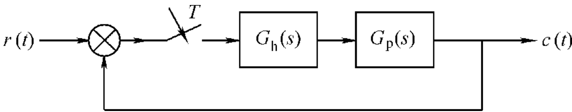


图 20-9　闭环离散系统

2. 设计内容及要求

1）计算系统开环与闭环的脉冲传递函数 $G(z)$、$\Phi(z)$。

2）计算当 $G_p(s)=K\frac{1}{s(s+1)}$ 时使系统稳定的 K 值范围。

3）计算当输入信号 $r(t)=1(t)$、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差。

4）根据 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$ 绘制系统 Bode 图，并求频域性能指标。

5）根据 $T=0.25$s 时 $G(z)$ 绘制负反馈闭环系统阶跃响应曲线。

6）计算当 $r(t)=1(t)$ 时系统输出响应 $c^*(t)$。

7）试绘制 $0\leqslant K<\infty$ 的根轨迹图，并分析取不同的 K 值对应在根轨迹上不同位置时系统的稳定性。

3. 设计

1）计算系统开环脉冲传递函数 $G(z)$、$\Phi(z)$。

```
clear;num=[1];den=[1 1 0];T=1;
key=2;[Gz,phiz]=zohz(key,T,num,den);
```

程序运行后得到 $T=1$s 时 $G(z)=\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-1.368z+0.3679}$、$\Phi(z)=\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-z+0.6321}$

2）计算线性部分传递函数应为 $G_p(s)=K\frac{1}{s\ (s+1)}$ 系统稳定时 K 的取值范围。

① 考虑系数 K 后得到 $G(z)=K\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-1.368z+0.3679}$。

② 用符号计算法求 w 变换后的闭环特征方程 $D(w)=0$。

```
clear;syms w z K;
Dzn=K*(0.3679*z+0.2642);
Dzd=z^2-1.368*z+0.3679;
key=1;[Dw,Gw]=Dzw(key,Dzn,Dzd);
```

程序运行后得到系统闭环 w 域特征方程

$$D(w)=(0.6321K-0.0001)w^2+(1.2642-0.5284K)w+(2.7359-0.1037K)=0$$

③ 用 Lienard - Chipard 稳定判据计算系统稳定的 K 值范围。

要系统稳定，首先，特征方程的各项系数均应大于 0，有系数 $a_0>0$、$a_1>0$、$a_2>0$。其次，因系统最高阶 $n=2$，则计算 Hurwitz 行列式中奇数阶子行列式 $D_1=a_1$ 应大于 0。

```
clear;syms a1 a2 a0 K;
a0=0.6321*K-0.0001;
[K]=solve('0.6321*K-0.0001=0');K=vpa(K,4),
a1=1.2642-0.5284*K;
[K]=solve('1.2642-0.5284*K=0');K=vpa(K,4),
a2=2.7359-0.1037*K;
[K]=solve('2.7359-0.1037*K=0');K=vpa(K,4),
```

程序运行后得到 $0.0001582<K<2.393$。

3）计算当输入信号 $r(t)=1(t)$、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差。

① 重写系统 $G_p(s)=\frac{1}{s(s+1)}$ 开环与闭环的脉冲传递函数。

$T=1$s 时 $G(z)=\dfrac{0.3679z+0.2642}{z^2-1.368z+0.3679}$、$\Phi(z)=\dfrac{0.3679z+0.2642}{z^2-z+0.6321}$。

闭环特征方程式 $D(z)=z^2-z+0.6321=0$。

② 求解闭环系统的特征根。

```
clear;P=[1 -1 0.6321];roots(P),
```

语句执行结果

```
ans =
  0.5000 +0.6181i
  0.5000 -0.6181i
```

③ 计算特征根的模并判稳。

计算数据表明，特征根有两个根且为复根，其模

```
clear;x=0.5;y=0.6181;z1=x+y*j;z2=x-y*j;
Z1=abs(z1),Z2=abs(z2),
```

程序运行结果 $|z_1|=|z_2|=0.795<1$，所以闭环系统稳定。

④ 计算当输入信号 $r(t)=1(t)$、$r(t)=t$ 与 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 时系统的稳态误差。

```
clear;syms z;Gz=(0.3679*z+0.2642)/(z-1)/(z-0.3679);
T=1;[Kp,Kv,Ka,ep,ev,ea]=Kpvaz(Gz,T);
```

程序运行后得到 $K_p=\infty$、$e_{ssp}=0$；$K_v=1$、$e_{ssv}=1$；$K_a=0$、$e_{ssa}=\infty$。

4）根据 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$ 绘制系统 Bode 图，并求频域性能指标。

① 取双线性变换 $z=\dfrac{1+w}{1-w}$计算 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$。

```
clear;syms w z K;Dzn=0.3679*z+0.2642;;
Dzd=z^2-1.368*z+0.3679;key=2;
[Dw,Gw]=Dzw(key,Dzn,Dzd);
```

程序运行后得到 $G(w)=\dfrac{-(w-1)(1037w+6321)}{27359w^2+12642w-1}$。

② 根据 w 平面的系统开环脉冲传递函数 $G(w)$绘制系统 Bode 图并求频域性能指标。

```
clear;n=conv([-1 1],[1037 6321]);d=[27359 12642 -1];
Gw=tf(n,d);w=logspace(-3,3);margin(Gw);
```

程序运行后绘制 Bode 图，如图 20-10 所示，程序运行后还计算得到

幅值裕度 G_m 即 $L_h=7.58$dB　　$-\pi$ 穿越频率 ω_{cg}即 $\omega_g=0.78$rad/s

相角稳定裕度 P_m 即 $\gamma=30.4°$　　剪切频率 ω_{cp}即 $\omega_c=0.406$rad/s

这些频域性能指标说明系统不仅稳定，而且频域性能已满足一般要求。

5）根据 $T=1$s 时 $G(z)$绘制负反馈闭环系统阶跃响应曲线。

```
clear;T=1;t=0:1:40;
s1=tf([0.3679,0.2642],[1,-1.368,0.3679],T);
sys=feedback(s1,1);step(sys,t);grid;
```

程序运行后绘制负反馈闭环系统阶跃响应曲线，如图 20-11 所示。

6）用 MATLAB 符号计算法计算 $r(t)=1(t)$时的系统输出响应 $c^*(t)$。

```
clear;syms z;Rz=z/(z-1);H=8;
```

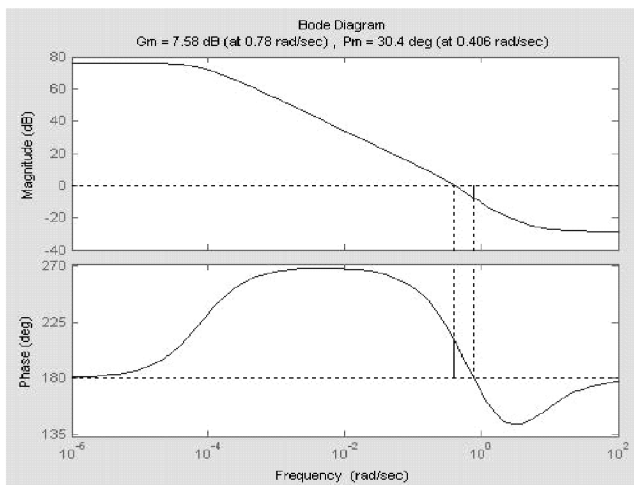


图 20-10　系统 Bode 图

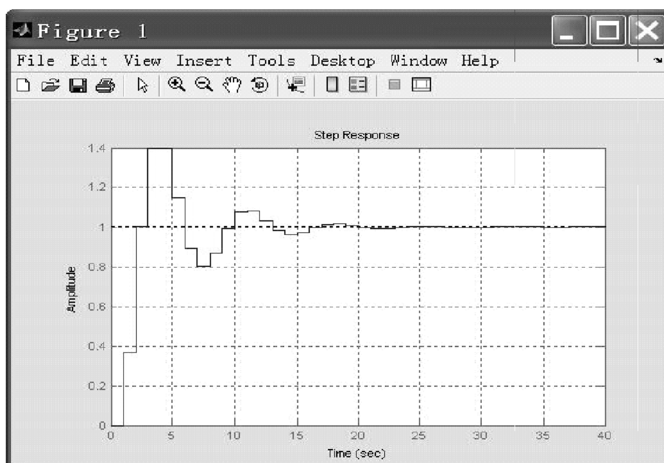


图 20-11　负反馈闭环系统阶跃响应曲线

```
phiz = (0.3679 * z + 0.2642)/(z^2 - z + 0.6321);
[cn] = phiRz(phiz,Rz,H);
```

程序运行结果

```
cn0 = 2.0000e-004
cn1 = 0.3680
cn2 = 1.0000
cn3 = 1.3994
cn4 = 1.3994
cn5 = 1.1469
cn6 = 0.8945
cn7 = 0.8016
cn8 = 0.8683
```

即系统输出响应 $c^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c(nT)\cdot\delta(t-nT)\big|_{T=0.25s}$

$$=0+0.368\delta(t-T)+\delta(t-2T)+1.3994\delta(t-3T)$$
$$+1.3994\delta(t-4T)+1.1469\delta(t-5T)+0.8945\delta(t-6T)$$
$$+0.8016\delta(t-7T)+0.8683\delta(t-8T)+\cdots$$

7）绘制 $0\leqslant K<\infty$ 的根轨迹图，并分析取不同的 K 值对应在根轨迹上不同位置时系统的稳定性。

① 再写带 K 值的 $G(z)$：$G(z)=\dfrac{K(0.368z+0.264)}{z^2-1.37z+0.368}$

② 求展开 $G(z)$ 的分子与分母表达式。

```
clear;syms z K n d;
n=(.368*z+.264)*K,d=z^2-1.37*z+.368,
```

程序运行结果

```
n=(46/125*z+33/125)*K
d=z^2-137/100*z+46/125
```

③ 绘制 $0\leqslant K<\infty$ 时的根轨迹图。

```
clear;G=tf([46/125 33/125],[1 -137/100 46/125],-1);rlocus(G),
```

程序运行后绘制系统 $0\leqslant K<\infty$ 时的根轨迹图，如图 20-12 所示。该程序执行一旦按 Enter 键后，在根轨迹图窗口上有纵横两条坐标线，其交点随鼠标而移动。

再执行以下程序

```
clear;G=tf([46/125 33/125],[1 -137/100 46/125],-1);
rlocus(G),[k,poles]=rlocfind(G),w=imag(poles(1)),
```

当鼠标指在根轨迹与正横坐标的交点(尽力准确)时，根轨迹如图 20-12 所示。其数据是

```
Select a point in the graphics window
selected_point=0.6315 - 0.0047i
k=0.1982
poles=0.6649
    0.6322
w=0
```

按以上操作多次执行以上程序，请读者特别关注：①以上程序中函数 tf( )的输入参数“-1”（即 $Ts=-1$）表示系统的采样周期未定义且在根轨迹图中同时绘制单位圆，当 Ts 缺省时，在根轨迹图中不绘制单位圆。②与选择点相对应的开环增益 k、相关极点 *poles* 及其对应角频率 ω，用来观察随 ω 的增加，根轨迹曲线在复平面画出的图像。③根轨迹曲线与单位圆的相对位置关系；当根轨迹处于单位圆内或根轨迹与单位圆相交或根轨迹处于单位圆外时，开环增益的大小、系统闭环稳定性状态等。

当鼠标指在根轨迹第 1 象限与单位圆的交点时，根轨迹如图 20-13 所示。此时开环增益 $k=2.4057$，正好是第 1 象限根轨迹与单位圆的交点，系统闭环临界稳定；根轨迹在单位圆内时，系统闭环稳定；根轨迹在单位圆外时，系统闭环就会不稳定了。

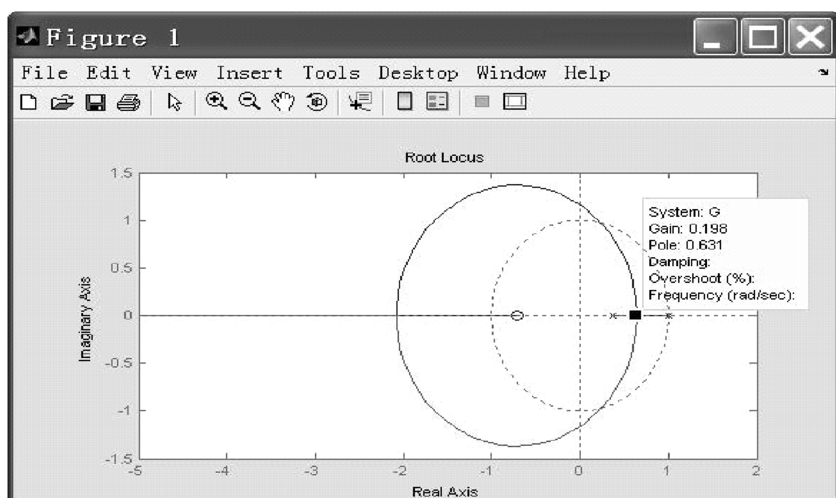


图 20-12　选点在根轨迹与正横坐标的交点

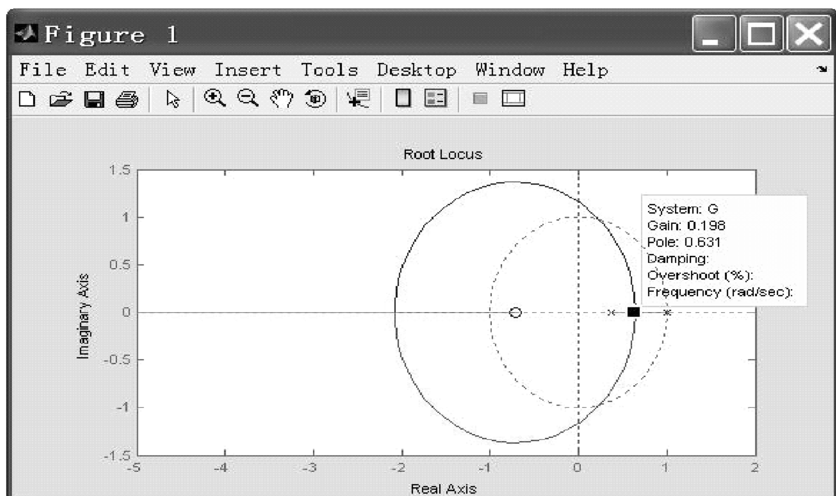


图 20-13　选点在第 1 象限根轨迹与单位圆的交点上

将鼠标指在根轨迹与纵坐标的交点(尽力准确)时，根轨迹如图 20-14 所示。根轨迹在单位圆外，系统闭环不稳定。

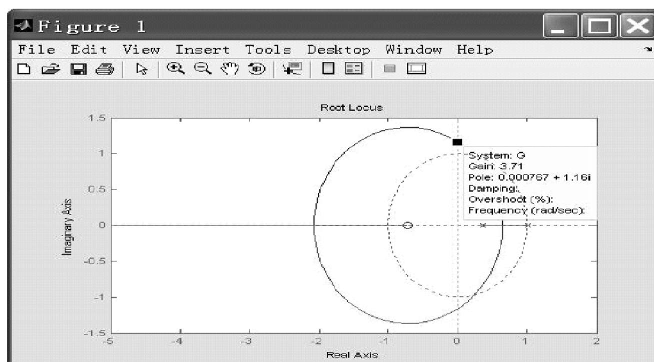


图 20-14　选点在根轨迹与纵坐标的交点

当鼠标指在根轨迹的第 2 象限时，根轨迹如图 20-15 所示。

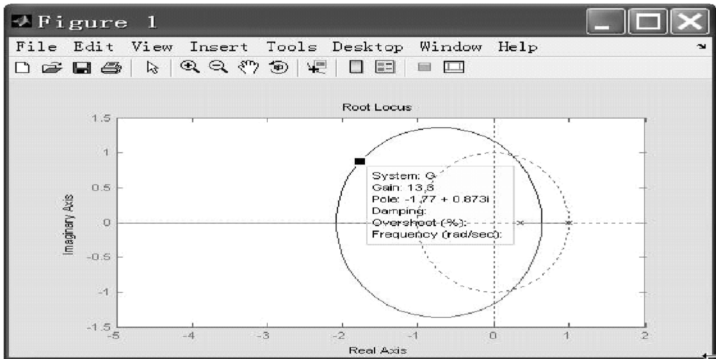


图 20-15　选点在第 2 象限根轨迹上

当鼠标指在根轨迹与负横坐标的交点(尽力准确)时，根轨迹如图 20-16 所示。

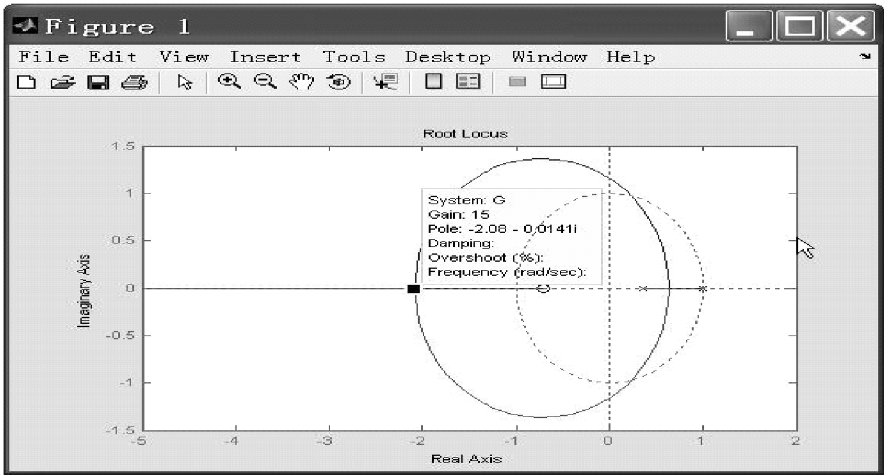


图 20-16　选点在根轨迹与负横坐标的交点

【课程设计实训 20-3】　过程控制系统的 MATLAB 计算及仿真

过程控制系统设计的目的：熟悉并掌握利用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则对系统进行设计，并实现 Smith 预估器控制及其对系统进行仿真。

过程控制系统设计的知识准备：复习过程控制系统的 MATLAB 计算及仿真。

1. 已知条件

钢铁厂轧钢车间加热炉系统如图 20-17 所示。图中加热炉传递函数模型与温度传感器及其变送器的传递函数模型分别为 $G_{01}(s)=\dfrac{9.9}{120s+1}e^{-80s}$、$G_{02}(s)=\dfrac{0.107}{10s+1}$。

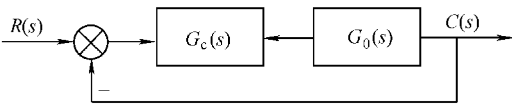


图 20-17　加热炉系统结构框图

2. 设计内容及要求

1）试用 IAE、ISE、ITAE 积分值最小准则设计串联 PI 校正器 $G_c(s)$。

2）再对系统进行 Smith 预估器控制的仿真。

3. 设计

1）由题意知广义被控对象的数学模型为

$$G_0(s)=G_{01}(s)G_{02}(s)=\frac{1.06}{(120s+1)(10s+1)}e^{-80s}$$

2）将对象数学模型型拟合成带延迟的惯性环节模型 $G(s)=\frac{K}{Ts+1}e^{-\tau s}$。

执行以下 MATLAB 程序，将对象的数学模型拟合成带延迟的惯性环节模型。

```
clear;n1=[1.06];d1=conv([120 1],[10 1]);G1=tf(n1,d1);tau1=80;
[np,dp]=pade(tau1,2);Gp=tf(np,dp);G=G1*Gp;[K,T,tau]=kttau(G),
```

程序运行结果

```
K=1.0600
T=123.2130
tau=88.6238
```

即 $G(s)=\frac{K}{Ts+1}e^{-\tau s}=\frac{1.06}{123.213s+1}e^{-88.6238s}$

3）计算 PI 校正器并作阶跃响应仿真。

用以下程序计算 PI 校正器并作阶跃响应仿真。

```
clear;K=1.0600;T=123.2130;tau=88.6238;
[np,dp]=pade(tau,2);Gp=tf(np,dp);
G=tf(K,[T 1]);iC=1:3;
for i=1:length(iC)
    [Gc2,Kp,Ti]=inmin01(2,[K,T,tau,iC(i)])
    Gc=G*Gc2;Gcc=feedback(Gc,Gp);
    set(Gcc,'Td',tau);step(Gcc),hold on
end
gtext('IAE'),gtext('ISE'),gtext('ITAE'),
```

程序运行后得到带 PI 校正器的系统阶跃给定响应仿真曲线，如图 20-18 所示，三条曲线的终了值是一致的。IAE 与 ITAE 这两种曲线接近重合，响应速度与超调相差不多，IAE 的稍大一点。而 ISE 的响应速度较快，超调量也最大。

程序运行后，可以得到三种最优控制下实现 PI 校正设计时的参数：

① IAE 积分最小准则校正器：$K_p=1.2847$、$T_i=160.5376$

$$G_{cIAE}(s)=\frac{206.2s+1.285}{160.5s}$$

② ISE 积分最小准则校正器：$K_p=1.6887$、$T_i=196.3071$

$$G_{cISE}(s)=\frac{331.5s+1.689}{196.3s}$$

③ ITAE 积分最小准则校正器：$K_p=1.1182$、$T_i=146.1115$

$$G_{cITAE}(s)=\frac{163.4s+1.118}{146.1s}$$

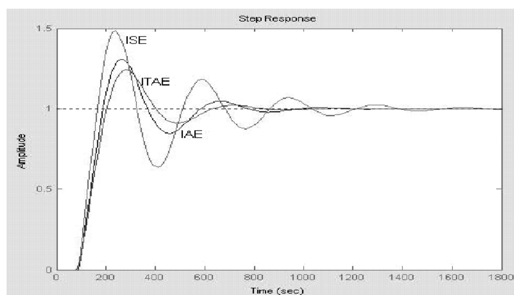


图 20-18　带 PI 校正器的系统阶跃响应曲线

4）Smith(史密斯)预估器控制仿真。

根据 Smith 预估器控制原理，做出系统按 IAE 积分最小准则 PI 调节器校正后再施行 Smith 预估器控制动态模型 sx2L2003. mdl，如图 20-19 所示。图中模块“Step”为单位阶跃信号模块，即“Step time”设置为“0”、“Initial value”设置为 “0”，“Final value”设置为 “1”，“Sample time”设置为“0”；图中模块“Eransport Delay”均为延迟模块，设置相同，即“Time delay”设置为“80”，“Initial input”设置为“0”。图中模块“Scope”为示波器模块，将工具栏按钮【Parameters】的卡片“General” 中的“Time range”设置为“auto”，其他均为默认设置。如果需要，有时还要单击一下工具栏按钮【Autoscale】。

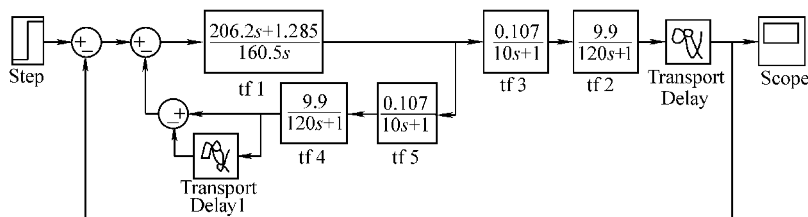


图 20-19　系统动态模型 sx2L2003. mdl

在“sx2L2003. mdl”模型窗口中，先将工具栏的空白框【Simulation stop time】设置为 “800”(秒)；然后执行菜单【Simulation】中的【Start】命令，即对模型系统进行阶跃给定响应仿真，再双击示波器图标即可得仿真结果曲线，如图 20-20 所示。可见，系统 Smith 预估器控制的仿真曲线单调上升，既不振荡也不超调，阶跃响应非常理想。

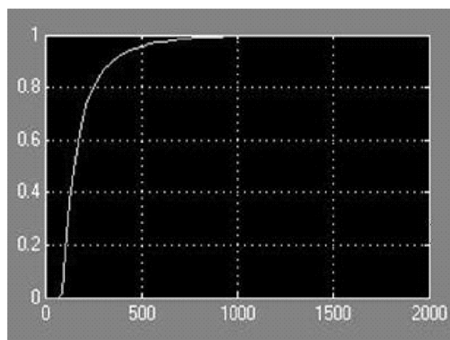


图 20-20　PI 校正后 Smith 预估器控制的阶跃响应曲线

【课程设计实训 20-4】 控制系统状态空间分析的 MATLAB 设计

状态空间分析设计的目的：通过课程设计，掌握控制系统动态方程、系统可控标准型、线性变换传递函数及其不变性、系统可控性与可观性、对给定系统闭环极点设计状态观测器与降维状态观测器，逐步学会绘制模型，并进行系统仿真。

控制系统状态空间分析的知识准备：复习状态空间分析的 MATLAB 计算及仿真。

1. 已知条件

系统动态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-0.4 & 0 & -0.01\\ 1 & 0 & 0\\ -1.4 & 9.8 & -0.02\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}6.3\\ 0\\ 9.8\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}=[0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}$

2. 设计内容及要求

1）计算系统的单位阶跃响应。

2）计算系统可控标准型动态方程，并验证线性变换传递函数的不变性。

3）绘制可控标准型系统仿真模型，并对其进行单位阶跃响应仿真。

4）判别系统可控性并求状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，试适当配置系统闭环极点，使 $\sigma\% < 15\%$、$t_s < 3$s。

5）要求系统闭环极点不变求系统状态观测器的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$。

6）判别系统的可观性，并设计状态观测器。

7）绘制带反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 及其状态观测器的可控标准型系统仿真模型，并对其进行单位阶跃响应仿真。

8）要求系统闭环极点为 $\lambda_{1,2}=-3\pm j4$ 时设计系统降维状态观测器也使 $\sigma\%<15\%$、$t_s<3$s。

9）绘制带反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 及其降维状态观测器的可控标准型系统仿真模型，并进行仿真。

3. 设计

1）求系统可控标准型动态方程。

```
clear;A1 = [ -0.4 0  -0.01;1 0 0; -1.4 9.8  -0.02];
B1 = [6.3;0;9.8];C1 = [0 0 1];D = 0;
[P,A,B,C] = consta(A1,B1,C1);
```

程序运行表明，原系统与可控标准型系统都是可控的，计算得到可控标准型

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -0.098 & 0.006 & -0.42\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\text{、}\bar{\boldsymbol{y}}=[61.74\quad -4.9\quad 9.8]\bar{\boldsymbol{x}}$$

给出以下调用自编函数 tran01. m 的程序解算可控标准型系统对应的传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}$。

```
clear;syms s t;A = [0 1 0;0 0 1; -0.0980 0.0060  -0.4200];
B = [0;0;1];C = [61.74  -4.9 9.8];D = 0;[invsea,G] = tran01(A,B,C,D);
```

程序运行后得到传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)=490\dfrac{10s^2-5s+63}{500s^3+210s^2-3s+49}$。

2）计算原系统的单位阶跃响应。

```
clear;A=[-0.4 0 -0.01;1 0 0;-1.4 9.8 -0.02];B=[6.3;0;9.8];
C=[0 0 1];D=0;sys=ss(A,B,C,D);t=0:0.1:120;step(sys,t),grid;
```

程序运行后绘制单位阶跃响应曲线如图 20-21 所示，这是一条发散振荡曲线，系统不能工作。还可调用自编函数 tran01.m 解算原系统的传递函数矩阵 **G** 与可控标准型系统的传递函数矩阵 **G** 一样。

```
clear;A=[-0.4 0 -0.01;1 0 0;-1.4 9.8 -0.02];B=[6.3;0;9.8];
C=[0 0 1];D=0;[invsea,G]=tran01(A,B,C,D);
```

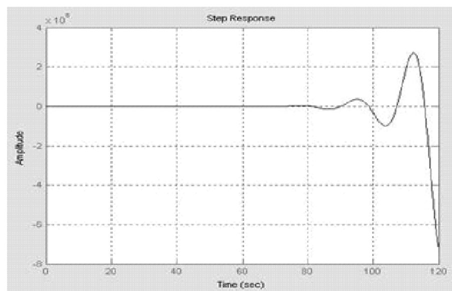


图 20-21　原系统单位阶跃响应曲线

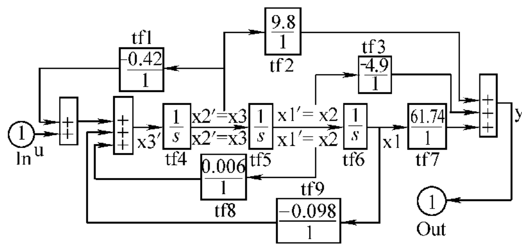


图 20-22　系统可控标准型仿真模型 sx2L2004.mdl

3）绘制可控标准型系统仿真模型 sx2L2004.mdl，如图 20-22 所示，并对其进行单位阶跃响应仿真。

① 调用自编函数 ssto2.m 验证绘制可控标准型系统仿真模型 sx2L1429.mdl 是正确的。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L2004');G=ssto2(1,A,B,C,D);
```

② 用系统可控标准型仿真模型仿真绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L2004');
sys=ss(A,B,C,D);t=0:0.1:120;step(sys,t),grid;
```

程序运行后得到系统可控标准型模型单位阶跃响应曲线仍如图 20-21 所示，与原系统单位阶跃响应完全一样，都是一发散振荡曲线。

4）试探法配置系统闭环极点 $\lambda_1=-6$、$\lambda_{2,3}=-1\pm j\sqrt{5}$，使 $\sigma\%<15\%$、$t_s<3s$。给出调用自编函数 stabak.m 的程序解算可控标准型系统状态观测器的增益矩阵 **K**。

```
clear;A=[0 1 0;0 0 1;-0.0980 0.0060 -0.4200];B=[0;0;1];
C=[61.74 -4.9 9.8];D=0;P=[-6 -1+j*sqrt(5) -1-j*sqrt(5)];
key=1;[K]=stabak(key,A,B,C,D,P);
```

程序运行后表明，系统是能控的，系统可实现按题意要求的闭环极点配置；计算得的估计系统状态观测器的增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[35.9020\quad 18.006\quad 7.58]$。

5）绘制带状态反馈增益矩阵 **K** 的系统可控标准型仿真模型 sx2L2004a.mdl，如图 20-23 所示，并对其进行单位阶跃响应仿真。

用系统仿真模型 sx2L2004a.mdl 绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod2('sx2L2004a');sys=ss(A,B,C,D);
step(sys),grid;[y,t]=step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到可控标准型模型带状态反馈增益矩阵 **K** 后的系统单位阶跃响应曲线，如图 20-24 所示，单位阶跃响应呈现两段加速上升，系统不仅稳定，而且性能指标满足题目

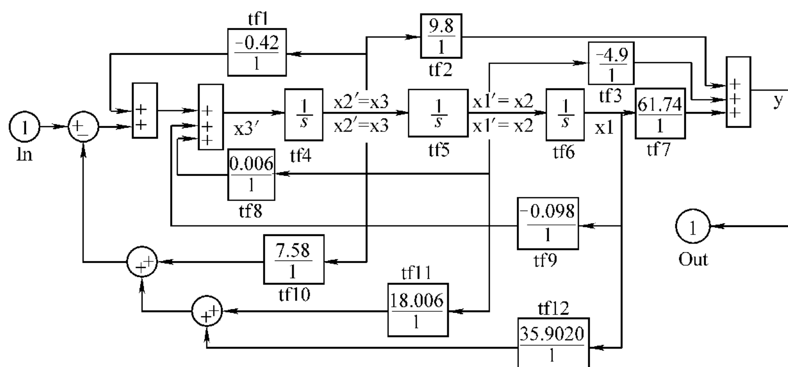


图 20-23　带状态反馈增益矩阵 ***K*** 的可控标准型系统模型 sx2L2004a. mdl

要求，即 $\sigma\% = 13.4711\% < 15\%$ 、$t_s = 2.7511\text{s} < 3\text{s}$。

6）给出以下调用自编函数 staest. m 的程序解算系统的可观性并设计状态观测器。

```
clear;A = [0 1 0;0 0 1; -0.0980 0.0060  -0.4200];
B = [0;0;1];C = [61.74  -4.9 9.8];D = 0;
P = [ -6  -1 + j * sqrt(5) -1 - j * sqrt(5) ];
[CO] = contro(A,B,C,D);
[K,H,AHC] = staest(A,B,C,D,P);
```

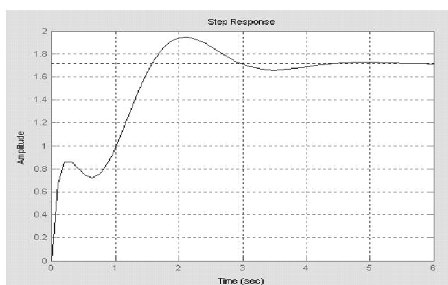


图 20-24　模型 sx2L2004a. mdl
单位阶跃响应曲线

计算结果表明，系统既可控也可观，所以存在状态观测器。系统的状态观测器为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} -4.6096 & 1.3658 & -0.7317 \\ -18.9957 & 1.5076 & -2.0152 \\ -28.3091 & 2.2450 & -4.8980 \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 0.0747 \\ 0.3077 \\ 0.4569 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

7）绘制带状态反馈增益矩阵 ***K*** 与状态观测器的系统模型 sx2L2004b. mdl，如图 20-25 所示，并仿真。

用带状态反馈增益矩阵 ***K*** 与状态观测器的系统模型 sx2L2004b. mdl(见图 20-25)绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L2004b');sys = ss(A,B,C,D);
step(sys),grid;[y,t] = step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到带状态反馈增益矩阵 ***K*** 与状态观测器的系统单位阶跃响应曲线与图 20-24相差无几，说明系统不仅稳定，而且性能指标满足题目要求，即 $\sigma\% = 12.5206\% < 15\%$ 、$t_s = 2.7522\text{s} < 3\text{s}$。

8）要求 $\lambda_{1,2} = -3 \pm \text{j}4$ 设计降维状态观测器。

① 选择任意矩阵 ***D*** 构造非奇异线性变换矩阵 ***Q***：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}、\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \cdots \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 61.74 & -4.9 & 9.8 \end{bmatrix}$$

图 20-25　带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与状态观测器的系统模型 sx2L2004b. mdl

② 根据系统参数，设输出反馈矩阵 $\boldsymbol{H}_{(n-q)\times q}=\boldsymbol{H}_{2\times 1}=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$，并用以下 MATLAB 程序计算 $\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]$，式中包含输出反馈矩阵元素 h_1 与 h_2。

```
clear;syms h1 h2 s;A1 =[0 1 0;0 0 1; -0.098 0.006  -0.42];B1 =[0;0;1];
C1 =[61.74  -4.9 9.8];H =[h1 h2].';n = length(A1);E = eye(n -1);
Q =[1 0 0;0 1 0;61.74  -4.9 9.8];Q1 = inv(Q);A = Q * A1 * Q1;A11 =[A(1:2,1:2)];
A21 =[A(3,1:2)];eq = collect(det(s * E -(A11 - H * A21)),s);eqq = vpa(eq,4),
```

程序运行后得到

```
eqq = s^2 +(55.84 * h1 -.5000 +57.29 * h2) * s -388.9 * h1 +6.300 +55.84 * h2
```

③ 根据系统降维观测器要求的极点 $\lambda_{1,2}=-3\pm j4$，行列式的值应满足

$$\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}_{21})]=(s+3-j4)(s+3+j4)=s^2+6s+25$$

④ 对比以上两式的右端，即可用以下 MATLAB 语句求出 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$:

```
clear;syms h1 h2;
[h1,h2] = solve('55.84 * h1 -.5 +57.29 * h2 =6','-388.9 * h1 +6.3 +55.84 * h2 =25','h1,h2');
h11 = vpa(h1,4),h21 = vpa(h2,4),
```

程序运行后得到 $\lambda_{1,2}=-3\pm j4$ 时的 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.02789\\0.1406\end{bmatrix}$。

⑤ 给出以下调用自编函数 reduest. m 的程序解算系统可观性并设计降维状态观测器。

```
clear;A1 =[0 1 0;0 0 1; -0.098 0.006  -0.42];B1 =[0;0;1];
C1 =[61.74  -4.9 9.8];D1 =0;Q =[1 0 0;0 1 0;61.74  -4.9 9.8];
H =[ -0.02789 0.1406].';[AHAW,BHBU,AHAY] = reduest(A1,B1,C1,D1,Q,H);
```

程序运行后得到降维状态观测器动态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}1.5574 & 2.5978\\ -14.1512 & -7.5551\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}0.2733\\ -1.3779\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}0.2962\\ -0.4362\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}-0.02789\\ 0.14060\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\end{cases}$$

⑥ 将 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 变换回到 $\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}$ 状态空间，计算 $\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \overleftarrow{x}_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$。

```
clear;Q=[1 0 0;0 1 0;61.74  -4.9 9.8];
n=size(Q,1);E=eye(n-1);R=inv(Q)*[E;0 0],
H=[ -0.02789;0.1406];S=inv(Q)*[H;1],
```

程序运行后得到 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -6.3 & 0.5\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0279\\ 0.1406\\ 0.3480\end{bmatrix}$，那么

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \overleftarrow{x}_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -6.3 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.0279\\ 0.1406\\ 0.3480\end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

9）绘制带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与降维状态观测器的系统模型 sx2L2004c. mdl，如图 20-26 所示，并对其进行仿真。

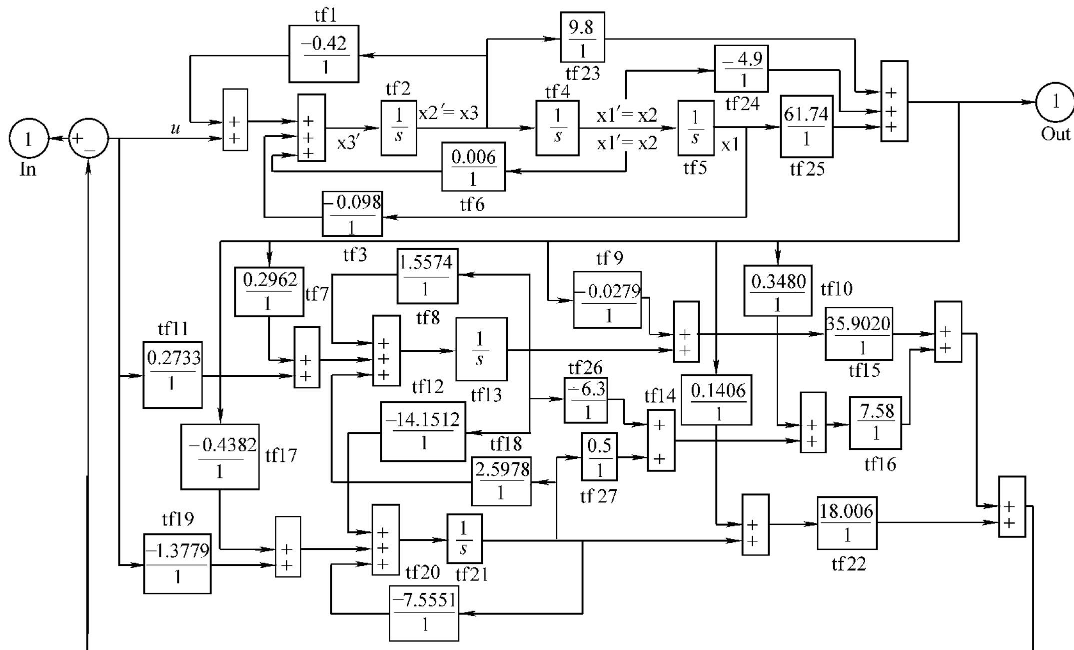


图 20-26　带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与降维状态观测器的系统模型 sx2L2004c. mdl

用带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与降维状态观测器的系统模型 sx2L2004c. mdl 绘制单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod2('sx2L2004c');sys = ss(A,B,C,D);
step(sys),grid;[y,t] = step(sys);perf(2,y,t);
```

程序运行后得到带状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与降维状态观测器系统的单位阶跃响应曲线与图 20-24 也相差无几。说明系统不仅稳定，而且性能指标满足题目要求，即 $\sigma\% = 13.4047\% < 15\%$、$t_s = 2.7452\text{s} < 3\text{s}$。

本题运算说明：①基于状态空间模型的极点配置不需要附加校正装置，是改变系统性能指标的简单可行的重要技术措施。②全维状态观测器与降维状态观测器对系统的响应不起什么作用。③系统模型 sx2L2004a. mdl、sx2L2004b. mdl、sx2L2004c. mdl 三者阶跃响应曲线的特征、形状都与图 20-24 基本相同，响应指标数据也非常接近，都使原发散振荡的不稳定系统变成性能指标优良的稳定系统。④用模型图绘制阶跃响应曲线的程序特别简单方便。

【毕业设计实训 20-5】　单闭环直流调速系统设计

单闭环直流调速系统设计的目的：通过设计，掌握单闭环直流调速系统的稳态参数计算、系统的稳定性分析，用 MATLAB 软件工具对系统进行动态校正即作调节器设计与对系统进行仿真的步骤与方法。

单闭环直流调速系统设计的知识准备：复习单闭环控制的直流调速系统。

1. 已知条件

已知晶闸管—直流电机单闭环调速系统（V－M 系统）的结构图如图 20-27 所示。图中直流电机的参数：$P_{nom} = 10\text{kW}$，$n_{nom} = 1000\text{r/min}$，$U_{nom} = 220\text{V}$，$I_{nom} = 55\text{A}$，电枢电阻 $R_a = 0.5\Omega$，V－M 系统主电路总电阻 $R = 1\Omega$，V－M 系统电枢回路总电感 $L = 16.73\text{mH}$，系统运动部分飞轮力矩 $GD^2 = 10\text{N}\cdot\text{m}^2$，测速发电机为永磁式，ZYS231/110xi 型，三相桥式整流触发装置的放大系数 $K_s = 44$，其平均失控时间 $T_s = 0.00167\text{s}$，生产机械要求调速范围 $D = 10$，静差率 $s \leqslant 5\%$；若给定信号 $U_n^* = 12\text{V}$ 时 $n = n_{nom} = 1000\text{r/min}$。

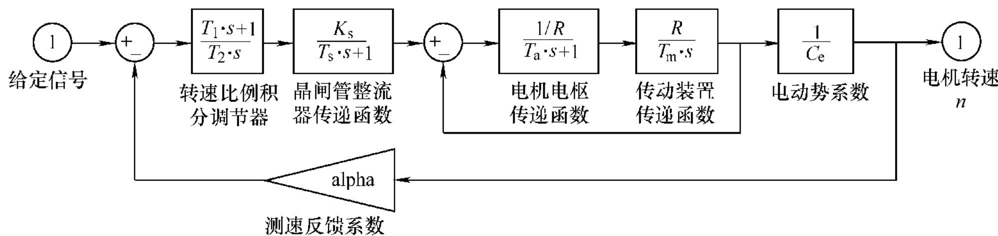


图 20-27　转速单闭环调速系统的结构图

2. 设计要求

1）设计转速调节器，使校正后相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 60°$；剪切频率 $\omega_c \geqslant 40.0\text{rad/s}$；超调量 $\sigma\% \leqslant 10\%$；调节时间 $t_s \leqslant 0.5\text{s}$。

2）在转速调节器基础上添加转速微分负反馈，使系统超调量 $\sigma\% \leqslant 5\%$；相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 70°$；调节时间 $t_s \leqslant 0.5\text{s}$。

3. 设计内容

（1）稳态参数计算

1）额定负载时调速系统的稳态速降：$\Delta n_d = \dfrac{n_{nom}}{D(1-s)} \leqslant 5.2632\text{r/min}$

2）电机在额定磁通下的电动势转速比：$C_e = \dfrac{U_{nom} - I_{nom}R_a}{n_{nom}} = 0.1925\text{V}\cdot\text{min/r}$

3）与稳态速降相应的系统开环放大系数：$K = \dfrac{I_{nom}R}{C_e \Delta n_d} - 1 \geqslant 53.2853$，取 $K = 53.3$。

4）计算测速反馈系数。

对单闭环调速系统有静态结构图，如图 20-28 所示。

根据自动控制理论有如下方程组

$\begin{cases} U_n = K \cdot \Delta U_n \\ U_n^* - U_n = \Delta U_n \end{cases}$ 代入已知条件，得到 $\begin{cases} U_n = 53 \cdot 3\Delta U_n \\ 12 - U_n = \Delta U_n \end{cases}$

解此方程组得

$U_n = 11.78\text{V}$；$\alpha = \dfrac{U_n}{n_{nom}} = 0.01178\text{V}\cdot\text{min/r}$

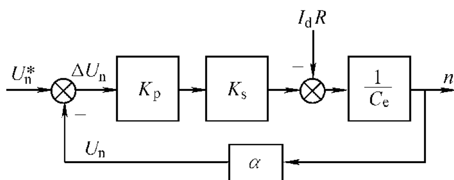


图 20-28 单闭环调速系统静态结构图

5）计算运算放大器的放大系数并设计比例放大器的参数。$K_p = \dfrac{KC_e}{\alpha K_s} \geqslant 19.7899$，取 $K_p = 20$。

6）电机在额定磁通下的转矩电流比：$C_m = \dfrac{30}{\pi}C_e = \dfrac{30}{\pi} \times 0.1925\text{N}\cdot\text{m/A} = 1.8382\text{N}\cdot\text{m/A}$。

7）电机电枢回路电磁时间常数：$T_a = \dfrac{L}{R} = 0.0167\text{s}$。

8）电机拖动系统机电时间常数：$T_m = \dfrac{GD^2R}{375C_eC_m} = 0.0754\text{s}$。

（2）绘制校正前系统动态模型图

绘制校正前系统的 Simulink 动态模型，如图 20-29 所示。

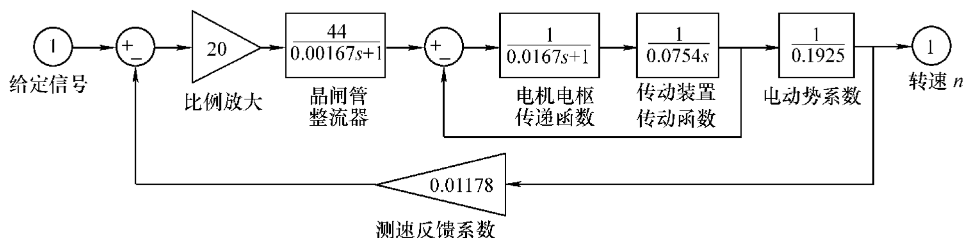


图 20-29 校正前系统的 Simulink 动态模型 sx2L2005a. mdl

（3）稳定性分析

根据自动控制原理，用代数稳定判据、Lienard – Chipard 稳定判据、根轨迹图法、阶跃响应曲线法、Bode 图法、Nyquist 曲线法都可以对控制系统的稳定性做出判断。

1）用代数稳定判据判稳。

① 由系统的 Simulink 动态模型用函数 linmod( )求传递函数。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod('sx2L2005a');
s0=ss(A,B,C,D);s1=tf(s0),
```

程序运行后得系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{2.174e009}{s^3+658.7s^2+3.665e004s+2.608e007}$$

② 求系统闭环特征方程的根。

```
clear;P=[1 658.7 3.665e004 2.608e007];roots(P),
```

程序运行后得到闭环特征方程有两个根的实部为正，故系统闭环不稳定。

2）用阶跃响应曲线法判稳。

由系统闭环传递函数绘制校正前系统单位阶跃响应曲线。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod('sx2L2005a');
s0=ss(A,B,C,D);s1=tf(s0);t=0:0.0001:1;
step(s1,t),
```

程序运行后，绘制校正前系统单位阶跃响应曲线，如图 20-30 所示。由图可见，闭环系统单位阶跃响应曲线是发散的振荡，系统不稳定(与上述结论一致)。

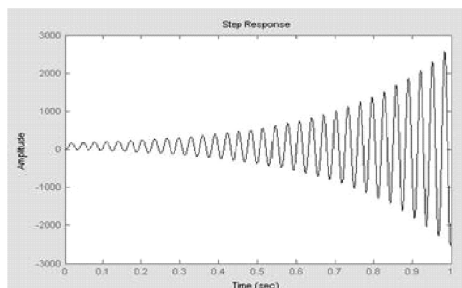


图 20-30　校正前系统闭环单位阶跃响应曲线

3）用 Bode 图法判稳。

① 创建校正前系统开环 Simulink 动态模型 sx2L2005b.mdl，如图 20-31 所示。

② 绘制开环系统 Bode 图。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod('sx2L2005b');
s0=ss(A,B,C,D);s1=tf(s0);margin(s1),
```

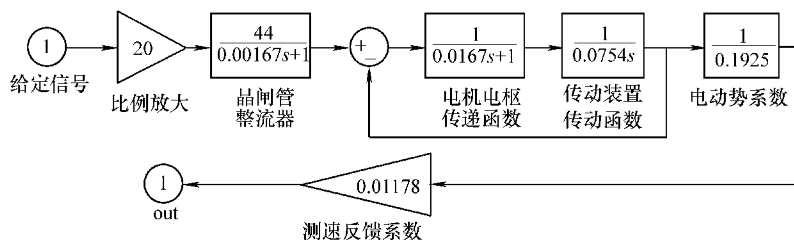


图 20-31　校正前系统开环模型 sx2L2005b.mdl

程序运行后绘制未校正开环 Bode 图，如图 20-32 所示。由图可见，相角稳定裕度与幅值稳定裕度均为负值，即闭环系统是不稳定的（与上述结论一致）。

（4）动态校正设计

根据给出的系统性能指标，进行调节器校正设计。为了进行串联校正，仍然使用校正前系统开环 Simulink 动态模型 sx2L2005b.mdl 计算校正器传递函数。

调用自编函数 lagc.m 求校正器。

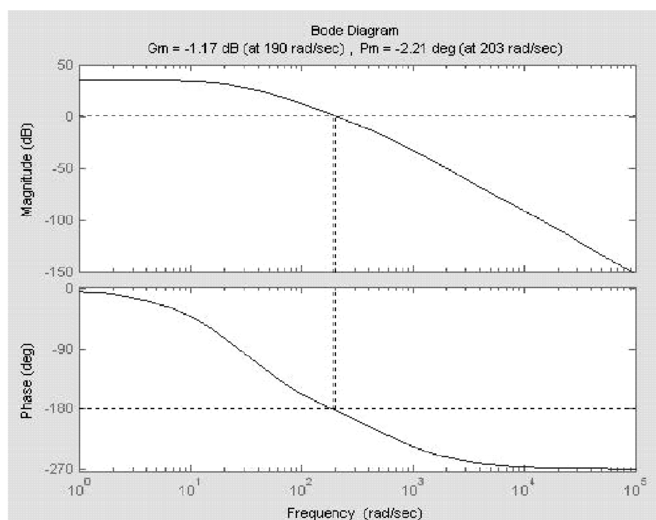


图 20-32 未校正系统开环 Bode 图

```
clear;[A,B,C,D]=linmod('sx2L2005c');s0=ss(A,B,C,D);
sope=tf(s0);wc=40;[Gc]=lagc(2,sope,[wc]),
```

程序运行后得到校正器传递函数 $G_c(s)=\dfrac{0.25s+1}{4.221s+1}$。

（5）动态校正后系统 MATLAB 仿真

1）创建带转速调节器的单闭环直流调速系统模型 sx2L2005c. mdl。当给定信号为 U_n^* = 12V 时，模型 sx2L2005c1. mdl 如图 20-33 所示。

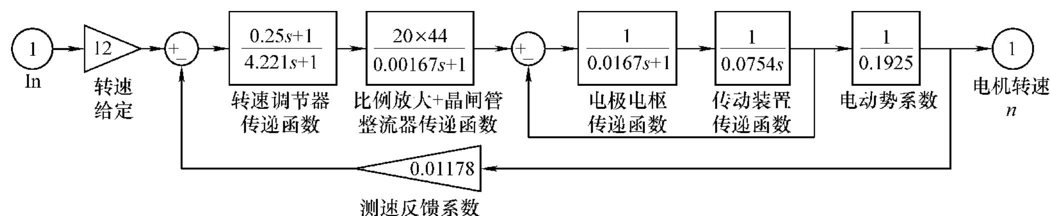


图 20-33 带转速调节器的单闭环直流调速系统模型 sx2L2005c1. mdl

2）对带转速调节器的系统进行阶跃响应仿真。

```
clear;[A,B,C,D]=linmod('sx2L2005c1');
s0=ss(A,B,C,D);s1=tf(s0);t1=0:0.0001:4;
step(s1,t1),grid;
```

程序运行后得到系统阶跃响应如图 20-34 所示，基本不超调，调节时间 $t_s<0.5$s。

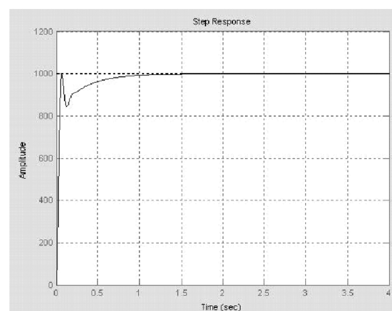


图 20-34 转速调节器系统阶跃响应

3）绘制带转速调节器开环系统的 Bode 图。

① 将模型 sx2L2005c. mdl 负反馈外环断开即为系统开环模型 sx2L2005d. mdl，如图 20-35 所示。

② 绘制带转速调节器开环系统的 Bode 图，求频域

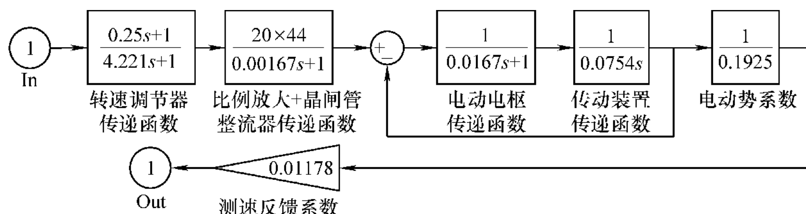


图 20-35　带转速调节器开环系统模型 sx2L2005d. mdl

性能指标。

```
clear;[A,B,C,D] = linmod('sx2L2005d');
s0 = ss(A,B,C,D);s1 = tf(s0);margin(s1),
```

程序运行后，绘制 Bode 图，如图 20-36 所示，在图上就附有经计算的频域性能指标。

模稳定裕度：$L_h = 23.3\text{dB}$　　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = 185\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma = 62°$　　　剪切频率：$\omega_c = 40.2\text{rad/s}$

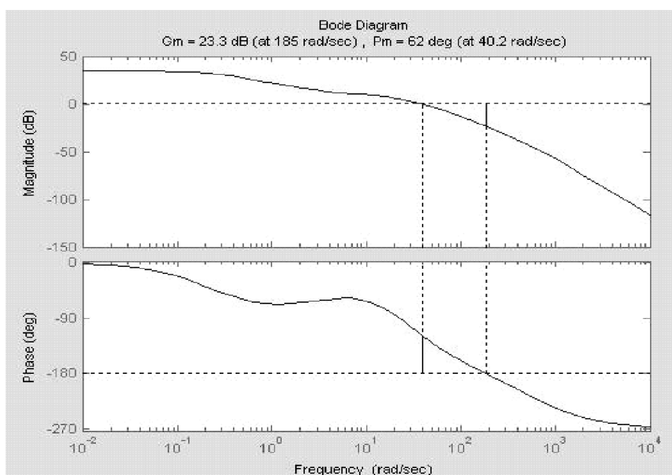


图 20-36　带转速调节器开环系统 Bode 图

(6) 试探寻优确定转速微分负反馈环节

试探寻优创建带转速微分负反馈的调速系统模型 sx2L2005e. mdl，如图 20-37 所示。

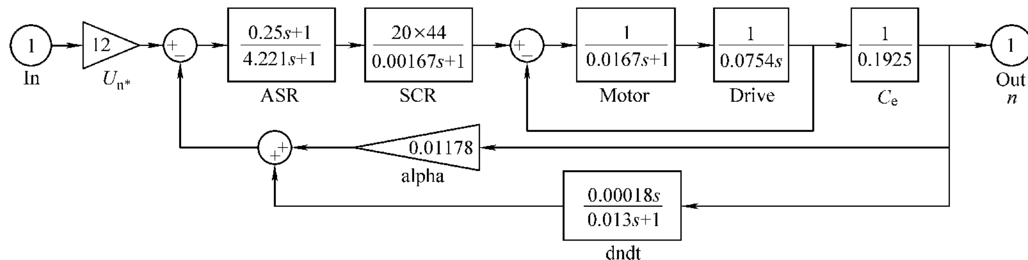


图 20-37　带转速微分负反馈的调速系统模型 sx2L2005e. mdl

(7) 转速微分负反馈调速系统仿真

1) 对带转速微分负反馈的调速系统模型 sx2L2005e. mdl 进行阶跃响应仿真。

```
clear;[A,B,C,D]= linmod('sx2L2005e');
```

```
s0 = ss(A,B,C,D);s1 = tf(s0);t = 0:0.001:3;
step(s1,t),grid;
```

程序运行后绘制转速微分负反馈系统阶跃响应曲线，如图 20-38 所示。由图可见，系统没超调，调节时间 $t_s < 0.5s$。

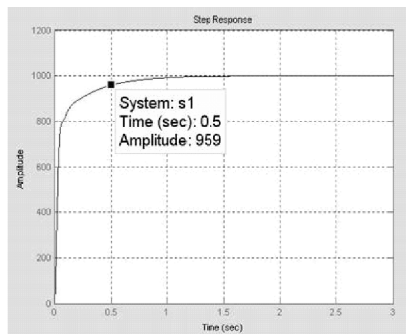


图 20-38　转速微分负反馈系统阶跃响应曲线

带转速微分负反馈的单环系统阶跃响应显示，曲线近似理想的阶跃方波，填充系数约为 1，快速性能也不差，总体控制接近于最佳效果，是一种值得关注、推广介绍的控制策略。

2）对带转速微分负反馈的调速系统开环模型 sx2L2005f. mdl（见图 20-39）进行频率响应仿真。

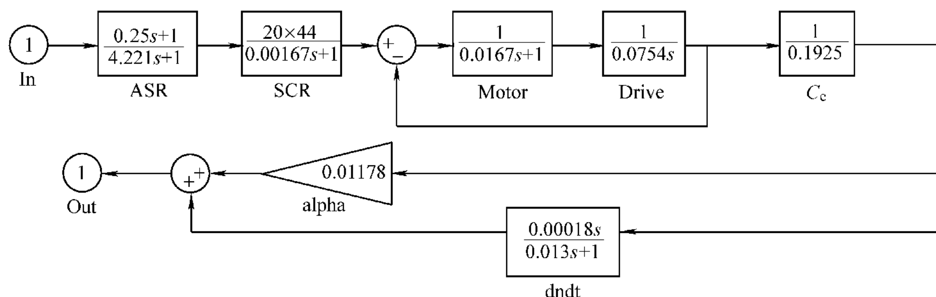


图 20-39　带转速微分负反馈调速系统开环模型 sx2L2005f. mdl

绘制转速微分负反馈调速系统的 Bode 图，求频域性能指标。

```
clear; [A, B, C, D]= linmod('sx2L2005f');
s0 = ss(A, B, C, D); s1 = tf(s0); margin(s1),
```

程序运行后，绘制 Bode 图，如图 20-40 所示，在图上就附有经计算的频域性能指标。

模稳定裕度：$L_h = 21.9\text{dB}$　　　$-\pi$ 穿越频率：$\omega_g = 245\text{rad/s}$

相角稳定裕度：$\gamma = 70.2°$　　　剪切频率：$\omega_c = 52.9\text{rad/s}$

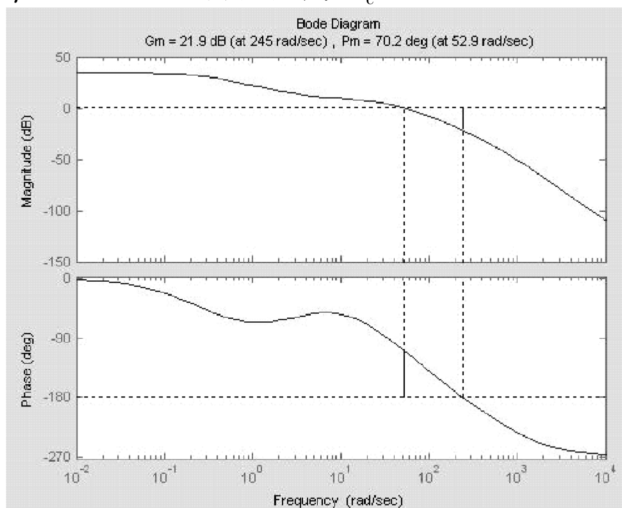


图 20-40　转速微分负反馈调速开环系统 Bode 图

3）绘制扰动信号作用点处的单位阶跃扰动与单位冲激扰动模型，并绘制响应曲线，参见【例 13-2】。

4）计算在图中扰动信号作用点施加单位阶跃扰动信号时最大动态降落及其降落时间、恢复时间，参见【例 13-2】。

5）用根轨迹设计器对系统进行零极点设计，使系统的性能得以提高，参见【例 13-1】。

（8）转速调节器的有源校正实现

参见【例 12-4】，对调节器的有源校正实现进行参数计算。

【毕业设计实训 20-6】　双闭环直流调速系统数学模型与 SimPowerSystems 模型仿真

设计仿真实训的目的：通过设计，掌握双闭环直流调速系统的基本参数计算、电流环与转速环参数计算的方法与步骤，创建双闭环调速系统数学模型与 SimPowerSystems 模型，并对两种系统模型进行仿真。

设计仿真实训的知识准备：复习直流电机 SimPowerSystems 模型，双闭环及其带转速微分负反馈控制直流调速系统的 MATLAB 计算及仿真。

1. 已知条件

已知晶闸管 – 直流电机双环调速系统（V – M 系统）Simulink 动态模型如图 13-20 所示。

其中直流电动机 Z2 – 61 铭牌参数：$P_{nom}=10kW$、$n_{nom}=1500r/min$、$U_{nom}=220V$、$I_{nom}=53.5A$、$R_a=0.31\Omega$。选择三相整流桥。

2. 设计要求

双闭环系统转速超调量 $\sigma\% \leqslant 40\%$、带转速微分负反馈双闭环系统转速超调量 $\sigma\% \leqslant 8\%$、调节时间 $t_s \leqslant 0.5s$。

3. 控制系统设计及仿真内容

（1）多闭环数学模型系统设计

1）按【例 13-2】对直流电机 Z2 – 61 设计双环调速系统，计算参数如下：$R=0.81\Omega$、$T_m=0.27s$、$T_a=0.028s$、$C_e=0.1356V \cdot min/r$、$\alpha=0.008V \cdot min/r$、$\beta=0.1246V/A$、$K_p=45.7722$、$T_L=70N \cdot m$、$R/C_e/T_m=22.124$。选择三相整流桥参数：$R_{rec}=0.5\Omega$、$K_s=30$、$T_s=0.00167s$、$T_{on}=0.01s$、$T_{oi}=0.002s$、$T_{\Sigma i}=0.00367s$、$T_{\Sigma n}=0.0173s$。若 $U_n^*=12V$ 时 $n=n_{nom}=1500r/min$。对系统静态要求：$D=20$、$s \leqslant 5\%$。$W_{ACR}(s)=K_{pi}+\frac{1}{\tau s}=0.8266+\frac{1}{0.0339s}=\frac{0.028s+1}{0.0339s}$、$W_{ASR}(s)=24.7249+\frac{1}{0.0035s}=\frac{0.0867s+1}{0.0035s}$。

2）创建双环直流调速系统数学模型的 Simulink 动态结构图（见图 20-41）并仿真。

按自动控制原理与自动控制系统理论计算的模型 sx2L2006a. mdl，其阶跃响应仿真曲线如图 20-42 所示。其转速超调量 $\sigma\% \leqslant 40\%$，但仍是较大数值。若系统转速超调量要求更高，最简便、有效的措施就是添加转速微分负反馈控制。

3）创建带转速微分负反馈双环调速系统的动态模型（见图 20-43）并仿真。

满载带转速微分负反馈的双环调速系统系统的动态模型 sx2L2006b. mdl，其阶跃响应仿真曲线如图 20-44 所示。其转速超调量 $\sigma\% < 5\%$，调节时间 $t_s < 0.5s$。这样的阶跃响应性能

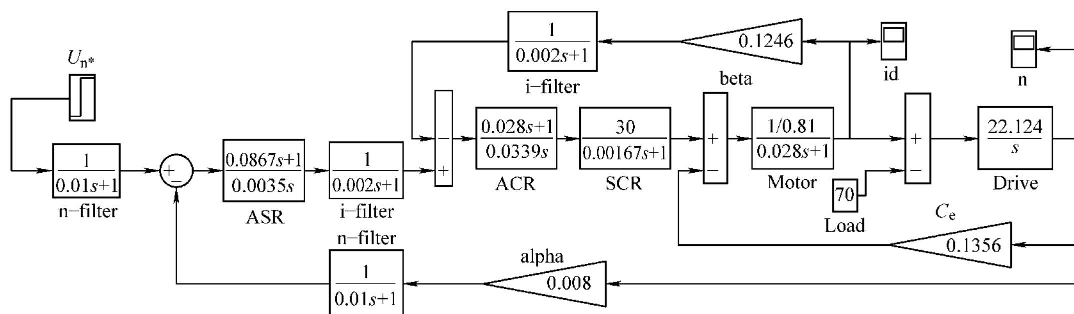


图 20-41　满载双环直流调速数学模型系统的动态结构图模型 sx2L2006a. mdl

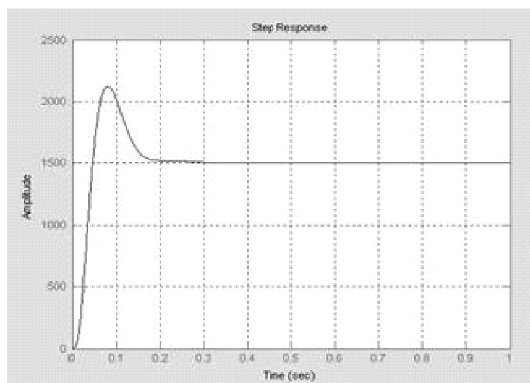


图 20-42　模型 sx2L2006a. mdl 的阶跃响应

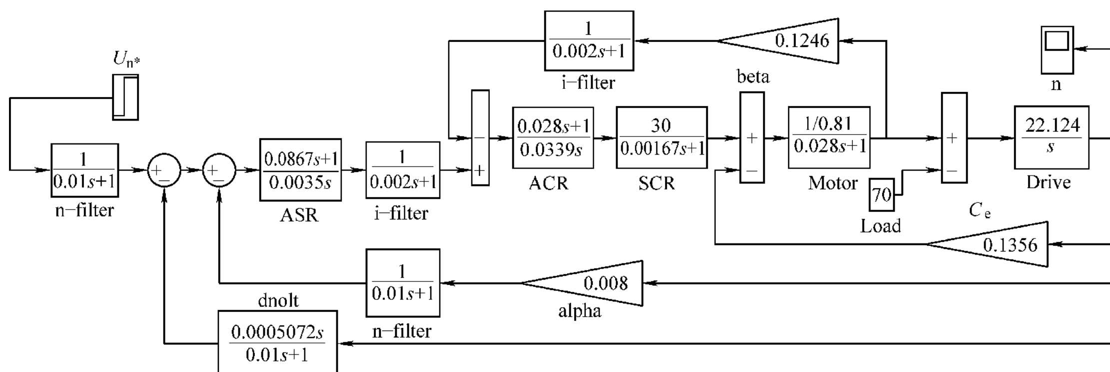


图 20-43　带转速微分负反馈的双环调速系统的动态模型 sx2L2006b. mdl

非常优良，足以说明添加转速微分负反馈控制的优越性能。

（2）直流电机从数学模型到 SimPowerSystems 模型的转换

为了说明直流电机数学模型与 SimPowerSystems 模型的联系与区别，还要重新复习直流电机的数学模型。

1）直流电机的数学模型。

额定励磁下他励直流电机的数学模型是基于电路方程与牛顿动力学定律。图 20-45 是额

定励磁下他励直流电机的等效电路[6]。

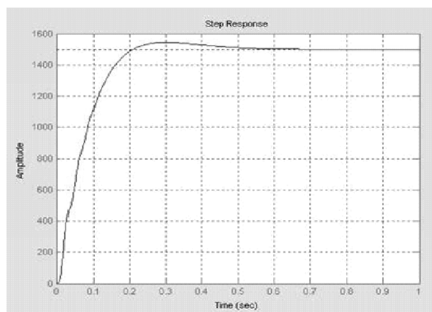


图 20-44　模型 sx2L2006b. mdl 的阶跃响应曲线

计及电机拖动关系式[6] $E=C_e n$、$C_m=\dfrac{30}{\pi}C_e$、$T_e-T_L=\dfrac{GD^2}{375}\cdot\dfrac{dn}{dt}$、$T_e=C_m I_d$、$I_{dl}=T_L/C_m$、$T_m=\dfrac{GD^2R}{375C_eC_m}$、$T_a=\dfrac{L}{R}$，列写直流电机电枢电路动态过程的微分方程与电机拖动系统动态过程的微分方程如下。

$$\begin{cases}U_{d0}-E=R\left(I_d+T_a\dfrac{dI}{dt}\right)\\ I_d-I_{dl}=\dfrac{T_m}{R}\cdot\dfrac{dE}{dt}\end{cases}\tag{20-1}$$

式中，U_{d0}为直流电机端电压；E 为额定励磁下感应电动势；R 为电枢电路总电阻；I_d 为电枢电路电流；T_a 为电枢回路电磁时间常数；I_{dl}为负载电流；T_m 为电机拖动系统机电时间常数。

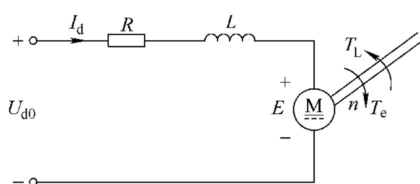


图 20-45　直流电机的等效电路

在零初始条件下，取式（20-1）两端的 Laplace 变换后整理得到

$$\begin{cases}\dfrac{I_d(s)}{U_{d0}(s)-E(s)}=\dfrac{1/R}{T_a s+1}\\ \dfrac{E(s)}{I_d(s)-I_{dl}(s)}=\dfrac{R}{T_m s}\end{cases}\tag{20-2}$$

按自动控制原理将式（20-2）绘制成动态结构图[6]如图 20-46 所示，这正是图 20-41 中的电机与驱动装置的特性描述。

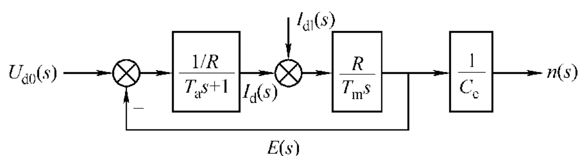


图 20-46　额定励磁下他励直流电机的数学模型

图 20-46 模型仅有 4 个参数：R、T_a、T_m、C_e（额定磁通下电机电动势转速比）。由式（20-2）与图 20-46 可见，直流电机数学模型就是电机及其拖动负载的电路方程与牛顿动力学方程结合的图形化描述。其中忽略了非线性因素，且不含电机内部磁因素，还没有考虑电机内电与磁之间的关联，是一近似模型。

2）直流电机的 SimPowerSystems 模型。

鼠标右键点击直流电机图标，在弹出的菜单中选择【Look Under Mask】菜单项，就得到 MATLAB 系统提供的直流电机 SimPowerSystems 模型[21]如图 20-47 所示。图中 Ra、La 与 Rf、Lf 分别为电枢与励磁回路的电阻与电感，Mechanics 模块用来联系电枢与励磁回路，间接描述电机电路、磁路与负载的关联，并计算电机转矩、转速、电枢与励磁电流。

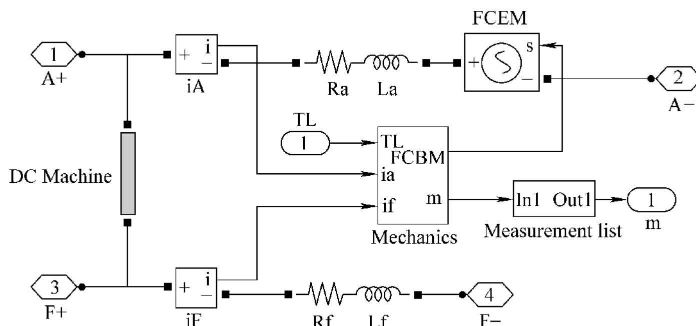


图 20-47　直流电机模型

图 20-47 中 Mechanics 模块结构如图 20-48 所示。细观图 20-48 可知 MATLAB 系统提供的关系式：$J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=T_{\mathrm{e}}-\mathrm{sgn}(\omega)T_{\mathrm{L}}-B_{\mathrm{m}}\omega-T_{\mathrm{f}}$、$K_{\mathrm{E}}=i_{\mathrm{f}}\dfrac{L_{\mathrm{af}}}{20\mathrm{e}-6s+1}$、$L_{\mathrm{af}}\approx\dfrac{K_{\mathrm{E}}}{i_{\mathrm{f}}}E=K_{\mathrm{E}}\omega=K_{\mathrm{E}}\dfrac{2\pi}{60}n=C_{\mathrm{e}}n$、$K_{\mathrm{E}}=\dfrac{60}{2\pi}C_{\mathrm{e}}$、$T_{\mathrm{e}}=K_{\mathrm{T}}i_{\mathrm{a}}$、$K_{\mathrm{E}}=K_{\mathrm{T}}$。

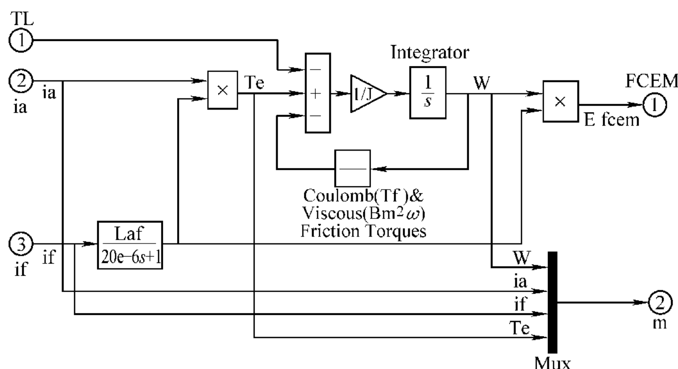


图 20-48　Mechanics 模块结构

由图 20-47 和图 20-48 可以看到，与数学模型不同，直流电机 SimPowerSystems 模型是 MATLAB 系统提供的，该模型考虑了电机电枢与励磁回路，还顾及电机电路、磁路与负载的关联，其中也忽略了非线性因素，当然也是一近似模型。

直流电机的数学模型与 SimPowerSystems 模型都是近似模型，两者都近似描述直流电机动态规律，但是两者不能等效或互换。

3）直流电机的 SimPowerSystems 模型参数。

鼠标左键双击直流电机图标弹出其参数设置对话框如图 3-13 所示。

以下对直流电机 Z2 −61 计算其 SimPowerSystems 模型参数。

① 估算电枢电阻 R_{a}[31]。

$$R_{\mathrm{a}}=\frac{1}{2}\frac{U_{\mathrm{nom}}I_{\mathrm{nom}}-P_{\mathrm{nom}}\times10^{3}}{I_{\mathrm{nom}}^{2}}=0.3092\Omega，取 R_{\mathrm{a}}=0.31\Omega$$

② 估算电枢电感 L_{a}[30]。

$$L_a = K_D \frac{U_{nom}}{2pn_{nom}I_{nom}} \times 10^3 = 0.0069\text{H}$$

③ 励磁绕组电阻 R_f 与电感 L_f。

在电机产品样本手册[35]上查得 Z2－61 额定励磁参数 $U_f=220\text{A}$ 与 $I_f=1.135\text{A}$，算得励磁绕组电阻 $R_f=U_f/I_f=193.8326\Omega$。

对中小型电机，励磁电感在恒定磁场控制时取为“0”，即 $L_f=0$。

④ 计算额定磁通下电机电动势转速比 C_e。

$$C_e = \frac{U_{nom} - I_{nom}R_a}{n_{nom}} = 0.1356\text{V} \cdot \text{min/r}。$$

⑤ 计算电机额定磁通下的转矩电流比 K_E。

$$K_E = \frac{60}{2\pi}C_e = 1.2949。$$

⑥ 计算电枢绕组与激磁绕组的互感 L_{af}。

$$L_{af} = K_E / I_f = 1.1409\text{H}。$$

⑦ 在电机产品样本手册[35]上查得 Z2－61 转动惯量 $J=0.56\text{kg}\cdot\text{m}^2$。

⑧ 额定负载转矩。

$$T_L = 9.55C_eI_{nom} = 69.2814\text{N}\cdot\text{m}，取\ T_L = 70\text{N}\cdot\text{m}。$$

将以上参数填入直流电机参数设置对话框如图 20-49 所示。

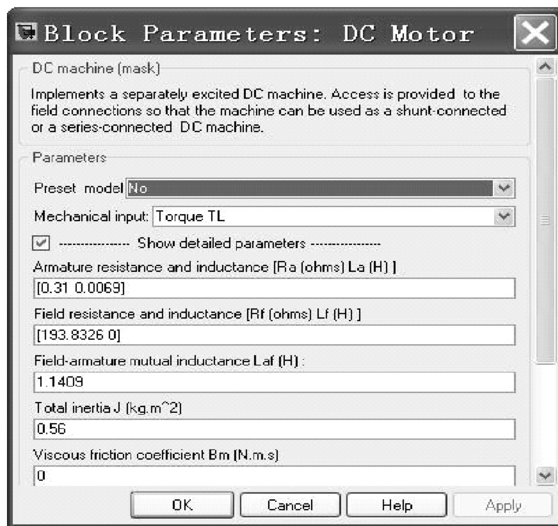


图 20-49　直流电机参数设置对话框

（3）双闭环 SimPowerSystems 模型系统及仿真

创建双闭环系统 SimPowerSystems 模型如图 20-50 所示。对模型图说明如下。

1）关于 Z2－61 直流电机，其 SimPowerSystems 模型参数均设置在对话框里。

2）图中电流反馈及其电流调节器与数学模型完全一样。

3）图中转速反馈及其速度调节器与数学模型完全一样。

4）图中三相整流桥与数学模型的有很大不同。整流装置数学模型仅用比例环节与惯性

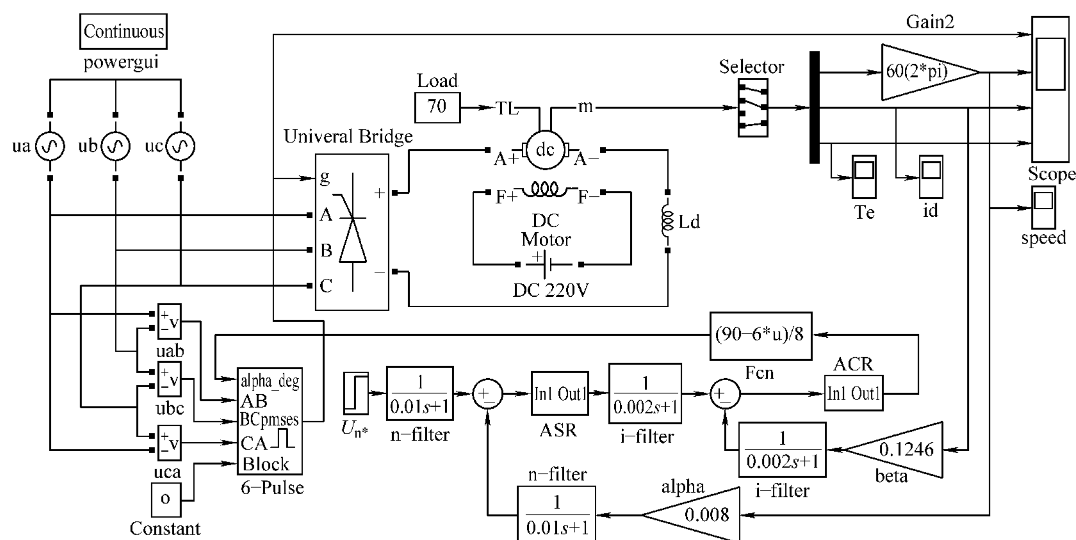


图 20-50　双闭环系统满载时 SimPfowerSystems 模型 sx2L2006c. mdl

环节加以描述，即$\dfrac{K_s}{T_s s+1}$。而 SimPowerSystems 模型中，触发装置与整流器是两个模块，不能与整流装置的数学模型完全对应。触发装置的移相控制特性如图 20-51 所示。其数学式为 $\alpha=90°-\dfrac{90°-\alpha_{min}}{U_{cmax}}U_c$，取 $\alpha_{min}=30°$、$U_{cmax}=10V$，因此 $\alpha=90°-6U_c$。为了将整流装置数学模型的比例系数 K_s 加以考虑，移相控制特性数学表达式修改为 $\alpha=k(90°-6U_c)$。图 20-50 中，取 $k=1/8$。

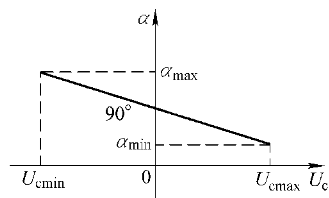


图 20-51　移相控制特性

模型 sx2L2006c. mdl 仿真曲线如图 20-52 所示。由图可知，转速超调量 $\sigma\%<8\%$，调节时间 $t_s<0.5s$。这样的阶跃响应性能还是非常优良。

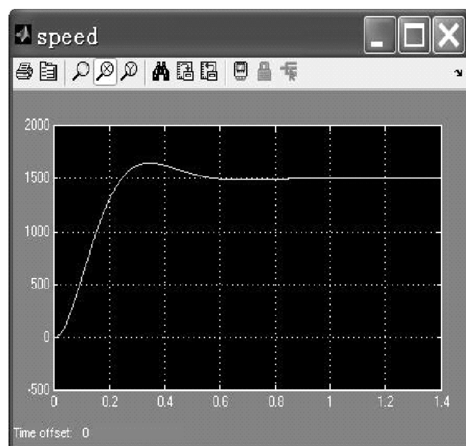


图 20-52　模型 sx2L2006c. mdl 仿真曲线

附录　自编函数

本目录以自编函数使用先后顺序为序，给出该函数第一次使用的例题号，并列出该函数的总序号与本章自编函数的序号，供查阅。

总序号	本章序号	函数名	首用例题号
1	1. 1	sunn. m	【例 1-1】
2	1. 2	recisum. m	【例 1-2】
3	1. 3	fibonaci. m	【例 1-3】
4	1. 4	leapyear. m	【例 1-4】
5	1. 5	rigtri. m	【例 1-6】
6	1. 6	pro. m	【例 1-7】
7	4. 1	ssto2. m	【例 4-6】
8	4. 2	tfto2. m	【例 4-7】
9	4. 3	zpkto2. m	【例 4-7】
10	5. 1	zetosi. m	【例 5-27】
11	5. 2	trtp. m	【例 5-27】
12	5. 3	can. m	【例 5-27】
13	5. 4	cats. m	【例 5-27】
14	5. 5	sitoze. m	【例 5-28】
15	5. 6	perf. m	【例 5-33】
16	6. 1	pzmapp. m	【例 6-5】
17	6. 2	rlocuss. m	【例 6-5】
18	6. 3	bod. m	【例 6-7】
19	6. 4	stepp. m	【例 6-7】
20	7. 1	Kpva. m	【例 7-1】
21	7. 2	dyerr. m	【例 7-3】
22	7. 3	insteerr. m	【例 7-5】
23	7. 4	osteerr. m	【例 7-8】
24	7. 5	plottt. m	【例 7-10】
25	11. 1	iniendz. m	【例 11-6】
26	11. 2	phiRz. m	【例 11-8】
27	11. 3	seriz. m	【例 11-9】
28	11. 4	zohz. m	【例 11-11】
29	11. 5	Dzw. m	【例 11-14】
30	11. 6	Kpvaz. m	【例 11-17】

（续）

总序号	本章序号	函数名	首用例题号
31	11. 7	leastbeat. m	【例 11-22】
32	12. 1	sitoga. m	【例 12-1】
33	12. 2	gatosi. m	【例 12-1】
34	12. 3	tstoom. m	【例 12-2】
35	12. 4	chec. m	【例 12-3】
36	12. 5	leadc. m	【例 12-3】
37	12. 6	lagc. m	【例 12-4】
38	12. 7	rtloc. m	【例 12-6】
39	12. 8	rlagc. m	【例 12-7】
40	12. 9	kttau. m	【例 12-8】
41	12. 10	zn01. m	【例 12-8】
42	12. 11	cc01. m	【例 12-9】
43	12. 12	inmin01. m	【例 12-10】
44	12. 13	zn02. m	【例 12-11】
45	13. 1	closeK. m	【例 13-1】
46	13. 2	dist. m	【例 13-2】
47	13. 3	prxd1. m	【例 13-5】
48	13. 4	prxd2. m	【例 13-6】
49	14. 1	phi01. m	【例 14-4】
50	14. 2	phit01. m	【例 14-4】
51	14. 3	tran01. m	【例 14-6】
52	14. 4	cha01. m	【例 14-7】
53	14. 5	staeq. m	【例 14-8】
54	14. 6	lintra01. m	【例 14-10】
55	14. 7	lintra02. m	【例 14-11】
56	14. 8	vander. m	【例 14-15】
57	14. 9	jorsta. m	【例 14-16】
58	14. 10	contro. m	【例 14-17】
59	14. 11	consta. m	【例 14-19】
60	14. 12	outcon. m	【例 14-20】
61	14. 13	obser. m	【例 14-21】
62	14. 14	obssta. m	【例 14-23】
63	14. 15	stabak. m	【例 14-26】
64	14. 16	staest. m	【例 14-28】
65	14. 17	reduest. m	【例 14-29】
66	14. 18	lyaeq. m	【例 14-31】
67	15. 1	lqopti. m	【例 15-1】
68	15. 2	lqkalm. m	【例 15-6】
69	15. 3	lqgreg. m	【例 15-7】

【1-1.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM 】 计算1到n的自然数列$s=1+2+3+\cdots+n$前n项和的函数sunn.m，函数调用格式为

s = sunn(n)

其中输入参数n，即是要计算等差级数前多少项的和，输出参数s就是级数前n项的和。

```
function s = sunn(n)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM   sunn.m
i = 0;s(1)=0;
while i < = n
      s = s + i;
      i = i + 1;
end
disp('s'),disp(n),disp(' = '),disp(s),
```

【2-1.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM 】 由自然数列中每个自然数的倒数所组成的数列求和即计算$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}$的函数recisum.m，函数调用格式为

[s] = recisum(m)

其中输入参数m是倒数组成数列中的最大自然数。输出参数s就是级$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}$前$m$项的和。

```
function [s] = recisum(m)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM recisum.m
s = 0;reci = 1;n = 1;
while n < = m
      s = s + reci;
      n = n + 1;reci = 1/n;
end
disp('s(1 + ... + 1/'),disp(m),disp(')= '),disp(s),
```

【3-1.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 计算并列写前n个Fibonacci数的函数fibonaci.m，函数调用格式为

f = fibonaci(key,c,n,m)

其中输入参数$key=1$时，列写Fibonacci所有数，使c大于其最大一个Fibonacci数，在列写Fibonacci数的个数较少时使用，此时需输入$n=0$、$m=0$；当要计算Fibonacci数较大时，选$key=2$，输出参数n是计算的Fibonacci数的个数，列写出的是第m个Fibonacci数，$m\geqslant n$，此时需输入$c=0$。

```
function f = fibonaci(key,c,n,m)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM fibonaci.m
f = [1,1];
if key = = 1
   k = 1;
   while f(k)+f(k + 1) < c;
         f(k + 2)=f(k)+f(k + 1);
```

```
        k = k + 1;
    end
    f,
    return
elseif key = = 2
    for k = 3:n
        f(k)= f(k - 1)+ f(k - 2);
    end
    format long;f(m),
end
```

【4-1.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM 】 计算与确定某段年度区间内哪些年为闰年的函数 leapyear. m，函数调用格式为

```
leapyear(m,n)
```

其中输入参数 m 是年度区间段的下限，n 是年度区间段的上限。虽然无输出参数，但是函数运行后，直接给出年度区间段内为闰年的年份。

需要指出的是，对于人们最感兴趣或最有价值的年度区间段是 1900 ~ 2050 年。程序运行的结果，可以在互联网上的万年历中直接查对这 150 年区段内的闰年。

```
function leapyear(m,n)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM leapyear. m
syms year;
for year = m:n
     sign = 0;
     if rem(year,4)= = 0
         sign = sign + 1;
     end
     if rem(year,100)= = 0
         sign = sign - 1;
     end
     if rem(year,400)= = 0
         sign = sign + 1;
     end
     if sign = = 1
fprintf('%4d year is a leap year. \n',year)
     end
end
```

【5-1.5 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 计算以一直角边最长为 e（应是整数）的构成直角三角形的勾、股、弦的函数 rigtri. m，函数的调用格式为

```
[a,b,c] = rigtri(e)
```

其中输入参数 e 是一直角边的最长尺寸数（应是整数），输出参数 a、b、c 是构成直角三角形的勾、股、弦的尺寸数。

```
function [a,b,c] = rigtri(e)
```

```
% MATLAB FUNCTION PROGRAM rigtri. m
for a = 1 : e
    for b = (a + 1) : ((2 * e) * (2 * e) - a * a)
        p = round( sqrt( a * a + b * b) ) ;
        for c = p : p + 1
            if c * c = = a * a + b * b
                a; b; c;
                    disp('abc = '), disp([a, b, c]),
            end
        end
    end
end
```

【6-1.6 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 计算 $p = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times i \times \cdots \times n$ 即 $n!$ 的函数 pro. m，函数的调用格式为

```
p = pro(n)
```

其中输入参数 n 是连续自然整数连乘积的最后的数，输出参数 p 就是 $n!$。

```
function p = pro(n)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM   pro. m
i = 1; p = 1;
while i < n
    i = i + 1;
    p = p * i;
end
```

【8-4.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 将传递函数模型 $G(s)=\dfrac{num(s)}{den(s)}$转换成零极点模型 $G(s)=k\dfrac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$或状态空间模型 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Cx}(t)+\boldsymbol{Du}(t)\end{cases}$ 的函数 tfto2. m，函数调用格式为

```
G = tfto2(key, n, d)
```

其中输入参数 n 与 d 为传递函数分子、分母均按“s”的降幂排列的两个向量，输出参数当 $key = 1$ 时，即转换成零极点模型 $G(s)$；当 $key = 2$ 时，即转换成状态空间模型 $G(s)$。

```
function G = tfto2(key, n, d)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM tfto2. m
if key = = 1
   sys = tf(n, d);
   G = zpk(sys),
elseif key = = 2
   sys = tf(n, d);
   G = ss(sys),
end
```

【9-4.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 将零极点模型转换成传递函数模型 $G(s)=$

$\frac{num(s)}{den(s)}$或状态空间模型$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$的函数 zpkto2. m，函数调用格式为

```
G = zpkto2(key,z,p,k)
```

其中输入参数 z、p 与 k 为系统零点、系统极点与系统增益，输出参数当 $key=1$ 时，即转换成传递函数模型 $G(s)$；当 $key=2$ 时，即转换成状态空间模型 $G(s)$。

```
function G = zpkto2(key,z,p,k)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM zpkto2. m
if key = =1
    sys = zpk(z,p,k);
    G = tf(sys),
elseif key = =2
    sys = zpk(z,p,k);
    G = ss(sys),
end
```

【7-4.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　将状态空间模型$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$转换成传递函数模型 $G(s)=\frac{num(s)}{den(s)}$或零极点模型 $G(s)=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$的函数 ssto2. m，函数调用格式为

```
G = ssto2(key,A,B,C,D)
```

其中输入参数 A、B、C 与 D 为状态空间模型的四个矩阵，输出参数当 $key=1$ 时，即转换成传递函数模型 $G(s)$；当 $key=2$ 时，即转换成状态空间模型 $G(s)$。

```
function G = ssto2(key,A,B,C,D)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM ssto2. m
if key = =1
    sys = ss(A,B,C,D);
    G = tf(sys),
elseif key = =2
    sys = ss(A,B,C,D);
    G = zpk(sys),
end
```

【10-5.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　根据自动控制原理，由二阶系统的阻尼比 ζ 计算系统的超调量 $\sigma\%$ 的函数 zetosi. m，其调用格式为

```
[sigma] = zetosi(zeta)
```

其中输入参数 $zeta$ 是二阶系统的阻尼比 ζ，输出参数 $sigma$ 是计算出系统对应阻尼比 ζ 的超调量 $\sigma\%$。

```
function [sigma] = zetosi(zeta)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM zetosi. m
[sigma] = 2.7182^( - pi * zeta/(1 - (zeta)^2)^(1/2))
```

【11-5.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　根据自动控制原理，由二阶系统要求的阻尼

比ζ与自然振荡角频率ω_n计算系统响应上升时间t_r与峰值时间t_p的函数 trtp. m，其调用格式为

```
[trtp] = trtp(zeta,omegan)
```

其中输入参数 *zeta* 是系统要求的阻尼比ζ，*omegan* 是系统要求的自然振荡角频率ω_n。输出参数 *tr* 是上升时间t_r，*tp* 为系统响应的峰值时间t_p。

```
function [tr,tp] = trtp(zeta,omegan)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM trtp. m
tr = (pi - acos(zeta))/(omegan * sqrt(1 - zeta^2)),
tp = pi/(omegan * sqrt(1 - zeta^2)),
```

【12-5.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据自动控制原理[10]，由二阶系统要求的阻尼比ζ与误差带Δ计算系统响应振荡次数 N 的函数 can. m，其调用格式为

```
[N] = can(key,zeta,delta)
```

其中输入参数 *key* = 1 时，对应要求的误差带$\Delta = 5\%$；*key* = 2 时，对应要求的误差带$\Delta = 2\%$；*zeta* 是系统要求的阻尼比ζ。输出参数 N 为计算的系统响应振荡的次数 N。

```
function [N] = can(key,zeta,delta)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM can. m
if key = =1
    delta =0.05;
end
if key = =2
    delta =0.02;
end
    c = (sqrt(1 - zeta^2))/(2 * pi * zeta);
    d = log(1/(delta * sqrt(1 - zeta^2)));
    a = c * d;
    b = atan(sqrt(1 - zeta^2)/zeta)/(2 * pi);
    N = a + b,
    Nj = round(a + b),
```

【13-5.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据自动控制原理[10]，由二阶系统要求的阻尼比ζ、自然振荡角频率ω_n与误差带Δ计算系统响应的调节时间t_s的函数 cats. m，其调用格式为

```
[ts] = cats(key,zeta,omegan,delta)
```

其中输入参数 *key* = 1 时，对应要求的误差带$\Delta = 5\%$；*key* = 2 时，对应要求的误差带$\Delta = 2\%$；*zeta* 是系统要求的阻尼比ζ；*omegan* 是系统要求的自然振荡角频率ω_n。输出参数 *ts* 为计算的系统响应的调节时间t_s。

```
function [ts] = cats(key,zeta,omegan,delta)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM cats. m
if key = =1
    delta =0.05;
    ts = (3 + log(1/(1 - zeta^2)))/(zeta * omegan),
end
```

```
if key = =2
    delta =0.02;
    ts = (4 + log(1/(1 - zeta^2)))/(zeta * omegan),
end
```

【14-5.5 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据自动控制原理，由二阶系统的超调量 $\sigma\%$ 计算系统的阻尼比 ζ 的函数 sitoze.m，其调用格式为

```
[zeta] = sitoze(sigma)
```

其中输入参数 *sigma* 是二阶系统的超调量 $\sigma\%$，输出参数 *zeta* 是计算出系统对应超调量 $\sigma\%$ 的阻尼比 ζ。

```
function [zeta] = sitoze(sigma)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM sitoze.m
[zeta] = ((log(1/sigma))^2/((pi)^2 + (log(1/sigma))^2))^(1/2),
```

【15-5.6 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 求系统单位阶跃给定响应性能指标(超调量、峰值时间、调节时间)的函数 perf.m，其调用格式为

```
[sigma,tp,ts] = perf(key,y,t)
```

其中 *key* 用来选择调节时间的误差带，当 *key* =1 时表示选择 5% 误差带，当 *key* =2 时表示选择 2% 误差带。*y*、*t* 是对应系统阶跃响应的函数值与其对应的时间。函数返回的是阶跃响应超调量 *sigma*(即 σ)、峰值时间 *tp*(即 t_p)、调节时间 *ts*(即 t_s)。当阶跃响应为发散振荡时，该函数不适用。

```
function [sigma,tp,ts] = perf(key,y,t)
%  MATLAB FUNCTION PROGRAM perf.m
% Count sgma and tp
[mp,tf] = max(y);
cs = length(t);
yss = y(cs);
sigma = 100 * (mp - yss)/yss
tp = t(tf)
% Count ts
i = cs + 1;
n =0;
while n = =0,
    i = i - 1;
            if key = =1,
                if i = =1,
                    n =1;
                elseif y(i) >1.05 * yss,
                    n =1;
                end;
            elseif key = =2,
                if i = =1,
                  n =1;
                elseif y(i) >1.02 * yss,
```

```
                        n = 1;
                    end;
            end
end;
t1 = t(i);
cs = length(t);
j = cs + 1;
n = 0;
while n = = 0,
        j = j - 1;
            if key = = 1,
                if j = = 1,
                    n = 1;
                elseif y(j) < 0.95 * yss,
                    n = 1;
                end;
            elseif key = = 2,
                if j = = 1,
                    n = 1;
                elseif y(j) < 0.98 * yss,
                    n = 1;
                end;
            end;
end;
t2 = t(j);
        if t2 < tp
            if t1 > t2
                ts = t1
            end
        elseif t2 > tp,
            if t2 < t1,
                ts = t2
            else
                ts = t1
            end
        end
```

【16-6.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统开环传递函数的系统模型，计算系统零点、极点位置并绘制出零极点图的函数 pzmapp.m，其调用格式为

[p,z] = pzmapp(num,den)

其中输入参数 ***num*** 是对象系统开环传递函数分子按"*s*"降幂排列多项式的系数向量，***den*** 是对象系统开环传递函数分母按"*s*"降幂排列多项式的系数向量。输出参数返回的系统零极点位置的数据，零点保存在变量 *z* 中，极点保存在变量 ***p*** 中。还绘制零极点图，极点用"×"表

示，零点用“○”表示。

```
function [p,z] = pzmapp(num,den)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM pzmapp. m
sys1 = tf(num,den);sys = feedback(sys1,1);
P = sys. den{1};p = roots(P),
GH = zpk(sys);pp = GH. p{1},
pzmap(sys),grid;
[p,z] = pzmap(sys),
```

【17-6.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统开环传递函数的系统模型，绘制根轨迹图，并计算给定一组根的系统根轨迹增益与其相应的极点的函数 rlocuss，其调用格式为

rlocuss(key,num,den)

其中输入参数 ***num*** 是对象系统开环传递函数分子按“*s*”降幂排列多项式的系数向量，***den*** 是对象系统开环传递函数分母按“*s*”降幂排列多项式的系数向量。当 *key* = 1 时，函数运行后仅绘制根轨迹图，但可单击根轨迹图上的任意点，并标注该点的“Gain”（*K* 值）、该点的“Pole”（坐标）、对应系统的“Dmping”（阻尼系数）、“Overshoot”(超调量)、“Frequency”(无阻尼自然振荡角频率)等参数。当 *key* = 2 时，不仅绘制根轨迹图，还可用十字形光标，选择根轨迹上某一点、计算该点对应的系统根轨迹增益(由变量 *k* 记录)与其相对应的闭环系统全部极点(记录在变量 *polse* 中)。

```
function rlocuss(key,num,den)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM rlocuss. m
sys = tf(num,den);
if key = =1
rlocus(sys),grid;
elseif key = =2
rlocus(sys),grid;
    [k,poles] = rlocfind(sys),
end
```

【18-6.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统开环传递函数的系统模型，绘制出带有稳定裕度的 Bode 图，并计算系统频域性能指标的函数 bod. m，其调用格式为

[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = bod(num,den)

其中输入参数 ***num*** 是对象系统开环传递函数分子按“*s*”降幂排列多项式的系数向量，***den*** 是对象系统开环传递函数分母按“*s*”降幂排列多项式的系数向量。输出参数返回的 *Gm* 或 L_h 是系统模值裕度及其对应的 $-\pi$ 穿越角频率 *Wcg* 或 ω_g、*Pm* 或 γ 是相位裕度及其对应的剪切角频率 *Wcp* 或 ω_c。

```
function [Gm,Pm,Wcg,Wcp] = bod(num,den)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM bod. m
sys = tf(num,den);
margin(sys),grid;
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys),
```

【19-6.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统开环传递函数的系统模型，绘制出闭环系统阶跃响应曲线的函数 stepp. m，其调用格式为

stepp(key,num,den)

其中输入参数 ***num*** 是对象系统开环传递函数分子按"s"降幂排列多项式的系数向量，***den*** 是对象系统开环传递函数分母按"s"降幂排列多项式的系数向量。当 $key=1$ 时，仅绘制闭环系统阶跃响应曲线；当 $key=2$ 时，不仅绘制闭环系统阶跃响应曲线，还计算响应性能指标：超调量 $\sigma\%$ 、峰值时间 t_p 与调节时间 t_s。

```
function stepp(key,num,den)
%MATLAB FUNCTION PROGRAM stepp.m
if key = =1
    s=tf(num,den);sys=feedback(s,1);
    step(sys),grid;
elseif key = =2
    s=tf(num,den);sys=feedback(s,1);
    step(sys),grid;
    [y,t]=step(sys);
    [sigma,tp,ts]=perf(2,y,t);
end
```

【20-7.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统前向通道与反馈通道传递函数 $G(s)$、$H(s)$，计算闭环系统开静态位置、速度、加速度误差系数 K_p、K_v、K_a 的函数 Kpva.m，其调用格式为

[Kp,Kv,Ka]=Kpva(G,H)

其中输入参数 G 是闭环系统前向通道传递函数，H 是反馈通道传递函数。输出参数返回的是系统的静态位置误差系数 Kp、静态速度误差系数 Kv、静态加速度误差系数 Ka。

```
function[Kp,Kv,Ka]=Kpva(G,H)
%MATLAB FUNCTION PROGRAM Kpva.m
syms s;
GH=G*H;
Kp=limit(GH,s,0,'right'),
Kv=limit(s*GH,s,0,'right'),
Ka=limit(s^2*GH,s,0,'right'),
```

【21-7.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统前向通道与反馈通道传递函数 $G(s)$、$H(s)$，从输入端计算动态误差系数的函数 dyerr.m，其调用格式为

dyerr(G,H)

其中输入参数 G 是系统前向通道传递函数，H 是反馈通道传递函数。输出参数是系统误差传递函数 $\Phi_{er}(s)$ 在 $s=0$ 的邻域内展开成 Taylor 级数，级数的 $s^i(i=0,1,2,\cdots)$前的系数就是动态误差系数。

```
function dyerr(G,H)
%MATLAB FUNCTION PROGRAM dyerr.m
syms s;
GH=G*H;
phier=1/(1+GH);
taylor(phier,0),
```

【22-7.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统模型的型别与系统输入信号 $r(t)$ 的类别系数，计算系统输入端稳态误差的函数 insteerr.m，其调用格式为

```
[essrr,essrv,essra] = insteerr(G,H,xb,vars)
```

其中输入参数 G 是系统前向通道传递函数，H 是反馈通道传递函数。xb 是控制系统的型别，即闭环系统开环传递函数里积分环节的个数。输入参数 $vars$ 为系统输入信号 $r(t)$ 的类别系数：阶跃信号系数 r0 = vars(1)、速度信号系数 v0 = vars(2)、加速度信号系数 a0/2 = vars(3)。输出参数是系统输入端稳态误差：阶跃信号下的 essrr、速度信号下的 essrv、加速度信号下的 essra。

```
function [essrr,essrv,essra] = insteerr(G,H,xb,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM insteerr.m
r0 = vars(1);v0 = vars(2);a0 = 2 * vars(3);
[Kp,Kv,Ka] = Kpva(G,H);
if xb = = 0
    essrr = r0/(1 + Kp),essrv = inf,essra = inf,
elseif xb = = 1
    essrr = 0,essrv = v0/Kv,essra = inf,
elseif xb = = 2
    essrr = 0,essrv = 0,essra = a0/Ka,
elseif xb = = 3
    essrr = 0,essrv = 0,essra = 0,
end
```

【23-7.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统模型与系统输入信号 $r(t)$，计算系统输出端稳态误差的函数 osteerr.m，其调用格式为

```
[essrp] = osteerr(G,H,r)
```

其中输入参数 G 是系统前向通道传递函数，H 是反馈通道传递函数，$r(t)$ 是系统输入信号。输出参数 $essrp$ 是系统输出端稳态误差。

```
function [essrp] = osteerr(G,H,r)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM osteerr.m
syms s;
GH = G * H;
R = laplace(r);
phier = 1/(1 + GH);E = phier * R;
essrp = limit(s * E/H,s,0,'right'),
```

【24-7.5 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统前向通道与反馈通道传递函数 $G(s)$、$H(s)$ 以及设置的时间，绘制误差响应曲线并计算稳态误差的函数 plottt.m，其调用格式为

```
[esst] = plottt(key,G,H,t)
```

其中输入参数 G 是系统前向通道传递函数，H 是反馈通道传递函数，t 是绘制误差响应曲线设置的时间，因为绘图的需要，输入的时间数组应转置。当 $key = 1$ 时，绘制系统单位阶跃响应曲线与误差响应曲线，并计算单位阶跃响应稳态误差；当 $key = 2$ 时，绘制系统单位斜坡响应曲线与单位斜坡响应稳态误差曲线，并计算单位斜坡响应稳态误差；当 $key = 3$ 时，

绘制系统单位等加速信号输入响应曲线与其稳态误差曲线，并计算相应稳态误差。

```
function [esst] = plottt(key,G,H,t)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM plottt.m
num1 = G.num{1} * H.num{1};
den1 = G.den{1} * H.den{1};
s = tf(num1,den1);sys = feedback(s,1);
if key = =1
    y = step(sys,t);
    subplot(121);plot(t,y),grid;
    es = 1 - y;subplot(122);plot(t,es),grid;
esst = es(length(es)),
elseif key = =2
    num = sys.num{1};den = [sys.den{1},0];
    ss = tf(num,den);y = step(ss,t);
    subplot(121),plot(t,[t y]),grid
    subplot(122),es = t - y;plot(t,es),grid
esst = es(length(es)),
elseif key = =3
    nu1 = sys.num{1};de1 = [sys.den{1},0,0];sss = tf(nu1,de1);
    y1 = step(sss,t);nu2 = 1;den2 = [1 0 0 0];
    sy2 = tf(nu2,den2);y2 = impulse(sy2,t);
    subplot(121),plot(t,[y2 y1]),grid
    subplot(122),es = y2 - y1;plot(t,es),grid
esst = es(length(es)),
end
```

【25-11.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据 z 变换初值定理与终值定理，计算其初值与终值的函数 iniendz.m，函数调用格式为

```
[essini,essend] = iniendz(Ez)
```

其中输入参数 *Ez* 是 z 变换函数，输出参数 *essini* 是求出的 z 变换函数初值，*essend* 是求出的 z 变换函数终值。

```
function  [essini,essend] = iniendz(Ez)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM iniendz.m
syms z;
essini = limit(Ez,z,inf),
essend = limit((z - 1) * Ez,z,1),
```

【26-11.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据输入采样信号 z 变换 $R(z)$ 与系统脉冲传递函数 $\Phi(z)$，计算输出信号 $C(z)$ 对应的输出信号 $c(nT)|_{T=1}=c(n)$ 与 $c^*(t)$ 的函数 phiRz.m，函数调用格式为

```
[cn] = phiRz(phiz,Rz,N)
```

其中输入参数 *phiz* 是系统脉冲传递函数 $\Phi(z)$，*Rz* 是输入采样信号的 z 变换 $R(z)$，N 是输出信号 $c^*(t)$ 的项数。输出参数 *cn* 是求出的输出信号 $C(z)$ 对应的输出信号 $c(nT)|_{T=1}=c(n)$，还有 N 项的 $c^*(t)$。

```
function  [cn] = phiRz(phiz,Rz,N)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM phiRz.m
syms z n i;
C = Rz * phiz;cn = simple(factor(iztrans(C)));
cn = vpa(cn,4);cn = simple(cn),i = 0;
while i < = N
disp('cn');disp([i]);disp('=');subs(cn,[n],[i]),
      i = i + 1;
end
```

【27-11.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 求开环离散系统两个串联环节脉冲传递函数的函数 seriz.m，函数调用格式为

```
[Gz] = seriz(key,G1s,G2s)
```

其中输入参数 *G1s* 是第 1 个环节的传递函数，*G2s* 是第 2 个环节的传递函数。当 *key* = 1 时，为两个串联环节前只有一个采样开关；当 *key* = 2 时，为两个串联环节前各有一个采样开关。输出参数 *Gz* 是开环离散系统两个串联环节脉冲传递函数。

```
function [Gz] = seriz(key,G1s,G2s)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM seriz.m
syms t s z T n;
if key = = 1;
   Gs = G1s * G2s;
   g = subs(ilaplace(Gs),t,n * T);
   Gz = factor(ztrans(g)),
end
if key = = 2;
   if G1s = = 1/s;
       Gz1 = simple(factor(ztrans(sym('1 * 1(n * T)'))));
   elseif G1s ~ = 1/s;
       g1 = ilaplace(G1s);
       g11 = subs(g1,t,n * T);
       Gz1 = simple(factor(ztrans(g11)));
   end
   g2 = ilaplace(G2s);g22 = subs(g2,t,n * T);
   Gz2 = simple(factor(ztrans(g22)));
   Gz = Gz1 * Gz2,
end
```

【28-11.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据带零阶保持器的传递函数方框计算其脉冲传递函数的函数 zohz.m，函数调用格式为

```
[Gz,phiz] = zohz(T,num,den)
```

其中输入参数 *T* 是采样周期，***num***、***den*** 是传递函数方框的分子、分母按“*s*”降幂排列的系数数组，输出参数 *Gz* 是求出的带零阶保持器的传递函数方框开环脉冲传递函数，*phiz* 是求出的闭环脉冲传递函数。当 *key* = 1 时，离散系统不带单位负反馈，只求开环脉冲传递函数 *Gz*，*phiz* 为空；当 *key* = 2 时，离散系统带单位负反馈，同时求出开环与闭环脉冲传递函

数 Gz、$phiz$。

```
function  [Gz,phiz] = zohz(key,T,num,den)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM zohz. m
if key = =1
    G = tf(num,den);
    Gz = c2d(G,T),
    phiz = [ ],
elseif key = =2
    G = tf(num,den);
    Gz = c2d(G,T),
    phiz = feedback(Gz,1),
end
```

【29-11.5 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据系统开环脉冲传递函数 $G(z)$ 的分子、分母多项式 Dzn 与 Dzd 计算 w 域特征方程的函数 Dzw. m，函数调用格式为

[Dw,Gw] = Dzw(key,Dzn,Dzd)

其中输入参数 Dzn 与 Dzd 是系统开环脉冲传递函数 $G(z)$ 的分母、分子多项式。当 $key=1$ 时，取线性代换 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$，输出参数 Dw 是求出 w 域特征方程 $D(w)=0$ 的特征式 $D(w)$；当 $key=2$ 时，取线性代换 $z=\dfrac{1+w}{1-w}$，输出参数 Gw 是求出的 w 平面 w 域的开环脉冲传递函数 $G(w)$。

```
function  [Dw,Gw] = Dzw(key,Dzn,Dzd)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM Dzw. m
syms z w K;
if key = =1
    n = subs(Dzn,z,(w+1)/(w-1));
    d = subs(Dzd,z,(w+1)/(w-1));
    Dz = vpa(expand(n+d),4);
    [num,den] = numden(Dz);
    Dw = collect(num,w),
    Gw = [ ];
elseif key = =2
    n = subs(Dzn,z,(1+w)/(1-w));
    d = subs(Dzd,z,(1+w)/(1-w));
    Gz = n/d;[num,den] = numden(Gz);
    Gw = num/den,
    Dw = [ ];
end
```

【30-11.6 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据离散系统开环脉冲传递函数 $G(z)$ 与采样周期 T，计算系统的稳态误差系数与稳态误差的函数 Kpvaz. m，函数调用格式为

[Kp,Kv,Ka,ep,ev,ea] = Kpvaz(Gz,T)

其中输入参数 Gz 是系统开环脉冲传递函数，T 是系统采样周期。输出参数 Kp、Kv、Ka 是计

算系统的静态位置、速度、加速度稳态误差系数，*ep*、*ev*、*ea* 是求出的与 *Kp*、*Kv*、*Ka* 对应的稳态误差。

```
function  [Kp,Kv,Ka,ep,ev,ea] = Kpvaz(Gz,T)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM Kpvaz.m
syms z ;
Kp = limit(Gz,z,1,'right'),
ep = 1/(1 + Kp),
Kv = limit((z - 1) * Gz,z,1,'right'),
ev = T/Kv,
Ka = limit((z - 1)^2 * Gz,z,1,'right'),
ea = T^2/Ka,
```

【31-11.7 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据离散系统中带零阶保持器的线性部分传递函数 $G(s)$，求得的脉冲传递函数 $G(z)$ 与采样周期 T 计算最少拍系统的数字校正装置脉冲传递函数 $D(z)$、闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$、闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{er}(z)$ 与调整时间 t_s 的函数 leastbeat.m，函数调用格式为

```
[Dz,phiz,phiz1,phiez,phiez1,ts] = leastbeat(key,Gz,T)
```

其中输入参数 *Gz* 是根据离散系统中带零阶保持器的线性部分传递函数 $G(s)$ 求得的脉冲传递函数，*T* 是系统采样周期。当 *key* = 1 时，输出参数对应单位阶跃输入；当 *key* = 2 时，对应单位斜坡输入；当 *key* = 3 时，对应单位加速度输入。输出参数 *Dz* 是计算最少拍系统的数字校正装置脉冲传递函数，*phiz* 是计算得的负反馈闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$，*phiz*1 是表格给出的负反馈闭环脉冲传递函数，*phiez* 是计算得的负反馈闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_{er}(z)$，*phiez*1 是表格给出的负反馈闭环误差脉冲传递函数，*ts* 是求得的调整时间 t_s。

```
function  [Dz,phiz,phiz1,phiez,phiez1,ts] = leastbeat(key,Gz,T)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM leastbeat.m
syms z ;
if key = = 1
    Dz = z^( - 1)/(1 - z^( - 1))/Gz;
    Dz = simple(Dz),
    phiz = feedback(Gz * Dz,1),
    [nphiz,dphiz] = numden(simple(z^( - 1)));
    phiz1 = nphiz/dphiz,
    [n,d] = numden(1 - phiz);
phiez = factor(n/d),
    [nphiez,dphiez] = numden(simple(1 - z^( - 1)));
phiez1 = nphiez/dphiez,
    ts = T,
elseif key = = 2
    Dz = z^( - 1) * (2 - z^( - 1))/(1 - z^( - 1))^2/Gz;
    Dz = simple(Dz),
    phiz = feedback(Gz * Dz,1),
    [nphiz,dphiz] = numden(simple(2 * z^( - 1) - z^( - 2)));
    phiz1 = nphiz/dphiz,
```

```
    [n,d] = numden(1 - phiz);
phiez = factor(n/d),
    [nphiez,dphiez] = numden(simple((1 - z^( -1))^2));
phiez1 = nphiez/dphiez,
    ts = 2 * T,
elseif key = = 3
    Dz = z^( -1) * (3 - 3 * z^( -1)+ z^( -2))/(1 - z^( -1))^3/Gz;
    Dz = simple(Dz),
    phiz = feedback(Gz * Dz,1),
    [nphiz,dphiz] = numden(simple(3 * z^( -1) - 3 * z^( -2)+ z^( -3)));
    phiz1 = nphiz/dphiz,
    [n,d] = numden(1 - phiz);
phiez = factor(n/d),
    [nphiez,dphiez] = numden(simple((1 - z^( -1))^3));
phiez1 = nphiez/dphiez,
    ts = 3 * T,
end
```

【32-12.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 由系统超调量 $\sigma\%$ 计算相角裕度 γ 的函数 sitoga.m，函数调用格式为

```
[gama] = sitoga(sigma)
```

其中输入参数 *sigma* 是系统时域性能指标超调量 $\sigma\%$，输出参数 *gama* 是系统对应超调量 $\sigma\%$ 的系统相角稳定裕度 γ。请注意，sitoga.m 函数适用范围是闭环幅频峰值 M_r 满足 $1 \leqslant M_r \leqslant 1.8$。

```
function [gama] = sitoga(sigma)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM sitoga.m
Mr = (sigma - 0.16)/0.4 + 1;
[gama] = vpa(asin(1/Mr) * 180/pi,3),
```

【33-12.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 由系统 γ 计算超调量 $\sigma\%$ 的函数 gatosi.m，函数调用格式为

```
[sigma] = gatosi(gama)
```

其中输入参数 *gama* 是系统频域性能指标相角稳定裕度 γ，输出参数 *sigma* 是计算出的系统相角稳定裕度 γ 对应的系统时域性能指标超调量 $\sigma\%$。请注意，gatosi.m 函数适用范围是闭环幅频峰值 M_r 满足 $1 \leqslant M_r \leqslant 1.8$。

```
function [sigma] = gatosi(gama)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM gatosi.m
Mr = 1/(sin(gama * pi/180));
[sigma] = vpa(0.16 + 0.4 * (Mr - 1),3),
```

【34-12.3MATLAB FUNCTION PROGRAM】 由系统时域性能指标超调量 $\sigma\%$ 与调节时间 t_s 计算系统频域性能指标剪切频率 ω_c 的函数 tstoom.m，函数调用格式为

```
[omegac] = tstoom(sigma,ts)
```

其中输入参数 *sigma* 是系统的时域性能指标超调量 $\sigma\%$，*ts* 是系统时域性能指标的调节时间

t_s，输出参数 *omegac* 是计算出对应的系统频域性能指标剪切频率 ω_c。请注意，tstoom. m 函数适用范围是闭环幅频峰值 M_r 满足 $1 \leq M_r \leq 1.8$。

```
function [omegac] = tstoom(sigma,ts)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM tstoom. m
Mr = (sigma - 0.16)/0.4 + 1;
[omegac] = pi * (2 + 1.5 * (Mr - 1)+2.5 * (Mr - 1)^2)/ts,
```

【35-12.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据被控对象传递函数，绘制原系统与校正后 Bode 图与阶跃响应曲线，检查是否满足频域与时域性能指标要求的函数 chec. m，函数调用格式为

```
chec(key,s1,s2)
```

其输入参数当 *key* = 1 时是检查原系统的频域与时域性能指标并绘制 Bode 图与阶跃响应，当 *key* = 2 时是检查校正后系统的频域与时域性能指标并绘制 Bode 图与阶跃响应，*s*1 与 *s*2 分别是原系统与校正环节的传递函数。

```
function chec(key,s1,s2)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM chec. m
if key = =1
    figure(1);
    margin(s1);pause;
    figure(2);
    sys = feedback(s1,1);step(sys),
    [y,t] = step(sys);[sigma,tp,ts] = perf(1,y,t);
elseif key = =2
    s12 = s1 * s2;figure(1);
    margin(s12);pause;
    figure(2);sys = feedback(s12,1);step(sys),
    [y,t] = step(sys);[sigma,tp,ts] = perf(1,y,t);
end
```

【36-12.5 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 按 Bode 图设计法求串联超前校正器传递函数的函数 leadc. m，函数调用格式为

```
[Gc] = leadc(key,sope,vars,gama0,c1,c2)
```

其中 *sope* 是系统的开环传递函数，*gama*0 是未校正系统 *sope* 的相角稳定裕度 r_0。*c*1 与 *c*2 是 *key* = 1 与 *key* = 2 时的修正值，不同类控制对象修正值有差别。本书例题习题中，*c*1 = 6、*c*2 = 18。当 *key* = 1 时，为 *vars* = *gama*，是根据要求校正后的相角稳定裕度求超前校正器，这是按 Bode 图常规法设计校正器的程序；当 *key* = 2 时，为 *vars* = *wc*，则是根据要求校正后的剪切频率求超前校正器，这也是按 Bode 图常规法设计校正器的程序；当 *key* = 3 时，为 *vars*(1)= *gama*，*vars*(2)= *wc*，则是既根据要求校正后的相角稳定裕度，同时又根据要求校正后的剪切频率求超前校正器，这是按 Bode 图解析法设计校正器的程序。若已知系统的开环传递函数与要求校正后的相角稳定裕度或剪切频率，求系统串联超前校正器传递函数时，调用此函数是最佳选择。

```
function [Gc] = leadc(key,sope,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM leadc. m
```

```
if key = =1
    gama = vars(1);gama1 = gama - gama0 + c1;
    [mag,phase,w] = bode(sope);
    [mu,pu] = bode(sope,w);
    gam = gama1 * pi/180;
    alpha = (1 - sin(gam))/(1 + sin(gam));
    adb = 20 * log10(mu);
    am = 10 * log10(alpha);
    wc = spline(adb,w,am);
    T = 1/(wc * sqrt(alpha));
alphat = alpha * T;
    Gc = tf([T 1],[alphat 1]),
elseif key = =2
    wc = vars(1);
    num = sope.num{1};den = sope.den{1};
    na = polyval(num,j * wc);
    da = polyval(den,j * wc);
    g = na/da;
    g1 = abs(g);
    h = 20 * log10(g1);
    a = 10^(h/10);
    wm = wc;
    T = 1/(wm * (a)^(1/2));
alphat = a * T ;
    Gc = tf([T 1],[alphat 1]),
elseif key = =3
    gama = vars(1);wc = vars(2);gama1 = gama - gama0 + c2;
    num = sope.num{1};den = sope.den{1};
ngv = polyval(num,j * wc);
dgv = polyval(den,j * wc);
    g = ngv/dgv;
thetag = angle(g);
thetag_d = thetag * 180/pi;
    mg = abs(g);
    gama_rad = gama1 * pi/180;
    z = (1 + mg * cos(gama_rad - thetag))/( - wc * mg * sin(gama_rad - thetag));
    p = (cos(gama_rad - thetag)+ mg)/(wc * sin(gama_rad - thetag));
    nc = [z,1];dc = [p,1];
    Gc = tf(nc,dc),
end
```

【37-12.6 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据 Bode 图滞后校正设计法求系统串联滞后校正器传递函数的函数 lagc.m，函数调用格式为

```
[Gc] = lagc(key,sope,vars)
```

其中 *sope* 是系统的开环传递函数，当 *key* = 1 时，为 *vars* = *gama*，是根据要求校正后的相角稳定裕度计算滞后校正器；当 *key* = 2 时，为 *vars* = *wc*，则是根据要求校正后的剪切频率计算校正器。若已知系统的开环传递函数与要求校正后的相角稳定裕度或剪切频率，求系统串联滞后校正器传递函数时，就可以调用此函数。

```
function [Gc] = lagc(key,sope,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM lagc. m
if key = = 1
    gama = vars(1);
    gama1 = gama + 5;
    [mu,pu,w] = bode(sope);
    wc = spline(pu,w',(gama1 - 180));
elseif key = = 2
    wc = vars(1);
end
num = sope. num{1};den = sope. den{1};
na = polyval(num,j * wc);
da = polyval(den,j * wc);
g = na/da;g1 = abs(g);
h = 20 * log10(g1);
beta = 10^(h/20);
T = 10/wc;
betat = beta * T;
Gc = tf([T 1],[betat 1]);
```

【38-12.7 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 用根轨迹法求系统串联超前校正器传递函数的函数 rtloc. m，函数调用格式为

```
[Gc] = rtloc(key,sope,vars)
```

其中 *sope* 是系统开环传递函数。当 *key* = 1 时，为用根轨迹几何方法求超前校正器，调用该函数时，*vars* 为 *s*1；当 *key* = 2 时，为用根轨迹解析方法求超前校正器，调用该函数时，*vars*(1)为 *s*1；*vars*(2)为 *kc*；*s*1 与 *kc* 都应放在方括号里，用逗号分隔，s1 是期望闭环主导极点，*kc* 为校正器增益。

```
function [Gc] = rtloc(key,sope,vars)
% MATLAB FUNCTION PRAGRAM rtloc. m
num = sope. num{1};den = sope. den{1};s1 = vars(1);
ngv = polyval(num,s1);
dgv = polyval(den,s1);
g = ngv/dgv;
if key = = 1
    zeta = angle(g);
    if zeta > 0;
phic = pi - zeta;
    end;
    if zeta < 0;
```

```
phic = -zeta;
      end;
      phi = angle(s1);
zetaz = (phi + phic)/2;
zetap = (phi - phic)/2;
      zc = real(s1) - imag(s1)/tan(zetaz);
      pc = real(s1) - imag(s1)/tan(zetap);
      nc = [1  -zc];dc = [1  -pc];
      nv = polyval(nc,s1);dv = polyval(dc,s1);
      kv = nv/dv;kc = abs(1/(g * kv));
      if zeta < 0;
            kc = -kc;
      end;
      kc,
      Gc = tf(nc,dc)
elseif key = =2
      kc = vars(2);
zetag = angle(g);
      mg = abs(g);ms = abs(s1);
zetas = angle(s1);
      tz = (sin(zetas) - kc * mg * sin(zetag - zetas))/(kc * mg * ms * sin(zetag));
      tp = -(kc * mg * sin(zetas)+ sin(zetag + zetas))/(ms * sin(zetag));
      nc = [tz,1];dc = [tp,1];Gc = tf(nc,dc)
end
```

【39-12.8 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 对于由一个积分环节加一个惯性环节构成的对象，用根轨迹法，进行滞后校正设计的函数 rlagc. m，函数调用格式为

```
[Gc] = rlagc(essv,x,z1,p1,p2,zeta)
```

其中输入参数 *essv* 是系统斜坡响应的稳态误差，输入参数 *x* 是系统根轨迹的分离点，输入参数 *z*1 是系统的零点，输入参数 *p*1 是系统的第一个极点，输入参数 *p*2 是系统的第二个极点，输入参数 *zeta* 是系统期望闭环主导极点对应二阶系统的阻尼比 ζ。输出参数 G_c 为用根轨迹法进行滞后校正设计的校正器传递函数。

```
function [Gc] = rlagc(essv,x,z1,p1,p2,zeta)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM rlagc. m
acos(zeta);ta = tan(acos(zeta));
y1 = x * ta;y = abs(y1);s1 = x + y * i;
Kr = abs(s1 + p1) * abs(s1 + p2);
K = Kr/(p1 + p2);
Kessv = 1/essv;
beta = Kessv/K;
T = 1/((1/100) * abs(x));
betat = beta * T;
Gc = tf((1/beta) * [1 1/T],[1 1/betat]),
```

【40-12.9 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 非 KTτ 模型拟合成对应参数 K、T、τ 的函数 kttau.m，函数调用格式为

[K,T,tau] = kttau(G)

其中输入参数 G 为模型的传递函数，输出参数 K、T、τ 为拟合成 KTτ 模型的参数。

```
function[K,T,tau] = kttau(G)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM kttau.m
K = dcgain(G);
[Kc,Pm,Wcg,Wcp] = margin(G);
tau = 1.6 * pi/(3 * Wcg);T = 0.5 * Kc * K * tau;
ktt = 0;
if finite(Kc),
   x0 = [tau;T];
   while ktt = =0
          ww1 = Wcg * x0(1);ww2 = Wcg * x0(2);
FF = [K * Kc * (cos(ww1) - ww2 * sin(ww1))+ 1 + ww2^2;sin(ww1)+ ww2 * cos(ww1)];
          J = [ - K * Kc * Wcg * sin(ww1) - K * Kc * Wcg * ww2 * cos(ww1),...
              - K * Kc * Wcg * sin(ww1)+ 2 * Wcg * ww2;
Wcg * cos(ww1) - Wcg * ww2 * sin(ww1),Wcg * cos(ww1)];
          x1 = x0 - inv(J) * FF;
          if norm(x1 - x0) < 1e - 8,
ktt = 1;
          else,x0 = x1;
          end
          tau = x0(1);T = x0(2);
   end
end
```

【41-12.10 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 用 Ziegler - Nichols 整定公式计算系统 P、PI、PID 校正器参数的函数 zn01.m，函数调用格式为

[Gc,Kp,Ti,Td] = zn01(PID,vars)

其中 *PID* 是校正器的类型，当 *PID* = 1 时，为计算 P 调节器的参数；当 *PID* = 2 时，为计算 PI 调节器的参数；当 *PID* = 3 时，为计算 *PID* 调节器的参数。输入参数 *vars* 为带延迟—惯性环节模型的 *KTτ*，已知三参数：$K = vars(1)$；$T = vars(2)$；$tau = vars(3)$。输出参数 *Gc* 为校正器传递函数，*Kp* 为校正器的比例系数；*Ti* 为校正器的积分时间常数；*Td* 为校正器的微分时间常数。

```
function Gc,Kp,Ti,Td] = zn01(PID,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM zn01.m
K = vars(1);T = vars(2);tau = vars(3);
Kp = [ ];Ti = [ ];Td = [ ];
if PID = =1,
        Kp = T/(K * tau);
elseif PID = =2,
        Kp =0.9 * T/(K * tau);
```

```
        Ti = 3.33 * tau;
elseif PID = = 3,
        Kp = 1.2 * T/(K * tau);
        Ti = 2 * tau;Td = tau/2;
end
switch PID
  case 1, Gc = Kp
  case 2, Gc = tf([Kp * Ti Kp],[Ti 0])
  case 3, nn = [Kp * Ti * Td Kp * Ti Kp];
          dd = [Ti 0];
          Gc = tf(nn,dd)
end
```

【42-12.11 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　用 Cohen – Coon 整定公式计算系统 P、PI、PID 校正器的参数的函数 cc01.m,函数调用格式为

[Gc,Kp,Ti,Td] = cc01(PID,vars)

其中 *PID* 是校正器的类型，当 *PID* = 1 时，为计算 P 调节器的参数；当 *PID* = 2 时，为计算 PI 调节器的参数；当 *PID* = 3 时，为计算 PD 调节器的参数；当 *PID* = 4 时，为计算 PID 调节器的参数。输入参数 vars 为带延迟—惯性环节模型的 $KT\tau$，已知三参数：$K = vars(1)$；$T = vars(2)$；$\tau = vars(3)$。输出参数 G_c 为校正器传递函数，K_p 为校正器的比例系数；T_i 为校正器的积分时间常数；T_d 为校正器的微分时间常数。

```
function [Gc,Kp,Ti,Td] = cc01(PID,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM cc01.m
K = vars(1);T = vars(2);tau = vars(3);
Kp = [ ];Ti = [ ];Td = [ ];
if PID = = 1,
        Kp = [(T/tau)+0.333]/K;
elseif PID = = 2,
        Kp = [0.9 * (T/tau)+0.082]/K;
        Ti = T * [3.33 * (tau/T)+0.3 * (tau/T)^2]/[1 +2.2 * (tau/T)];
elseif PID = = 3,
        Kp = [1.24 * (T/tau)+0.1612]/K;
        Td = T * [0.27 * (tau/T)]/[1 +0.13 * (tau/T)];
elseif PID = = 4,
        Kp = [1.35 * (T/tau)+0.27]/K;
        Ti = T * [2.5 * (tau/T)+0.5 * (tau/T)^2]/[1 +0.6 * (tau/T)];
        Td = T * [0.37 * (tau/T)]/[1 +0.2 * (tau/T)];
end
switch PID
  case 1, Gc = Kp;
  case 2, Gc = tf([Kp * Ti Kp],[Ti 0]);
  case 3, Gc = tf([Kp * Td Kp],1);
  case 4, nn = [Kp * Ti * Td Kp * Ti Kp];
```

```
        dd = [Ti 0];
        Gc = tf(nn,dd);
end
```

【43-12.12 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 用积分值最小准则来计算系统 P、PI、PID 校正器参数的函数 inmin01.m，函数调用格式为

[Gc,Kp,Ti,Td] = inmin01(PID,vars)

其中 *PID* 是校正器类型，当 *PID* =1 时，为计算 P 调节器的参数；当 *PID* =2 时，为计算 PI 调节器的参数；当 *PID* =3 时，为计算 PID 调节器的参数。输入参数 *vars* 为带延迟—惯性环节模型的 $KT\tau$，已知三参数：$K = vars(1)$；$T = vars(2)$；$tau = vars(3)$。输出参数 G_c 为校正器传递函数，K_p 为校正器比例系数；T_i 为校正器积分时间常数；T_d 为校正器微分时间常数。

```
function [Gc,Kp,Ti,Td] = inmin01(PID,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM inmin01.m
K = vars(1);T = vars(2);tau = vars(3);iC = vars(4);
Kp = [];Ti = [];Td = [];
if PID = =1,
ABtab = [0.902, 1.414, 0.904;
              -0.985, -0.917, -1.084];
elseif PID = =2,
ABtab = [0.984, 1.305, 0.859;
              -0.986, -0.959, -0.977;
              0.608, 0.492, 0.674;
              -0.707, -0.739, -0.680];
elseif PID = =3,
ABtab = [1.435, 1.495, 1.357;
              -0.921, -0.945, -0.947;
              0.878, 1.101, 0.842;
              -0.749, -0.771, -0.738;
              0.482, 0.560, 0.381;
              1.137, 1.006, 0.995];
end
  ii =0;
  tt = tau/T;
if PID = =1,
      a1 = ABtab(1,ii + iC);
      b1 = ABtab(2,ii + iC);
      Kp = (a1 * (tt^b1))/K;
elseif PID = =2,
      a1 = ABtab(1,ii + iC);b1 = ABtab(2,ii + iC);
      a2 = ABtab(3,ii + iC);b2 = ABtab(4,ii + iC);
      Kp = (a1 * (tt^b1))/K;Ti = T/(a2 * (tt^b2));
elseif PID = =3,
```

```
        a1 = ABtab(1,ii + iC);b1 = ABtab(2,ii + iC);
        a2 = ABtab(3,ii + iC);b2 = ABtab(4,ii + iC);
        a3 = ABtab(5,ii + iC);b3 = ABtab(6,ii + iC);
        Kp = (a1 * (tt^b1))/K;Ti = T/(a2 * (tt^b2));
        Td = T * a3 * (tt^b3);
end
if PID = =1
        Gc = Kp;
elseif PID = =2
        nn = [Kp * Ti Kp];
        dd = [Ti 0];
        Gc = tf(nn,dd);
elseif PID = =3
        nn = [Kp * Ti * Td Kp * Ti Kp];
        dd = [Ti 0];
        Gc = tf(nn,dd);
end
```

【44-12.13 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 用稳定边界法整定公式计算系统 P、PI、PID 校正器参数的函数 zn02.m，函数调用格式为

```
[Gc,Kp,Ti,Td] = zn02(PID,G,p)
```

其中 *PID* 是校正器的类型，当 *PID* =1 时，为计算 P 调节器的参数；当 *PID* =2 时，为计算 PI 调节器的参数；当 *PID* =3 时，为计算 PID 调节器的参数。输入参数 *G* 是已知被校正系统开环传递函数，输入参数 *p* 为系统开环极点个数(不计重根数，即多重根只计为 1 个根)。输出参数 G_c 为校正器传递函数，K_p 为校正器比例系数；T_i 为校正器积分时间常数；T_d 为校正器微分时间常数。

```
function [Gc,Kp,Ti,Td] = zn02(PID,G,p)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM zn02.m
Kp = [ ];Ti = [ ];Td = [ ];
rlocus(G);
[km,pole] = rlocfind(G)
keyboard
wm = imag(pole(p))
if PID = =1,
        Kp =0.5 * km;;
elseif PID = =2,
        Kp =0.455 * km;
        Ti =0.85 * 2 * pi/wm;
elseif PID = =3,
        Kp =0.6 * km;
        Ti =0.5 * 2 * pi/wm;
        Td =0.125 * 2 * pi/wm;
end
```

```
switch PID
  case 1, Gc = Kp
  case 2, Gc = tf([Kp * Ti Kp],[Ti 0])
  case 3, nn = [Kp * Ti * Td Kp * Ti Kp];
          dd = [Ti 0];
          Gc = tf(nn,dd)
end
```

【45-13.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据直流电机的额定参数 U_{nom}、I_{nom}、n_{nom}、电枢电阻 R_a、V－M 系统主电路总电阻 R、要求的系统调速范围 D 与静差率 s，直流电机调速控制系统关系式 $C_e=\dfrac{U_{nom}-I_{nom}R_a}{n_{nom}}$、$\Delta n_{cl}=\Delta n_{nom}=\dfrac{n_{nom}s}{D(1-s)}$、$\Delta n_{op}=\dfrac{I_{nom}R}{C_e}$、$K=\dfrac{\Delta n_{op}}{\Delta n_{nom}}-1$，计算直流调速系统 C_e、Δn_{cl}、Δn_{op}、K 的函数 closeK.m，函数调用格式为

```
[Ce,delnnom,delncl,delnop,K] = closeK(Unom,Inom,nnom,Ra,R,D,s)
```

其中输入参数已说明，输出参数 C_e 是额定磁通下电机电动势转速比，Δn_{cl}是满足系统调速范围与静差率要求的闭环系统稳态速降，Δn_{op}是系统开环额定负载下稳态速降，K 是满足系统调速范围与静差率要求的闭环系统开环放大系数。

```
function[Ce,delnnom,delncl,delnop,K] = closeK(Unom,Inom,nnom,Ra,R,D,s)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM closeK.m
Ce = (Unom - Inom * Ra)/nnom,
delnnom = nnom * s/D/(1 - s),
delnop = Inom * R/Ce,
delncl = delnnom;
K = delnop/delncl - 1,
```

【46-13.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 求系统单位阶跃扰动响应性能指标（最大动态降落、最大动态降落时间、恢复时间）的函数 dist.m，函数调用格式为

```
[detac,tp,tv] = dist(key,y,t)
```

其中 *key* 用来选择恢复时间的5%或2%误差带，当 $key=1$ 时表示选择5%误差带，当 $key=2$ 时表示选择2%误差带。y、t 是对应系统单位阶跃扰动响应的函数值与时间。函数返回的 *detac* 是单位阶跃扰动作用下的无基准量最大动态降落值、最大动态降落时间 *tp*、恢复时间 *tv*。

```
function [detac,tp,tv] = dist(key,y,t)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM dist.m
% Count sgm and tp
[mp,tf] = min(y);
cs = length(t);
yss = y(cs);
detac = mp;
tp = t(tf);
tm = max(t);
% Count ts
```

```
i = cs + 1; n = 0;
while n = = 0,
                i = i - 1;
             if key = = 1,
                        if i = = 1,
      n = 1;
                        elseif y(i) > = 0.05,
    n = 1;
                        end;
             elseif key = = 2,
if i = = 1,
    n = 1;
                        elseif y(i) > = 0.02,
   n = 1;
                        end;
             end
end;
t1 = t(i);
i;
cs = length(t); j = cs + 1; n = 0;
while n = = 0,
            j = j - 1;
                 if key = = 1,
                        if j = = 1,
                              n = 1;
                        elseif y(j) < = ( -0.05),
                              n = 1;
                        end;
                 elseif key = = 2,
                        if j = = 1,
                              n = 1;
                        elseif y(j) < = ( -0.02),
                              n = 1;
                        end;
end

end;
t2 = t(j);
j;
             if t2 < tp
                 if t1 > t2
                     tv = t1;
                 end
```

```
    elseif t2 > tp,
        if t2 < t1,
            if t1 ~ =0
                tv = t1;
            else
                tv = t2;
            end
        else
            if t1 ~ =0
                tv = t1;
            else
                tv = t2;
            end
        end
    end
```

【47-13.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 当位置环的控制对象为积分加惯性环环节 $W_{obj}(s)=\dfrac{K_{obj}}{s(T_{\Sigma}s+1)}$时，由给定的系统阶跃响应超调量 $\sigma\%$，选择系统中频宽度 h，并将系统校正成Ⅱ型系统时，设计位置随动系统的位置调节器(位置调节器 APR 应选用 PI 调节器 $W_{APR}(s)=K_p(\dfrac{\tau_p s+1}{\tau_p s})$的 MATLAB 函数 prxd1. m，函数调用格式为

[Kp,taup] = prxd1(sigma,vars)

其中输入参数 *sigma* 是指定系统阶跃响应的超调量 $\sigma\%$，*Kobj* = *vars*(1)，输入的是位置环调节对象的开环增益 K_{obj}；*Tsigma* = *vars*(2)，输入的是位置环调节对象合并的小时间常数。输出参数 *Kp* 与 *taup* 对应着设计的位置调节器传递函数的参量 K_p 与 τ_p。

```
function [Kp,taup] = prxd1(sigma,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM prxd1. m
Kobj = vars(1);Tsigma = vars(2);
Kp = [ ];taup = [ ];
if sigma = =0.52;
    h =3;
elseif sigma = =0.43;
    h =4;
elseif sigma = =0.37;
    h =5;
elseif sigma = =0.33;
    h =6;
elseif sigma = =0.3;
    h =7;
elseif sigma = =0.27;
    h =8;
elseif sigma = =25;
```

```
        h = 9;
elseif sigma = = 0.23;
        h = 10;
end;
taup = h * Tsigma
K = (h + 1)/(2 * h^2 * Tsigma^2);
Kp = K * taup/Kobj,
```

【48-13.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 当位置环的控制对象为积分加两个惯性环环节 $W_{obj}(s)=\dfrac{K_{obj}}{s(T_m s+1)(T_l s+1)}$时，由给定的系统阶跃响应超调量 $\sigma\%$，选择系统中频宽度 h，并将系统校正成Ⅱ型系统时，设计位置随动系统的位置调节器(位置调节器 APR 应选用 PI 调节器 $W_{APR}(s)=\dfrac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{\tau_0 s(\tau_3 s+1)}$)的 MATLAB 函数 prxd2.m，函数调用格式为

[Kp,taup] = prxd2(sigma,vars)

其中输入参数 *sigma* 是指定系统阶跃响应的超调量 $\sigma\%$，*Kobj* = *vars*(1)，输入的是位置环调节对象的开环增益 K_{obj}；*Tm* = *vars*(2)，输入的是调节对象两个惯性环节中时间常数大者；*Tl* = *vars*(3)，输入的是调节对象两个惯性环节中时间常数小者，*tau*3 = *vars*(4)，输入的是所选择的调节器中惯性环节的时间常数，要求 $\tau_3 \ll \tau_1$，常选 $\tau_3 = 0.005$s。输出参数 *tau*0、*tau*1 与 *tau*2 对应着设计的位置调节器传递函数的参量 τ_0、τ_1、τ_2。

```
function [tau0,tau1,tau2] = prxd2(sigma,vars)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM prxd2.m
Kobj = vars(1);Tm = vars(2);Tl = vars(3);tau3 = vars(4);
tau0 = [ ];tau1 = [ ];tau2 = [ ];
if sigma = = 0.52;
      h = 3;
elseif sigma = = 0.43;
      h = 4;
elseif sigma = = 0.37;
      h = 5;
elseif sigma = = 0.33;
      h = 6;
elseif sigma = = 0.3;
      h = 7;
elseif sigma = = 0.27;
      h = 8;
elseif sigma = = 0.25;
      h = 9;
elseif sigma = = 0.23;
      h = 10;
end;
tau1 = Tm,
T2 = Tl + tau3;
```

```
tau2 = h * T2,
K = (h + 1)/(2 * h^2 * T2^2),
tau0 = Kobj/K,
```

【49-14.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据控制系统状态方程的状态矩阵 $\boldsymbol{A}$，计算控制系统的特征矩阵、特征矩阵的行列式、特征矩阵的逆、用 Laplace 变换法求控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的函数 phi01. m，函数调用格式为

```
[sea,detsea,invsea,phit] = phi01(A)
```

其中输入参数 $\boldsymbol{A}$ 是状态矩阵，输出参数：特征矩阵 $\boldsymbol{sea} = s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$、特征矩阵的行列式 det$\boldsymbol{sea} = |s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$ 、特征矩阵的逆 $\boldsymbol{inv\ sea} = [s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}]^{-1}$、状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

```
function [sea,detsea,invsea,phit] = phi01(A)
% MATLABFUNCTION PROGRAM phi01. m
syms s t;
n = length(A);
E = eye(n);
sea = s * E - A,
detsea = factor(det(sea)),
invsea = factor(collect(inv(sea))),
phi0 = ilaplace(invsea);
phit1 = subs(phi0,[sinh(t)],[(exp(t) - exp( - t))/2]);
phit = simple(collect(factor(phit1))),
```

【50-14.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据控制系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 计算控制系统状态方程的系统矩阵或状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的函数 phit01. m，函数调用格式为

```
[A] = phit01(phit)
```

其中输入参数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是控制系统的状态转移矩阵，输出参数是控制系统状态方程的系统矩阵或状态矩阵。通常用来验证函数 phi01. m 计算结果即验证求解的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是否正确。

```
function [A] = phit01(phit)
% MATLABFUNCTION PROGRAM phit. m
syms t;
diphit = diff(phit,t);
A = limit(diphit,t,0),
```

【51-14.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 根据控制系统状态方程的系统矩阵或状态矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$、控制矩阵或输入矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$、观测矩阵或输出矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$、输入输出矩阵 $\boldsymbol{D}(t)$，计算特征矩阵逆 $\boldsymbol{invsea} = [s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}]^{-1}$与传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的函数 tran01. m，函数调用格式为

```
[invsea,G] = tran01(A,B,C,D)
```

其中输入参数 $\boldsymbol{A}(t)$ 为状态矩阵、$\boldsymbol{B}(t)$ 为输入矩阵、$\boldsymbol{C}(t)$ 为输出矩阵、$\boldsymbol{D}(t)$ 为输入输出矩阵，输出参数有特征矩阵的逆 $\boldsymbol{invsea} = [s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}]^{-1}$、传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$，即计算传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$。

```
function [invsea,G] = tran01(A,B,C,D)
% MATLABFUNCTION PROGRAM tran01. m
syms s t;
n = length(A);
```

```
E = eye(n);
sea = s * E - A,
invsea = factor(collect(inv(sea))),
G = simple(simple(C * invsea * B)+ D),
```

【52-14.4 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　控制系统状态方程的系统矩阵或状态矩阵 $\boldsymbol{A}$，计算控制系统的特征矩阵、特征矩阵的行列式、矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(对角矩阵)$\boldsymbol{D}$、特征向量矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的函数 cha01.m，函数调用格式为

[sea,detsea,V,D] = cha01(A)

其中输入参数 $\boldsymbol{A}$ 是状态矩阵，输出参数有特征矩阵 $\boldsymbol{sea}=s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$、特征矩阵的行列式 detsea = $|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 、矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(对角矩阵)$\boldsymbol{D}$、特征向量矩阵 $\boldsymbol{V}$，即求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量矩阵 $\boldsymbol{V}$ 并验算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征向量与特征值的求解是否正确。

```
function [sea,detsea,V,D] = cha01(A)
% MATLABFUNCTION PROGRAM cha01.m
syms s t;
n = length(A);
E = eye(n);
sea = s * E - A,
detsea = factor(det(sea)),
d = eig(A),
[V,D] = eig(A),
av = A * V,vd = V * D,
```

【53-14.5 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　由状态方程式 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$ 的参数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{u}$ 与状态变量初始值 $\boldsymbol{X}(0)$ 计算状态方程解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的函数 staeq.m，函数调用格式为

[phis,xt0in,xt0sta,xt] = staeq(A,B,u,X0)

其中输入参数 $\boldsymbol{A}$ 是状态矩阵、$\boldsymbol{B}$ 是输入矩阵，$\boldsymbol{u}$ 是输入激励、$\boldsymbol{X}0$ 是状态变量初始值。输出参数 ***phis*** 即 $\boldsymbol{\Phi}(s)$ 是预解矩阵，***xt0in*** 是零输入响应向量，***xt0sta*** 是零状态响应向量，***xt*** 是状态变量的全响应向量，即状态方程的解。

```
function[phis,xt0in,xt0sta,xt] = staeq(A,B,u,X0)
% MATLABFUNCTION PROGRAM staeq.m
syms s t;
Alen = length(A);E = eye(Alen);U = laplace(u);
phisinv = s * E - A;phisinvdet = factor(det(phisinv));
phis = factor(collect(inv(phisinv))),
xt0in = ilaplace(phis * X0),
xt0sta = ilaplace(phis * B * U),
xt = xt0in + xt0sta,
```

【54-14.6 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　从系统在 $\boldsymbol{x}$ 坐标系里的 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}$ 动态方

程按变换关系 P 变换到 $\bar{x}$ 坐标系里的 $\begin{cases}\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ \bar{y} = \bar{C}\bar{x}\end{cases}$ 动态方程的函数 lintra01. m，函数调用格式为

[A1,B1,C1] = lintra01(A,B,C,P)

其中输入参数为系统在 x 坐标系里的状态矩阵 A、输入矩阵 B、输出矩阵 C、变换关系 P，输出参数为系统在 $\bar{x}$ 坐标系里的状态矩阵 $\bar{A}$、输入矩阵 $\bar{B}$、输出矩阵 $\bar{C}$，即用程序计算系统线性变换后的系统动态方程并验证系统状态矩阵特征值的不变性。

```
function [A1,B1,C1] = lintra01(A,B,C,P)
% MATLABFUNCTION PROGRAM tran01. m
syms s t;
n = length(A);
E = eye(n);
P1 = inv(P),
A1 = P1 * A * P,
B1 = P1 * B,
C1 = C * P,
sEA = factor(det(s * E - A)),
sEA1 = factor(det(s * E - A1)),
```

【55-14.7 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 从系统在 $\bar{x}$ 坐标系里的 $\begin{cases}\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ \bar{y} = \bar{C}\bar{x}\end{cases}$ 按变换关系 P^{-1} 变换到 x 坐标系里的 $\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$ 动态方程的函数 lintra02. m，函数调用格式为

[A,B,C] = lintra02(A1,B1,C1,P1)

其中输入参数为系统在 $\bar{x}$ 坐标系里的状态矩阵 $\bar{A}$、输入矩阵 $\bar{B}$、输出矩阵 $\bar{C}$、变换关系 P^{-1} 即 $P1$，输出参数为系统在 x 坐标系里的状态矩阵 A、输入矩阵 B、输出矩阵 C，即用程序计算系统线性变换后的系统动态方程并验证系统状态矩阵特征值的不变性。

```
function [A,B,C] = lintra02(A1,B1,C1,P1)
% MATLABFUNCTION PROGRAM lintran02. m
syms s t;
n = length(A1);
E = eye(n);
P = inv(P1),
A = P * A1 * P1,
B = P * B1,
C = C1 * P1,
sEA = factor(det(s * E - A)),
sEA1 = factor(det(s * E - A1)),
```

【56-14.8 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 如果状态矩阵 ***A*** 为友矩阵或正则形矩阵并且 ***A*** 又具有各异的特征值 λ_1、λ_2、…、λ_n，则以下范德蒙德矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

可使 ***A*** 对角化。函数 vander.m 就是由 ***A*** 计算范德蒙德矩阵的，其调用格式为

[Vand] = vander(A)

其中输入参数 ***A*** 为状态空间模型的状态矩阵，输出参数为范德蒙德矩阵 ***Vand***。

```
function [Vand,A1,B1,C1] = vander(A,B,C)
% MATLABFUNCTION PROGRAM vander.m
d = eig(A);n = size(A,2);
if n = =2
    c = [d(1)d(2)];
elseif n = =3
c = [d(1)d(2)d(3)];
elseif n = =4
c = [d(1)d(2)d(3)d(4)];
elseif n = =5
c = [d(1)d(2)d(3)d(4)d(5)];
end
for j = 1:n
    for i = 1:n
Vand(i,j)= c(j)^(i-1);
    end
end
P = Vand,
P1 = inv(P);A1 = P1 * A * P,
B1 = P1 * B,
C1 = C * P,
```

【57-14.9 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 当系统模型的状态矩阵 ***A*** 有相重的特征值时，计算系统 Jordan(约当)标准型的函数 jorsta.m，其调用格式为

[V, J, A1, B1, C1] = jorsta (A, B, C)

其中输入参数连续系统时 ***A***、***B*** 与 ***C*** 为状态空间模型的三个矩阵，输出参数 ***J*** 是矩阵 ***A*** 的 Jordan 标准型，***V*** 即是那个使约当标准型满足 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{V}\backslash\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}$ 的非奇异变换矩阵。***A***1 为系统变换后的状态矩阵，***B***1 为系统变换后的输入矩阵，***C***1 为系统变换后的输出矩阵。再用程序计算系统线性变换后系统的动态方程，并验证系统状态矩阵特征值的不变性。

```
function [V,J,A1,B1,C1] = jorsta(A,B,C)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM jorsta.m
```

```
syms s t;
n = length(A);E = eye(n);
[V,J] = jordan(A),
V1 = inv(V);
J1 = V1 * A * V,
A1 = V1 * A * V,
B1 = V1 * B,
C1 = C * V,
sEA = factor(det(s * E - A)),
sEA1 = factor(det(s * E - A1)),
```

【58-14.10 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　确定离散或连续系统可控性的函数 contro.m，其调用格式为

[CO] = contro(A,B,C,D)

其中输入参数连续系统时 ***A***、***B***、***C*** 与 ***D*** 为状态空间模型的四个矩阵，离散系统时 ***F***、***G***、***C*** 与 ***D*** 为其状态空间模型的四个矩阵，使用函数时，需要设定 ***A*** = ***F***、***B*** = ***G***。输出参数 ***CO*** = ***ctrb***(***A***, ***B***)为可控性矩阵，并判断给出系统可控性结论。

```
function[CO] = contro(A,B,C,D)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM contro.m
n = length(A),
CO = ctrb(A,B),rankCO = rank(CO),
if rankCO = = n
disp('System is controlled')
elseif rankCO ~ = n
disp('System is no controlled')
end
```

【59-14.11 MATLAB FUNCTION PROGRAM】　确定系统的状态完全可控标准型的函数 consta.m，其调用格式为

[P,A,B,C] = consta(A1,B1,C1)

其中输入参数连续系统时 ***A***1、***B***1 与 ***C***1 为非正则形式状态空间模型的四个矩阵，输出参数为正则标准形式状态空间模型的两个矩阵 ***A***、***B***、***C*** 与将其变换的变换矩阵 ***P***，并判断原来非正则形式状态空间模型对应系统与正则标准形式状态空间模型对应系统是否可控。

```
function [P,A,B,C] = consta(A1,B1,C1)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM consta.m
n1 = length(A1);CO1 = ctrb(A1,B1);
if det(CO1) ~ =0
   invCO1 = inv(CO1);
end
Q = size(invCO1);q1 = Q(1);q2 = Q(2);
for i = 1:1:n1
P(i,:)=[invCO1(q1,:) * A1^(i-1);];
end
P,P1 = inv(P);A = P * A1 * P1,B = P * B1,C = C1 * P1,CO = ctrb(A,B);rnkCO = rank(CO);
```

```
ifrnkCO = = n1
disp('A1B1 System is controlled')
elseif rnkS ~ = n1
disp('A1B1 System is no controlled')
end
n = length(A);CO = ctrb(A,B);rankCO = rank(CO);
if rankCO = = n
disp('AB System is controlled')
elseif rankCO < n
disp('AB System is no controlled')
end
```

【60-14.12 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 确定系统输出可控性的函数 outcon.m，其调用格式为

[T] = outcon(A,B,C,D)

其中输入参数连续系统时 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 为状态空间模型的四个矩阵，输出参数 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{CB}\quad \boldsymbol{CAB}\quad \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}\cdots\boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{D}]$为输出可控性矩阵，并判断给出系统可控性结论。

```
function [T] = outcon(A,B,C,D)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM outcon.m
n = length(A),m2 = size(B,2);
for i = 1:1:n
        P(i,:)=[C * A^(i - 1) * B;],
end
if m2 = = 1
    T = [P' D],Q = size(C);q = Q(1),rankT = rank(T),
    ifrankT = = q
disp('System Output is controlled')
    elseif rankT ~ = q
disp('System Output is no controlled')
    end
elseif m2 = = 2
    P = [P(1,1),P(1,2),P(2,1),P(2,2),P(3,1),P(3,2)],
    T = [P D],Q = size(C);q = Q(1),rankT = rank(T),
    if rankT = = q
disp('System Output is controlled')
    elseif rankT ~ = q
disp('System Output is no controlled')
    end
end
```

【61-14.13 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 确定离散或连续系统可观性的函数 obser.m，其调用格式为

[OB] = obser(A,B,C,D)

其中输入参数连续系统时 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 为状态空间模型的四个矩阵，离散系统时 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{C}$

与 ***D*** 为其状态空间模型四个矩阵，使用函数时，需要设定 ***A*** = ***F***、***B*** = ***G***。输出参数 ***OB*** = **obsv(A，C)** 为可观性矩阵，并判断给出系统可观性结论。

```
function [OB] = obser(A,B,C,D)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM obser. m
n = length(A),OB = obsv(A,C),rkOB = rank(OB),
if rkOB = = n
disp('System is observable')
else
disp('System is no observable')
end
```

【62-14.14 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 确定系统的完全可观标准型的函数 obssta. m，其调用格式为

```
[M,A1,B1,C1] = obssta(A,B,C,D)
```

其中输入参数连续系统时 ***A***、***B***、***C*** 与 ***D*** 为状态空间模型的四个矩阵，输出参数为可观测标准形状态空间模型的矩阵 ***A1***、***B1***、***C1*** 与将其变换的变换矩阵 ***M***，并判断原来状态空间模型对应系统与可观测标准型状态空间模型对应系统是否可观。

```
function [M,A1,B1,C1] = obssta(A,B,C,D)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM obssta. m
V = obsv(A,C),n = length(A),rankV = rank(V),
if rankV = = n
disp('System is observable')
elseif rankV ~ = n
disp('System is no observable')
end
if det(V) ~ =0
invV = inv(V);
end
Q = size(invV);q1 = Q(1);q2 = Q(2);V1 = (invV)';
for i = 1:1:n
    P(i,:)=[V1(q1,:) * (A')^(i - 1);];
end
P,M = P',P1 = inv(P);A1 = inv(M) * A * M,
B1 = inv(M) * B,C1 = C * M,
newV = obsv(A1,C1),newn = length(A1),nrankV = rank(newV),
if nrankV = = newn
disp('New system is observable')
elseif rankV ~ = n
disp('New system is no observable')
end
```

【63-14.15 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 系统具有指定的闭环极点 *P* 时利用 Ackermann 公式计算状态反馈增益矩阵 ***K*** 的函数 stabak. m，其调用格式为

```
[K] = stabak(key,A,B,C,D,P)
```

其中输入参数连续系统时 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 为状态空间模型的四个矩阵、指定的闭环极点 P，输出参数当 $key=1$ 时，首先判别系统的可控性，再用函数 place. m 计算系统状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$；当 $key=2$ 时，首先判别系统的可观性，再用函数 place. m 计算估计系统状态的观测器的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$。

```
function [K] = stabak(key,A,B,C,D,P)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM stabak. m
if key = = 1
    [CO] = contro(A,B,C,D)
    [K] = place(A,B,P),
elseif key = = 2
    [OB] = obser(A,B,C,D);
    [K] = place(A',C',P),
end
```

【64-14. 16 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 系统具有指定的闭环极点 P 时，计算全维状态估计器的函数 staest. m，其调用格式为

[K,H,AHC] = staest(A,B,C,D,P)

其中输入参数连续系统时 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 为状态空间模型的四个矩阵、指定的闭环极点 P，输出参数首先用自编函数 obser. m 判别系统的可观性，给出系统可观性结论，再用函数 acker. m 计算系统状态估计器增益矩阵 $\boldsymbol{K}$、系统全维状态观测器矩阵($\boldsymbol{A}-\boldsymbol{HC}$)，从而得到状态观测器的状态方程。

```
function [K,H,AHC] = staest(A,B,C,D,P)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM staest. m
[OB] = obser(A,B,C,D);
A1 = A';C1 = C';
K = acker(A1,C1,P),H = (K)',
AHC = A - H * C,
```

【65-14. 17 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 当系统已经确定非奇异线性变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与观测器输出反馈阵 $\boldsymbol{H}$ 时，计算降维状态估计器的函数 reduest. m，其调用格式为

[AHAW,BHBU,AHAY] = reduest(A1,B1,C1,D1,Q,H)

其中输入参数连续系统时 $\boldsymbol{A1}$、$\boldsymbol{B1}$、$\boldsymbol{C1}$ 与 $\boldsymbol{D1}$ 为可观系统状态空间模型的 4 个矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为非奇异线性变换矩阵，$\boldsymbol{H}$ 为观测器输出反馈阵。输出参数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 为非奇异线性变换后的系统三个矩阵，输出参数还有降维状态估计器

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{w}}=(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{HA}_{21})\boldsymbol{w}+(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{HB}_2)\boldsymbol{u}+[(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{HA}_{21})\boldsymbol{H}+\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{HA}_{22}]\boldsymbol{y}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{Hy}\end{cases}$$

方程中的系数，即 AHAW =(A11 - H * A21)、BHBU =(B1 - H * B2)、AHAY =(A11 - H * A21) * H + A12 - H * A22，既适用于一列的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵也适用于两列的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵。

```
function [AHAW,BHBU,AHAY] = reduest(A1,B1,C1,D1,Q,H)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM reduest. m
Q1 = inv(Q);A = Q * A1 * Q1,n = length(A);
B = Q * B1,m = size(B);m1 = m(1),m2 = m(2),
```

```
if m2 = =1
    A11 =[A(1:(n-1),1:(n-1))];A12 =[A(1:(n-1),n)];
    A21 =[A(n,1:(n-1))];A22 =[A(n,n)];
    B1 = B(1:(m1 -1),1),B2 = B(m1,1),
elseif m2 = =2
    A11 =[A(1,1)],A12 =[A(1,(n-1):n)],
    A21 =[A((n-1):n,1)],A22 =[A((n-1):n,(n-1):n)],
    B1 = B(1,1:m2),B2 = B((m1 -1):m1,1:m2),
end
C = C1 * Q1;AHAW = (A11 - H * A21),BHBU = (B1 - H * B2),
AHAY = (A11 - H * A21) * H + A12 - H * A22,
```

【66-14.18 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 计算线性系统李雅普诺夫函数的函数 lyaeq. m，其调用格式为

[FQ,P,Vx] = lyaeq(key,A,Q)

其中输入参数 *key* =1 时适用定常连续系统，*key* =2 时，适用定常离散系统。***A*** 为空间模型的状态矩阵；***Q*** 是给定的正定实对称矩阵(通常选 ***Q*** 为单位阵)。输出参量 ***FQ*** = −***Q***；***P*** 为李雅普诺夫矩阵代数方程的解；***Vx*** 为系统的李雅普诺夫函数。调用 lyaeq. m 的程序运行后，也对系统的稳定性做出判断，对每一个特征值给出判断全为稳定时，系统才稳定，只要有一个正特征根，系统都不稳定。还对系统坐标原点是否为唯一平衡状态点做出判断。

```
function [FQ,P,Vx] = lyaeq(key,A,Q)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM lyaeq. m
n = length(A);d = eig(A);detA = det(A);
for i =1:1:n
  di = d(i),
  if d(i) <0
      disp('系统是稳定的！')
  else
disp('系统是不稳定的！')
    end
end
if detA ~ =0
    disp('A 非奇异,系统坐标原点是非唯一的平衡状态点')
else
    disp('A 奇异,系统坐标原点不是平衡状态点')
end
if n = =2
    syms p11 p12 p21 p22 x1 x2;p12 = p21;P =[p11 p12;p21 p22];
     x =[x1;x2];
elseif n = =3
    syms p11 p12 p13 p21 p22 p23 p31 p32 p33 x1 x2 x3;
    x =[x1;x2;x3];
    p21 = p12;p31 = p13;p32 = p23;
```

```
    P = [p11 p12 p13;p21 p22 p23;p31 p32 p33];
end
FQ = -Q;APPA = A'*P+P*A;
if key == 1
    P = lyap(A',Q),
elseif key == 2
    P = dlyap(A',Q),
end
if det(A) ~= 0
    detp11 = det(P(1,1)),
    detP = det(P),
end
vPx = simple(x.'*P*x);Vx = vPx,
vQx = simple(x.'*(-Q)*x),
```

【67-15.1 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 求解连续系统线性二次型LQ状态调节器最优控制的函数 lqopti.m，其调用格式为

[K,P,E] = lqopti(key,A,B,C,D,Q,R,N,x0)

其中输入参数 *key* = 1 与 *key* = 3 时，状态调节器采用状态反馈即 $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{Kx}(t)$，当 *key* = 2 与 *key* = 4 时，则采用输出反馈 $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{Ky}(t)$；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 为状态空间模型的四个矩阵；$\boldsymbol{Q}$ 为给定的半正定实对称矩阵；$\boldsymbol{R}$ 为给定的正定实对称矩阵；$\boldsymbol{N}$ 代表更一般化性能指标中交叉乘积项的加权矩阵；输出参数 $\boldsymbol{K}$ 为最优反馈增益矩阵；$\boldsymbol{S}$ 为对应 Riccati 方程的惟一正定解 $\boldsymbol{P}$(若 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 是稳定矩阵，则总有 $\boldsymbol{P}$ 的正定解存在)；$\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 的特征值。当 *key* = 1 与 *key* = 2 时，还绘制出实现二次型LQ状态调节器最优控制后系统的单位阶跃响应曲线，当 *key* = 3 与 *key* = 4 时，则不绘制阶跃响应曲线。

```
function[K,P,E] = lqopti(key,A,B,C,D,Q,R,N,x0)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM lqopti.m
n = length(A);
if n == 2
    syms x1 x2;x = [x1;x2];
elseif n == 3
    syms x1 x2 x3;x = [x1;x2;x3];
end
if key == 1
    [K,P,E] = lqr(A,B,Q,R,N),
    k1 = K(1);A1 = A-B*K;B1 = B*k1;
    C1 = C;D1 = D;step(A1,B1,C1,D1),grid;
elseif key == 2
    sys = ss(A,B,C,D);
    [K,P,E] = lqry(sys,Q,R,N),
    H = K';A1 = A-H*C;B1 = B;C1 = C;D1 = D;
    step(A1,B1,C1,D1),grid;
elseif key == 3
```

```
    [K,P,E] = lqr(A,B,Q,R,N),
elseif key = =4
    sys = ss(A,B,C,D);
    [K,P,E] = lqry(sys,Q,R,N),
end
u = vpa( - inv(R) * B' * P * x,4),
J = 1/2 * x0' * P * x0,
d = eig(A - B * inv(R) * B' * P),
```

【68-15.2 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 求解连续系统线性二次型 Kalman 滤波最优观测器的函数 lqkalm.m，其调用格式为

[L,P,kalmsys] = lqkalm(A,B,C,D,R,Q0,R0,t)

其中输入参数 ***A***、***B***、***C***、***D*** 是原系统动态方程的 4 个矩阵，***R*** 为给定的正定实对称矩阵，***Q***0 为模型噪声的协方差矩阵，***R***0 为量测噪声的协方差矩阵，***t*** 是绘制带 Kalman 滤波最优观测器系统的阶跃响应的横坐标。输出参数 ***L*** 为 Kalman 滤波器的增益矩阵，***P*** 为对应 Riccati 方程的解，即估计误差的协方差，***kalmsys*** 为 Kalman 滤波器的四个矩阵。

```
function [L,P,kalmsys] = lqkalm(A,B,C,D,R,Q0,R0,t)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM lqkalm.m
s0 = ss(A,B,C,D);n = size(A,2);
if n = =2
    G = [1;0];Q = [1 0;0 1];
elseif n = =3
    G = [1;0;0];Q = [1 0 0;0 1 0;0 0 1];
end
K = lqr(A,B,Q,R);
s1 = ss(s0.A,[s0.B,s0.B],s0.C,[s0.D,s0.D]);
[kest,L,P] = kalman(s1,Q0,R0);L,P
A1 = s0.A - s0.B * K - L * s0.C;
kalmsys = ss(A1,L,K,0),
sys = s0 * kalmsys;sysc = feedback(sys,1);
step(sysc,t),grid;
```

【69-15.3 MATLAB FUNCTION PROGRAM】 求解连续系统线性二次型 LQG 最优控制器的函数 lqgreg.m，其调用格式为

[lqgsys] = lqgreg(A,B,C,D,R,Q0,R0,t)

其中输入参数 ***A***、***B***、***C***、***D*** 是原系统动态方程的 4 个矩阵，***R*** 为给定的正定实对称矩阵，***Q***0 为模型噪声的协方差矩阵，***R***0 为量测噪声的协方差矩阵，*t* 是绘制带 LQG 最优控制器系统的阶跃响应的横坐标。输出参数 ***lqgsys*** 为 LQG 最优控制器的四个矩阵。

```
function [lqgsys] = lqgreg(A,B,C,D,R,Q0,R0,t)
% MATLAB FUNCTION PROGRAM lqgreg.m
s1 = ss(A,B,C,D);
n = size(A,2);
if n = =2
    G = [1;0];Q = [1 0;0 1];
```

```
elseif n = =3
    G =[1;0;0];Q =[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
end
K = lqr(A,B,Q,R);L = lqe(A,G,C,Q0,R0);
[af,bf,cf,df] = reg(A,B,C,D,K,L);
lqgsys = ss(af,bf,cf,df),
sys = feedback(s1,lqgsys);
step(sys,t),grid;
```

参 考 文 献

[1] 黄忠霖. 基本科学计算的 MATLAB 实现［M］. 北京：国防工业出版社，2011.
[2] 黄忠霖. 控制系统 MATLAB 计算及仿真［M］. 3 版. 北京：国防工业出版社，2009.
[3] 黄忠霖. 控制系统 MATLAB 计算及仿真实训［M］. 北京：国防工业出版社，2006.
[4] 蔡尚峰. 自动控制理论［M］. 北京：机械工业出版社，1992.
[5] 胡寿松. 自动控制原理习题集［M］. 北京：国防工业出版社，1990.
[6] 胡寿松. 自动控制原理［M］. 4 版. 北京：科学出版社，2001.
[7] 胡寿松. 自动控制原理题海大全［M］. 北京：科学出版社，2008.
[8] 李友善. 自动控制原理［M］. 3 版. 北京：国防工业出版社，2005.
[9] 李友善. 自动控制原理 470 题［M］. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2002.
[10] 谢克明. 现代控制理论基础［M］. 北京：北京工业大学出版社，2000.
[11] 魏克新. MATLAB 语言与自动控制系统设计［M］. 2 版. 北京：机械工业出版社，2006.
[12] 薛定宇. 反馈控制系统设计与分析—MATLAB 语言应用［M］. 北京：清华大学出版社，2000.
[13] 曹柱中. 自动控制理论与设计［M］. 上海：上海交通大学出版社，1991.
[14] 孙虎章. 自动控制原理［M］. 北京：中央广播电视大学出版社，1994.
[15] 史忠科. 自动控制原理常见题型解析及模拟题［M］. 西安：西北工业大学出版社，1998.
[16] 王彤. 自动控制原理试题精选与答题技巧［M］. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2000.
[17] 卢京潮. 自动控制原理典型题解析及自测试题［M］. 西安：西北工业大学出版社，2001.
[18] 王敏. 自动控制原理试题精选题解［M］. 武汉：华中科技大学出版社，2002.
[19] 程鹏. 自动控制原理学习辅导与习题解答［M］. 北京：高等教育出版社，2004.
[20] 陈伯时. 电力拖动自动控制系统［M］. 2 版. 北京：机械工业出版社，1992.
[21] 洪乃刚. 电力电子、电机控制系统的建模和仿真［M］. 北京：机械工业出版社，2012.
[22] 王京春. 过程的动态特性与控制［M］. 北京：电子工业出版社，2006.
[23] 金以慧. 过程控制［M］. 北京：清华大学出版社，1993.
[24] 邵裕森. 过程控制系统及仪表［M］. 北京：机械工业出版社，1994.
[25] 朱麟章. 过程控制系统及设计［M］. 北京：机械工业出版社，1996.
[26] 蒋慰孙. 过程控制工程［M］. 北京：烃加工出版社，1988.
[27] 齐晓慧. 现代控制理论及应用［M］. 北京：国防工业出版社，2007.
[28] 曾乐生. 随动系统［M］. 北京：北京工业学院出版社，1988.
[29] 冯玮. 由浅入深学 Maple［M］. 北京：国防工业出版社，2002.
[30] 周渊深. 电力电子技术［M］. 北京：中国电力出版社，2005.
[31] 陈亚爱. 电机与拖动基础及 MATLAB 仿真［M］. 北京：机械工业出版社，2011.
[32] 黄忠霖. 电工原理的 MATLAB 实现［M］. 北京：国防工业出版社，2012.
[33] 黄忠霖. 自动控制原理的 MATLAB 实现［M］. 北京：国防工业出版社，2007.
[34] 黄忠霖. 电力电子技术的 MATLAB 实践［M］. 北京：国防工业出版社，2008.
[35]《机床设计手册》编写组. 机床设计手册第五册［M］. 北京：机械工业出版社，1979.

MATLAB

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

上架指导 工业技术／电气工程／电气自动化
ISBN 978-7-111-42163-4
策划编辑◎张俊红



定价：69.80元